CENGAGE Learning

TERCERA EDICIÓN

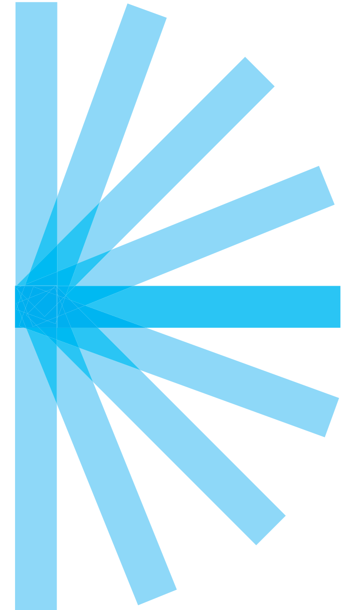
INGENIERÍA MECÁNICA

ESTÁTICA

ANDREW PYTEL

JAAN KIUSALAAS

Ingeniería mecánica



Estática

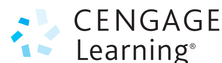
Tercera edición

Andrew Pytel
The Pennsylvania State University

Jaan Kiusalaas
The Pennsylvania State University

Traducción:
Ing. Javier León Cárdenas
Escuela Superior de Ingeniería Química
e Industrias Extractivas
Instituto Politécnico Nacional

Revisión Técnica:
Ing. José Nicolás Ponciano Guzmán
Instituto Tecnológico de Morelia
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey
Campus Morelia



Australia • Brasil • Corea • Espa a • Estados Unidos • Jap n • M xico • Reino Unido • Singapur

CENGAGE
Learning™

Ingeniería Mecánica, Estática.
Tercera edición
Andrew Pytel/Jaan Kiusalaas

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español:
Pilar Hernández Santamarina

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editores*:*
Sergio R. Cervantes González
Timoteo Eliosa García

Diseño de portada:
Studio 2.0

Imagen de portada:
© Dreamstime

Composición tipográfica:
Ediciones OVA

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

Traducido del libro
Engineering Mechanics: Statics. Third Edition.
Andrew Pytel/Jaan Kiusalaas
Publicado en inglés por Cengage Learning © 2010
ISBN: 978-0-495-24469-1

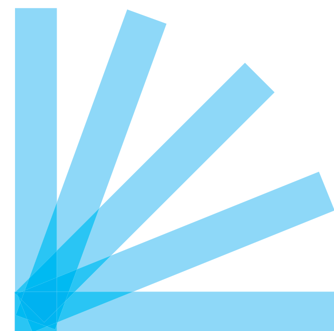
Datos para catalogación bibliográfica:
Pytel, Andrew y Jaan Kiusalaas
Ingeniería Mecánica, Estática. Tercera edición
ISBN-13: 978-607-481-872-7
ISBN-10: 607-481-872-x

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Para Jean, Leslie, Lori, John, Nicholas

y

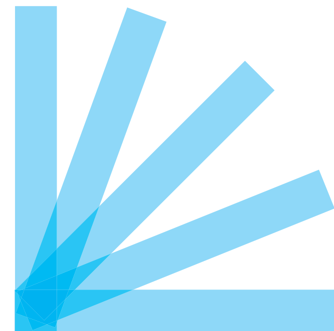
Para Judy, Nicholas, Jennifer, Timothy



Contenido

*Indica temas opcionales

Prefacio



La estática y la dinámica son los temas básicos del campo general conocido como mecánica para ingenieros. A riesgo de hacer una simplificación en su definición, la mecánica para ingenieros es la rama de la ingeniería que estudia el comportamiento de cuerpos ante la acción de fuerzas. La estática y la dinámica forman la base de muchos de los campos tradicionales de la ingeniería, como ingeniería automotriz, ingeniería civil e ingeniería mecánica. Además, estos temas con frecuencia tienen funciones fundamentales cuando se aplican los principios de la mecánica a campos diversos como la medicina y la biología. La aplicación de los principios de la estática y la dinámica a un intervalo amplio de aplicaciones requiere razonamiento y práctica en vez de memorización. Si bien los principios de la estática y la dinámica son relativamente pocos, sólo se pueden dominar estudiando y analizando problemas. Por lo tanto, todos los libros modernos, incluyendo el nuestro, contienen una gran cantidad de problemas que deben resolver los estudiantes. Aprender el enfoque ingenieril para resolver problemas es una de las lecciones más valiosas que se deben aprender en el estudio de estática y dinámica.

Nos hemos esforzado para mejorar nuestra presentación sin comprometer los principios siguientes que constituyen la base de las ediciones anteriores.

- Cada problema de ejemplo se eligió cuidadosamente para ayudar a los estudiantes a dominar la complejidad del análisis de los problemas en ingeniería.
- La selección de los problemas de tarea está equilibrada entre problemas de "libro de texto" que ilustran los principios de la mecánica en la ingeniería de una manera directa y los problemas prácticos de ingeniería son aplicables al diseño en la ingeniería.
- El número de problemas en los que se utilizan unidades inglesas y unidades SI es casi el mismo.
- Se enfatiza la importancia de trazar de manera correcta los diagramas de cuerpo libre.
- Se continúa presentando el análisis de equilibrio en tres partes independientes, cada una seguida por un conjunto de problemas. En la primera parte se enseña el método para trazar diagramas de cuerpo libre. En la segunda se muestra cómo formular y resolver las ecuaciones de equilibrio empleando un diagrama de cuerpo libre dado. En la tercera parte se combinan las dos técnicas justo aprendidas para llegar a un plan lógico para el análisis completo de un problema de equilibrio.
- Cuando es aplicable el número de ecuaciones independientes se compara con el número de cantidades desconocidas antes de formular las ecuaciones gobernantes.
- Los problemas de repaso se encuentran al final de los capítulos para fomentar que los estudiantes sinteticen los temas individuales que han aprendido.

Hemos incluido varios temas opcionales, los cuales se denotan con un asterisco (*). Debido a restricciones de tiempo, los temas indicados de esa manera se pueden omitir sin comprometer la presentación del tema. También se utiliza un asterisco para indicar problemas que requieren de un razonamiento avanzado. Los temas, los problemas de ejemplo y los problemas asociados con métodos numéricos se indican mediante un icono que representa un disco de computadora.

En esta tercera edición hemos hecho una variedad de mejoras significativas basadas en la retroalimentación recibida de estudiantes y maestros quienes han utilizado las ediciones anteriores. Además, hemos incorporado muchas de las sugerencias hechas por los revisores de la segunda edición.

Se han reorganizado, o reescrito, varios temas para facilitar su comprensión por los estudiantes. Por ejemplo, nuestra presentación del análisis de vigas en el capítulo 6 se ha reescrito por completo e incluye tanto problemas de ejemplo revisados como problemas de tarea revisados. Nuestro estudio de vigas ahora se enfoca con más claridad en los métodos y la terminología utilizada en el análisis y diseño ingenieril de vigas. Además, en el capítulo 7 se agregó el tema de la resistencia al rodamiento. También nuestro análisis de los desplazamientos virtuales en el capítulo 10 se hizo más conciso y por lo tanto será más fácil de comprender por los estudiantes. Nuevo en esta edición son las secciones tituladas Repaso de ecuaciones que se han agregado al final de cada capítulo como ayuda para los estudiantes cuando resuelvan los problemas de tarea.

El total de problemas de ejemplo y de problemas de tarea permanece casi igual que en la edición anterior; sin embargo, la introducción de dos colores mejora la facilidad de lectura general del libro y del trabajo artístico. En comparación con la edición anterior, aproximadamente un tercio de los problemas es nuevo, o se ha modificado.

Complemento *Guía de estudio correspondiente al presente libro*. Los objetivos de esta guía de estudio son dos. Primero, se incluyen auto-exámenes para ayudar al estudiante a enfocarse en los rasgos destacados de la lectura asignada. Segundo, en la guía de estudio se utilizan problemas “guiados” que le dan al estudiante una oportunidad para trabajar a través de problemas representativos, antes de intentar resolver problemas del libro.

Reconocimientos Estamos agradecidos a los revisores siguientes por sus valiosas sugerencias:

K.L. Devries, University of Utah
Kurt Gramoll, University of Oklahoma
Scott L. Hendricks, Virginia Tech
Laurence Jacobs, Georgia Institute of Technology
Chad M. Landis, Rice University
Jim G. LoCascio, California Polytechnic State University, San Luis Obispo
Thomas H. Miller, Oregon State University
Robert G. Oakberg, Montana State University
Scott D. Schiff, Clemson University

ANDREW PYTEL
JAAN KIUSALAAS

1

Introducción a la estática



El matemático e ingeniero flamenco Simon Stevinus (1548-1620) fue el primero en demostrar la descomposición de fuerzas, estableciendo así la base de la estática moderna.
© Bettmann/CORBIS

1.1 Introducción

a. ¿Qué es la mecánica para ingenieros?

La estática y dinámica se encuentran entre los primeros temas de ingeniería que estudia la mayoría de los estudiantes. Por tanto, es apropiado que se inicie con una exposición breve sobre el significado del término *mecánica para ingenieros* y de la función que tienen estos cursos en la educación de los ingenieros. Antes de definir qué es mecánica para ingenieros, primero se deben considerar las similitudes y diferencias entre la física e ingeniería.

En términos generales, la *física* es la ciencia que relaciona las propiedades de la materia y energía, excluyendo los efectos biológicos y químicos. La física incluye el

estudio de la mecánica,* termodinámica, electricidad, magnetismo y física nuclear. Por otro lado, la *ingeniería* es la aplicación de las ciencias matemáticas y físicas (física, química y biología) al diseño y manufactura de artículos que benefician a la humanidad. *Diseño* es el concepto clave que distingue a los ingenieros de los científicos. De acuerdo con la *Accreditation Board for Engineering and Technology* (ABET), el diseño en la ingeniería es el proceso de generar un sistema, componente o proceso para satisfacer ciertas necesidades.

La *mecánica* es la rama de la física que considera la acción de fuerzas sobre cuerpos o fluidos que están *en reposo* o *en movimiento*. En consecuencia, los temas principales de la mecánica son la estática y dinámica. El primer tema que estudió en su curso inicial de física ya sea en bachillerato o universidad, sin duda fue la mecánica. Así pues, *mecánica para ingenieros* es la rama de la ingeniería que aplica los principios de la mecánica al diseño mecánico (es decir, cualquier diseño que debe tomar en cuenta los efectos de fuerzas). El objetivo principal de los cursos de mecánica para ingenieros es introducir al estudiante a las aplicaciones ingenieriles de la mecánica. La estática y dinámica por lo general continúan por uno o más cursos que introducen las propiedades y deformaciones de los materiales, temas que suelen denominarse Resistencia de materiales o bien Mecánica de materiales. Esta secuencia de cursos después continúa por una capacitación formal en el diseño mecánico.

Por supuesto que la mecánica para ingenieros es una componente integral de la educación de los ingenieros cuyas disciplinas están relacionadas con las ciencias mecánicas, como la ingeniería aeroespacial, ingeniería de la arquitectura, ingeniería civil e ingeniería mecánica. Sin embargo, un conocimiento de la mecánica para ingenieros también es útil en la mayoría de otras disciplinas ingenieriles ya que con frecuencia también en ellas se debe considerar el comportamiento mecánico de un cuerpo o fluido. Dado que la mecánica fue la primera ciencia física que se aplicó a la vida cotidiana, se deduce que la mecánica para ingenieros es la rama más antigua de la ingeniería. Debido al carácter interdisciplinario de muchas aplicaciones de la ingeniería (por ejemplo, la robótica y manufactura), una capacitación profunda en la mecánica para ingenieros continúa siendo uno de los aspectos más importantes de la educación en ingeniería.

b. *Formulación de problemas y exactitud de las soluciones*

Su dominio de los principios de la mecánica para ingenieros se reflejará en su habilidad para formular y resolver problemas. Por desgracia, no existe un método simple para enseñar a desarrollar habilidades en la resolución de problemas. Casi todas las personas requieren de una considerable cantidad de práctica al resolver problemas antes de que comiencen a desarrollar las habilidades analíticas que son tan necesarias para tener éxito en la ingeniería. Por esta razón, un número relativamente grande de problemas de ejemplo y de tarea se encuentran en puntos estratégicos a lo largo de todo el libro.

Para ayudarle a desarrollar un “enfoque ingenieril” en el análisis de problemas, encontrará instructivo dividir su solución para cada problema de tarea en las partes siguientes:

1. DATOS: después de leer cuidadosamente el enunciado del problema, haga una lista de los datos proporcionados. Si se requiere una figura, haga un bosquejo de ella con claridad y aproximadamente a escala.
2. DETERMINE: establezca con precisión la información que se debe determinar.

*Al analizar los temas incluidos en la física, el término *mecánica* se utiliza sin un modificador. Es muy natural que con frecuencia esto cause confusión entre “mecánica” y “mecánica para ingenieros”.

3. SOLUCIÓN: resuelva el problema mostrando todos los pasos seguidos en el análisis. Trabaje con limpieza tal que su trabajo lo puedan seguir otras personas.
4. VALIDACIÓN: muchas veces una solución inválida se puede descubrir simplemente preguntándose: "¿tiene sentido esta respuesta?".

Al reportar sus respuestas, utilice sólo los dígitos que tengan el valor menos exacto de los datos. Por ejemplo, suponga que se le pide convertir 12 500 pies (suponiendo una exactitud con tres cifras significativas) a millas. Utilizando una calculadora dividiría 12 500 pies entre 5280 pies/mi y reportaría la respuesta como 2.37 mi (tres cifras significativas), aunque el cociente visualizado en la pantalla de la calculadora sería 2.3674242. Al reportar la respuesta igual a 2.3674242 implica que todas las ocho cifras son significativas, lo que por supuesto no es cierto. Es su responsabilidad redondear la respuesta hasta el número correcto de dígitos. *En este libro*, debe suponer que los datos dados son exactos hasta tres dígitos significativos a menos que se indique de otra manera. Por ejemplo, una longitud que se da como 3 pies se debe interpretar como 3.00 pies.

Al realizar cálculos intermedios, una buena regla empírica es considerar un dígito más que se reportará en la respuesta final; por ejemplo, utilice valores intermedios de cuatro dígitos si la respuesta tiene que ser significativa hasta tres dígitos. Además, es práctica común reportar cuatro dígitos si el primer dígito en una respuesta es 1; por ejemplo, utilice 1.392 en vez de 1.39.

1.2 Mecánica newtoniana

a. Alcance de la mecánica newtoniana

En 1687 Sir Isaac Newton (1642-1727) publicó sus aclamadas leyes del movimiento en *Principia (Mathematical Principles of Natural Philosophy)*. Sin duda que este trabajo se encuentra entre los libros científicos más influyentes que se hayan publicado. No obstante, no debemos pensar que su publicación estableció de inmediato la mecánica clásica. El trabajo de Newton sobre la mecánica abordó principalmente la mecánica celeste, por lo que estuvo limitada al movimiento de partículas. Pasaron casi doscientos años antes de que se desarrollaran la dinámica de cuerpos rígidos, la mecánica de fluidos y la mecánica de cuerpos deformables. Cada una de estas áreas requirió nuevos axiomas antes de que pudieran adquirir una forma utilizable.

No obstante, el trabajo de Newton es la base de la mecánica clásica o newtoniana. Sus esfuerzos han influenciado otras dos ramas de la mecánica, que nacieron al inicio del siglo XX: la mecánica relativista y la mecánica cuántica. La *mecánica relativista* aborda los fenómenos que ocurren a una escala cósmica (velocidades que se aproximan a la velocidad de la luz, campos gravitatorios intensos, etc.). Esto elimina dos de los postulados más objetables de la mecánica newtoniana: la existencia de un marco de referencia fijo o inercial y la hipótesis de que el tiempo es una variable absoluta, que "transcurre" a la misma rapidez en todas las partes del universo. (Existe evidencia de que el propio Newton no estaba muy de acuerdo con estos dos postulados.) La *mecánica cuántica* se ocupa de las partículas a una escala atómica o subatómica. También elimina dos conceptos apreciados de la mecánica clásica: determinismo y continuidad. La mecánica cuántica en esencia es una teoría probabilística; en vez de predecir un evento, determina la posibilidad de que éste ocurra. Además, de acuerdo con esta teoría, los eventos ocurren en pasos discretos (denominados *cuanta*) en vez de ocurrir de manera continua.

Sin embargo, la mecánica relativista y cuántica de ninguna manera han invalidado los principios de la mecánica newtoniana. En el análisis del movimiento de cuerpos encontrado en nuestra experiencia cotidiana, las dos teorías convergen en las ecuaciones de la mecánica newtoniana. Así pues, las teorías más esotéricas en realidad refuerzan la validez de las leyes de movimiento de Newton.

b. *Leyes de Newton para el movimiento de partículas*

Utilizando terminología moderna, las leyes de Newton para el movimiento se pueden enunciar como sigue:

1. Si una partícula está en reposo (o moviéndose con velocidad constante en línea recta), permanecerá en reposo (o continuará moviéndose con velocidad constante en línea recta) a menos que actúe sobre ella una fuerza.
2. Una partícula sobre la que actúa una fuerza acelerará en la dirección de la fuerza. La magnitud de la aceleración es proporcional a la magnitud de la fuerza e inversamente proporcional a la masa de la partícula.
3. Para toda acción existe una reacción igual y opuesta; es decir, las fuerzas de interacción entre dos partículas son iguales en magnitud y dirigidas opuestamente a lo largo de la misma línea de acción.

Si bien la primera ley es simplemente un caso especial de la segunda ley, se acostumbra enunciar la primera ley de manera separada debido a su importancia para la estática.

c. *Marcos de referencia internos*

Al aplicar la segunda ley de Newton, se debe poner atención al sistema coordenado en el cual se miden las aceleraciones. Un *marco de referencia interno* (también conocido como marco de referencia newtoniano o galileano) se define como cualquier sistema coordenado rígido en el cual las leyes de Newton del movimiento de partículas relativas al marco son válidas con un grado de exactitud aceptable. En la mayoría de las aplicaciones de diseño utilizadas sobre la superficie de la Tierra, un marco inercial se puede aproximar con precisión suficiente colocando el sistema coordenado a la Tierra. En el estudio de satélites terrestres, un sistema coordenado colocado al Sol suele ser suficiente. Para el viaje interplanetario, es necesario emplear sistemas coordenados colocados a las denominadas estrellas fijas.

Se puede demostrar que cualquier marco que se traslade con velocidad constante relativa a un marco de referencia es en sí un marco inercial. Es práctica común omitir la palabra *inercial* cuando se hace referencia a marcos para los cuales las leyes de Newton son obviamente aplicables.

d. *Unidades y dimensiones*

Los estándares de medida se denominan *unidades*. El término *dimensión* se refiere al tipo de medición, sin importar las unidades utilizadas. Por ejemplo, kilogramo y pie/segundo son unidades, en tanto que masa y longitud/tiempo son dimensiones. En todo este libro se utilizan dos estándares de medición: el sistema inglés y el sistema SI (de *Système internationale d´unités*). En el *sistema inglés* las dimensiones* (fundamentales) base son fuerza [F], longitud [L] y tiempo [T]. Las unidades base correspondientes son libra (lb), pie (pie) y segundo (s). Las dimensiones base en el

*Nosotros seguimos la costumbre establecida y ponemos entre paréntesis rectangulares las dimensiones.

sistema SI son masa [M], longitud [L] y tiempo [T] y las unidades base son kilogramo (kg), metro (m) y segundo (s). Todas las otras dimensiones o unidades son combinaciones de las cantidades base. Por ejemplo, la dimensión de velocidad es [L/T], siendo sus unidades pie/s, m/s, etcétera.

Un sistema con las dimensiones base [FLT] (como en el sistema inglés) se denomina *sistema gravitacional*. Si las dimensiones base son [MLT] (como en el sistema SI), el sistema se conoce como *sistema absoluto*. En cada sistema de medición, las unidades base se definen por medio de fenómenos u objetos físicos físicamente reproducibles. Por ejemplo, el segundo se define por la duración de un número especificado de ciclos de radiación en un cierto isótopo, el kilogramo se define como la masa de cierto bloque de metal que se guarda cerca de París, Francia, etcétera.

Todas las ecuaciones que representan fenómenos físicos deben ser *dimensionalmente homogéneas*; es decir, cada término de una ecuación debe tener la misma dimensión. De lo contrario, la ecuación no tendrá sentido físico (no tendría sentido, por ejemplo, sumar una fuerza a una longitud). Revisar la homogeneidad dimensional de las ecuaciones es un buen hábito que se debe adquirir ya que puede exponer errores cometidos durante las manipulaciones algebraicas.

e. Masa, fuerza y peso

Si una fuerza **F** actúa sobre una partícula de masa m, la segunda ley de Newton establece que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

donde **a** es el vector aceleración de la partícula. Para un sistema gravitacional [FLT], la homogeneidad dimensional de la ecuación (1.1) requiere que la dimensión de la masa sea

$$[M] = \left[\frac{FT^2}{L}\right] \tag{1.2a}$$

En el sistema inglés, la unidad derivada de masa se llama *slug*. Un slug se define como la masa que es acelerada a una razón de 1.0 pie/s^2 por una fuerza de 1.0 lb. Sustituyendo unidades para las dimensiones en la ecuación (1.2a), se obtiene la unidad de un slug

$$1.0\ \text{slug} = 1.0\ \text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$$

Para un sistema absoluto [MLT] de unidades, la homogeneidad dimensional de la ecuación (1.1) produce para la dimensión de fuerza

$$[F] = \left[\frac{ML}{T^2}\right] \tag{1.2b}$$

La unidad derivada de fuerza en el sistema SI es un *newton* (N), que se define como la fuerza que acelera una masa de 1.0 kg a una razón de 1.0 m/s^2. De la ecuación (1.2b), se obtiene

$$1.0\ \text{N} = 1.0\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

El *peso* es la fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo. Si se denota la aceleración gravitacional (aceleración en caída libre del cuerpo) por g, el peso W de un cuerpo de masa m está dado por la segunda ley de Newton como

$$W = mg \tag{1.3}$$

Observe que la masa es una propiedad constante de un cuerpo, en tanto que el peso es una variable que depende del valor local de g. La aceleración gravitacional sobre la superficie de la Tierra es aproximadamente 32.2 pies/s^2 o 9.81 m/s^2. Entonces, la masa de un cuerpo que pesa 1.0 lb en la Tierra es (1.0 lb)/(32.2 pies/s^2) = 1/32.2 slug. De manera similar, si la masa de un cuerpo es 1.0 kg, su peso sobre la Tierra es (9.81 m/s^2)(1.0 kg) = 9.81 N.

En un tiempo, la libra también se usaba como unidad de masa. La *libra masa* (lbm) se definía como la masa de un cuerpo que pesaba 1.0 lb sobre la superficie de la Tierra. Si bien la libra masa es una unidad obsoleta, aún se utiliza en ocasiones, lo que ocasiona confusión entre masa y peso. En este libro, utilizamos la libra exclusivamente como una unidad de fuerza.

f. Conversión de unidades

Un método conveniente para convertir una medida de un conjunto de unidades a otro es multiplicar la medición por factores de conversión apropiados. Por ejemplo, para convertir 240 mi/h en pies/s, se procede como sigue:

$$240\ \text{mi/h} = 240\frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1.0\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} \times \frac{5280\ \text{pies}}{1.0\ \cancel{\text{mi}}} = 352\ \text{pies/s}$$

donde los multiplicadores 1.0 h/3600 s y 5280 pies/1.0 mi son factores de conversión. Dado que 1.0 h = 3600 s y 5280 pies = 1.0 mi, se observa que cada factor de conversión es adimensional y de magnitud 1. Por tanto, una medida no cambia cuando se multiplica por factores de conversión, sólo se alteran sus unidades. Observe que es permisible cancelar unidades durante la conversión como si fueran cantidades algebraicas.

Los factores de conversión aplicables en la mecánica se encuentran al final de este libro.

g. Ley de la gravitación

Además de sus muchos otros logros, Newton también propuso la ley de la gravitación universal. Considere dos partículas de masa m_A y m_B que están separadas una distancia R, como se muestra en la figura 1.1. La ley de la gravitación establece que las dos partículas se atraen entre sí por fuerzas de magnitud F que actúan a lo largo de la línea que conecta las partículas, donde

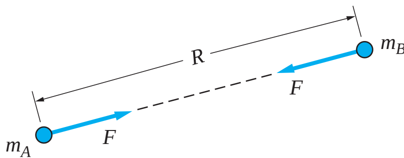


Fig. 1.1

$$F = G\frac{m_A m_B}{R^2} \tag{1.4}$$

La constante G de la gravitacional universal es igual a 3.44×10^{-8} pies^4/(lb · s^4) o 6.67×10^{-11} m^3/(kg · s^2). Aunque esta ley es válida para partículas, Newton demostró que también es aplicable a cuerpos esféricos, siempre que sus masas estén distribuidas uniformemente. (Al intentar deducir este resultado, Newton tuvo que desarrollar el cálculo.)

Si hacemos $m_A = M_T$ (la masa de la Tierra), $m_B = m$ (la masa de un cuerpo) y $R = R_T$ (el radio medio de la Tierra), entonces F en la ecuación (1.4) será el peso W del cuerpo. Comparando $W = GM_Tm/R_T^2$ con $W = mg$, se determina que $g = GM_T/R_T^2$. Por supuesto, puede ser necesario ajustar el valor de g para algunas aplicaciones a fin de tomar en cuenta la variación local de la atracción gravitacional.

Problema de ejemplo **1.1**

Convierta 5000 lb/pulg^2 en Pa (1 Pa = 1 N/m^2).

Solución

Utilizando los factores de conversión que se encuentran al final del libro, se obtiene

$$5000\,\text{lb/pulg}^2 = 5000\frac{\cancel{\text{lb}}}{\cancel{\text{pulg}}^2} \times \frac{4.448\,\text{N}}{1.0\,\cancel{\text{lb}}} \times \left(\frac{39.37\,\cancel{\text{pulg}}}{1.0\,\text{m}}\right)^2$$
$$= 34.5 \times 10^6\ \text{N/m}^2 = 34.5\,\text{MPa} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **1.2**

La aceleración a de una partícula está relacionada con su velocidad v, su coordenada de posición x y el tiempo t mediante la ecuación

$$a = Ax^3t + Bvt^2 \tag{a}$$

donde A y B son constantes. La dimensión de la aceleración es longitud entre tiempo unitario al cuadrado; es decir $[a] = [L/T^2]$. Las dimensiones de las otras variables son $[v] = [L/T]$, $[x] = [L]$ y $[t] = [T]$. Deduzca las dimensiones de A y B si la ecuación (a) tiene que estar dimensionalmente homogénea.

Solución

Para que la ecuación (a) esté dimensionalmente homogénea, la dimensión de cada término en el lado derecho de la ecuación debe ser $[L/T^2]$, la misma que la dimensión de a. Por tanto, la dimensión del primer término en el lado derecho de la ecuación (a) es

$$[Ax^3t] = [A][x^3][t] = [A][L^3][T] = \left[\frac{L}{T^2}\right] \tag{b}$$

Despejando en la ecuación (b) la dimensión de A, se obtiene

$$[A] = \frac{1}{[L^3][T]}\left[\frac{L}{T^2}\right] = \frac{1}{[L^2T^3]} \qquad \textit{Respuesta}$$

Al realizar un análisis dimensional similar en el segundo término del lado derecho de la ecuación (a) resulta

$$[Bvt^2] = [B][v][t^2] = [B]\left[\frac{L}{T}\right][T^2] = \left[\frac{L}{T^2}\right] \tag{c}$$

Despejando en la ecuación (c) la dimensión de B, se obtiene

$$[B] = \left[\frac{L}{T^2}\right]\left[\frac{T}{L}\right]\left[\frac{1}{T^2}\right] = \left[\frac{1}{T^3}\right] \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **1.3**

Determine la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una persona de 70 kg cuya elevación arriba de la superficie de la Tierra es igual al radio de la Tierra. La masa y el radio de la Tierra son $M_T = 5.9742 \times 10^{24}$ kg y $R_e = 6378$ km, respectivamente.

Solución

Considere un cuerpo de masa m ubicado a la distancia $2R_T$ desde el centro de la Tierra (de masa M_T). La ley de la gravitación universal, de la ecuación (11.4), establece que el cuerpo es atraído hacia la Tierra por la fuerza F dada por

$$F = G\frac{mM_T}{(2R_T)^2}$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/(kg · s^2) es la constante gravitacional universal. Sustituyendo los valores de G y los parámetros dados, la fuerza gravitacional de la Tierra actuando sobre la persona de 70 kg es

$$F = (6.67 \times 10^{-11})\frac{(70)(5.9742 \times 10^{24})}{[2(6378 \times 10^3)]^2} = 171.4 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

1.1 Una persona pesa 30 lb en la Luna, donde $g = 5.32$ pies/s^2. Determine: (a) la masa de la persona y (b) el peso de la persona en la Tierra.

1.2 El radio y la longitud de un cilindro de acero son 60 y 120 mm, respectivamente. Si la densidad de masa del acero es 7850 kg/m^3, determine el peso del cilindro en libras.

1.3 Convierta lo siguiente: (a) 400 lb · pie en kN · m; (b) 6 m/s en mi/h; (c) 20 lb/pulg^2 en kPa y (d) 500 slug/pulg en kg/m.

1.4 El momento de inercia de la masa de cierto cuerpo es $I = 20$ kg · m^2. Exprese I en términos de las unidades base del sistema inglés.

1.5 La energía cinética de un automóvil de masa m moviéndose con velocidad v es $E = mv^2/2$. Si $m = 1000$ kg y $v = 6$ m/s, calcule E en (a) kN · m y (b) lb · pie.

1.6 En cierta aplicación, la aceleración a y la coordenada de posición x de una partícula están relacionadas por

$$a = \frac{gkx}{W}$$

donde g es la aceleración gravitacional, k es una constante y W es el peso de la partícula. Demuestre que esta ecuación es dimensionalmente consistente si la dimensión de k es $[F/L]$.

1.7 Cuando una fuerza F actúa sobre un resorte lineal, la elongación x del resorte está dada por $F = kx$, donde k es la rigidez del resorte. Determine la dimensión de k en términos de las dimensiones base de un sistema absoluto de unidades $[MLT]$.

1.8 En algunas aplicaciones que incluyen velocidades muy elevadas, la velocidad se mide en mm/μs. Convierta 25 mm/μs en (a) m/s y (b) mi/h.

1.9 Un libro de geometría proporciona la ecuación de una parábola como $y = x^2$, donde x y y están medidas en pulgadas. ¿Cómo puede esta ecuación estar dimensionalmente correcta?

1.10 El momento de inercia de la masa I de una esfera homogénea con respecto a su diámetro es $I = (2/5)mR^2$, donde m y R son su masa y su radio, respectivamente. Encuentre la dimensión de I en términos de las dimensiones base de (a) un sistema gravitacional $[FLT]$ y (b) un sistema absoluto $[MLT]$.

1.11 La coordenada de posición x de una partícula se determina por su velocidad v y el tiempo transcurrido t como sigue: (a) $x = At^2 - Bvt$ y (b) $x = Avte^{-Bt}$. Determine las dimensiones de las constantes A y B en cada caso, suponiendo que las expresiones están dimensionalmente correctas.

***1.12** En cierto problema de vibración, la ecuación diferencial que describe el movimiento de una partícula de masa m es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = P_0 \operatorname{sen}\omega t$$

donde x es el desplazamiento de la partícula y t es el tiempo. ¿Cuáles son las dimensiones de las constantes c, k, P_0 y ω en términos de las dimensiones base de un sistema gravitacional $[FLT]$?

1.13 Utilizando la ecuación (1.4), deduzca las dimensiones de la constante de la gravitación universal G en términos de las dimensiones base de (a) un sistema gravitacional $[FLT]$ y (b) un sistema absoluto [MLT].

1.14 La salida de potencia común de un motor de un automóvil compacto es 120 hp. ¿Cuál es la potencia equivalente en (a) lb · pie/s y (b) kW?

1.15 Dos esferas de 10 kg están separadas 500 mm. Exprese la atracción gravitacional que actúa sobre una de las esferas como un porcentaje de su peso en la Tierra.

1.16 Dos esferas idénticas de radio igual a 8 pulg y que pesan 2 lb sobre la superficie de la Tierra se ponen en contacto. Determine la atracción gravitacional entre ellas.

Utilice los datos siguientes para los problemas 1.17 a 1.21: masa de la Tierra = 5.9742×10^{24} kg, radio de la Tierra = 6378 km, masa de la Luna = 0.073483×10^{24} kg, radio de la Luna = 1737 km.

1.17 Una persona pesa 180 lb sobre la superficie de la Tierra. Calcule su peso en un avión que llega a una elevación de 30 000 pies.

1.18 Utilice la ecuación (1.4) para demostrar que el peso de un objeto sobre la Luna es aproximadamente igual a 1/16 de su peso en la Tierra.

1.19 Trace la aceleración gravitacional g (m/s^2) de la Tierra contra la altura h (km) arriba de la superficie de la Tierra.

1.20 Determine la elevación h (km) donde el peso de un objeto es de un décimo de su peso sobre la superficie de la Tierra.

1.21 Calcule la fuerza gravitacional entre la Tierra y la Luna en newtons. La distancia entre la Tierra y la Luna es 384×10^3 km.

1.3 Propiedades fundamentales de los vectores

Un conocimiento de los vectores es un prerrequisito para el estudio de la estática. En esta sección se describen las propiedades fundamentales de los vectores y en secciones siguientes se analizan algunos de los elementos más importantes del álgebra vectorial. (El cálculo de vectores se introducirá según se necesite en *Dinámica*.) Suponemos que ya está familiarizado con el álgebra vectorial, por lo que nuestro análisis sólo tiene el fin de ser un repaso de los conceptos básicos.

Se deben comprender las diferencias entre cantidades escalares y vectoriales:

Un *escalar* es una cantidad que sólo tiene magnitud. Un *vector* es una cantidad que posee magnitud y dirección; obedece la ley del paralelogramo para la suma.

Debido a que los escalares sólo poseen magnitudes, son números reales que pueden ser positivos, negativos o cero. Entre las cantidades físicas que son escalares se incluyen la temperatura, tiempo y velocidad. Como se mostrará más adelante, la fuerza, velocidad y desplazamiento son ejemplos de cantidades físicas que son vectores. La magnitud de un vector siempre se toma como un número no negativo. Cuando un vector representa una cantidad física, las unidades del vector se toman como las mismas unidades de su magnitud (libras, metros por segundo, pies, etc.).

La notación algebraica utilizada para una cantidad escalar por supuesto que debe ser diferente de la empleada para una cantidad vectorial. En este libro, adoptamos las convenciones siguientes: 1. los escalares se escriben con letras inglesas o griegas cursivas, por ejemplo, t para el tiempo y θ para un ángulo; 2. los vectores se escriben con letras negritas, por ejemplo, **F** para la fuerza, y 3. la magnitud de un vector **A** se denota como $|\mathbf{A}|$ o simplemente como A (cursiva).

No existe un método universal para indicar cantidades vectoriales al escribir a mano. Las notaciones más comunes son $\overrightarrow{\mathrm{A}}$, $\underrightarrow{\mathrm{A}}$, $\overline{\mathrm{A}}$ y $\underline{\mathrm{A}}$. A menos que se le indique de otra forma, puede utilizar la convención que le sea más cómoda. Sin embargo, es imperativo que siempre tenga cuidado en distinguir entre escalares y vectores al escribirlos.

En los párrafos siguientes se resumen varias propiedades importantes de los vectores.

Vectores como segmentos de recta dirigidos Cualquier vector **A** se puede representar geométricamente como un segmento de línea dirigido (una flecha), como se muestra en la figura 1.2(a). La magnitud de **A** se denota por A y su dirección se especifica por el sentido de la flecha y por el ángulo θ que forma con una línea de referencia fija. Al emplear métodos gráficos, la longitud de la flecha se traza proporcional a la magnitud del vector. Observe que la representación que se muestra en la figura 1.2(a) está completa debido a que tanto la magnitud como la dirección del vector están indicadas. En algunos casos también es conveniente emplear la representación que se muestra en la figura 1.2(b), donde al carácter del vector de **A** se le da un énfasis adicional utilizando negritas. Las dos representaciones anteriores para vectores son las que se utilizan en este texto.

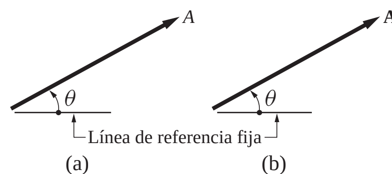


Fig. 1.2

Se observa que un vector no posee una línea de acción única ya que al moverlo a una línea de acción paralela no cambia su magnitud ni su dirección. En algunas aplicaciones ingenieriles, la definición de un vector es más restrictiva para incluir una línea de acción o incluso un punto de aplicación, consulte la sección 2.2.

Igualdad de vectores Se dice que dos vectores **A** y **B** son iguales, escritos como **A** = **B**, si: 1. sus magnitudes son iguales, es decir, $A = B$ y 2. si tienen la misma dirección.

Multiplicación escalar-vector La multiplicación de un escalar m y un vector **A**, escrita como m**A** o **A**m, se define como sigue:

1. Si m es positivo, m**A** es el vector de magnitud mA que tiene la misma dirección que **A**.
2. Si m es negativo, m**A** es el vector de magnitud $|m|A$ que está opuestamente dirigido a **A**.
3. Si $m = 0$, m**A** (denominado vector cero o nulo) es un vector de magnitud cero y dirección arbitraria.

Para $m = -1$, se observa que (−1)**A** es el vector que tiene la misma magnitud que **A**, pero opuestamente dirigido a **A**. El vector (−1)**A**, suele escribirse como –**A** y se denomina el *negativo de* **A**.

Vectores unitarios Un vector unitario es adimensional con magnitud 1. Por tanto, si λ representa un vector unitario ($|\lambda| = 1$) con la misma dirección que **A**, se puede escribir

$$\mathbf{A} = A\boldsymbol{\lambda}$$

Esta representación de un vector con frecuencia es útil ya que separa la magnitud A y la dirección λ del vector.

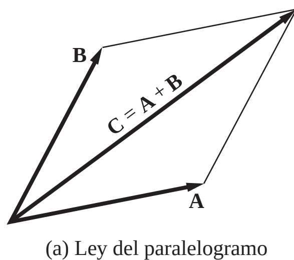
Ley del paralelogramo para la suma y ley del triángulo La suma de dos vectores **A** y **B** se define como el vector **C** que resulta de la construcción geométrica que se muestra en la figura 1.3(a). Observe que **C** es la diagonal del paralelogramo formado por **A** y **B**. La operación representada en la figura 1.3(a), escrita como **A** + **B** = **C** se denomina ley del paralelogramo para la suma. A los vectores **A** y **B** se les refiere como componentes de **C**, y **C** se denomina la resultante de **A** y **B**. El proceso de remplazar una resultante por sus componentes se llama descomposición. Por ejemplo, **C** en la figura 1.3(a) se descompone en sus componentes **A** y **B**.

Un enunciado equivalente de la ley del paralelogramo es la *ley del triángulo*, que se muestra en la figura 1.3(b). Aquí, la cola de **B** se coloca en la punta de **A** y **C** es el vector que completa el triángulo, trazado desde la cola de **A** hasta la punta de **B**. El resultado es idéntico si la cola de **A** se coloca en la punta de **B** y **C** se traza desde la cola de **B** hasta la punta de **A**.

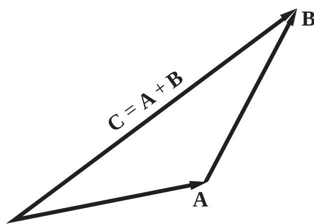
Si **E**, **F** y **G** representan tres vectores cualesquiera, se tienen las dos propiedades importantes siguientes (cada una se deduce directamente de la ley del paralelogramo):

- La suma es conmutativa: **E** + **F** = **F** + **E**
- La suma es asociativa: **E** + (**F** + **G**) = (**E** + **F**) + **G**

A menudo es conveniente encontrar la suma **E** + **F** + **G** (no es necesario utilizar paréntesis) sumando los vectores desde la punta hasta la cola, como se muestra en la figura 1.4. La suma de los tres vectores se observa que es el vector trazado desde la cola del primer vector (**E**) hasta la punta del último vector (**G**). Este método, que se denomina *regla del polígono para la suma*, se puede ampliar con facilidad a cualquier número de vectores.



(a) Ley del paralelogramo



(b) Ley del triángulo

Fig. 1.3

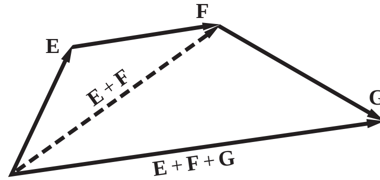


Fig. 1.4

La resta de dos vectores **A** y **B**, escrita como **A** – **B**, se define como **A** – **B** = **A** + (–**B**), como se muestra en la figura 1.5.

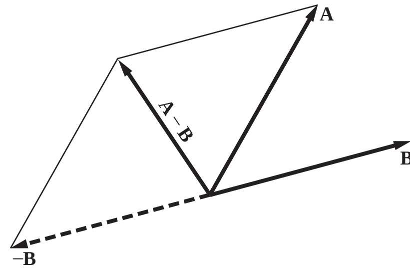
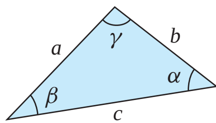


Fig. 1.5

Debido a la naturaleza geométrica de la ley del paralelogramo y de la ley del triángulo, la suma vectorial se puede realizar de manera gráfica. Una segunda técnica es determinar las relaciones entre las varias magnitudes y ángulos de forma analítica aplicando las *leyes de los senos y cosenos* a un bosquejo del paralelogramo (o del triángulo), consulte la tabla 1.1. Tanto el método gráfico como el analítico se ilustran en el problema de ejemplo 1.4.



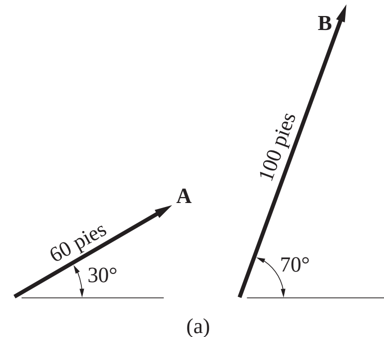
Ley de los senos	$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$
Ley de los cosenos	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Tabla 1.1

Algunas palabras de advertencia: desafortunadamente los símbolos +, − e = es común que se utilicen tanto en el álgebra escalar como en la vectorial, debido a que tienen significados completamente diferentes en los dos sistemas. Por ejemplo, observe los significados distintos para + e = en las dos ecuaciones siguientes: **A** + **B** = **C** y 1 + 2 = 3. En la programación de computadoras, esto se conoce como *sobrecarga del operador*, donde las reglas de la operación dependen de los operandos implicados en el proceso. A menos que se tenga mucho cuidado, este significado doble de los símbolos puede conducir fácilmente a expresiones inválidas, por ejemplo, **A** + 5 (¡un vector no se puede sumar a un escalar!) y **A** = 1 (¡un vector no puede ser igual a un escalar!)

Problema de ejemplo **1.4**

En la figura (a) se muestran dos vectores de posición de magnitudes $A = 60$ pies y $B = 100$ pies. (Un vector de posición es un vector trazado entre dos puntos en el espacio.) Determine la resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ utilizando los métodos siguientes: 1. analíticamente, empleando la ley del triángulo y 2. gráficamente, empleando la ley del triángulo.



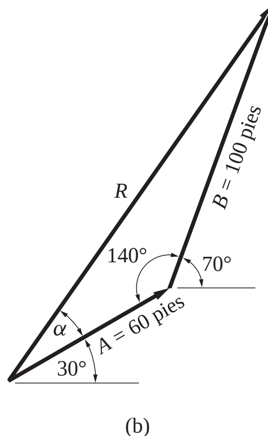
(a)

Solución

Parte 1

El primer paso en la solución analítica es elaborar un bosquejo (aproximadamente a escala) de la ley del triángulo. Después la magnitud y dirección de la resultante se determinan aplicando al triángulo las leyes de los senos y cosenos.

En este problema, la ley del triángulo para la suma de los vectores **A** y **B** se muestra en la figura (b). La magnitud R de la resultante y el ángulo α son las incógnitas que se deben determinar. Aplicando la ley de los cosenos, se obtiene



(b)

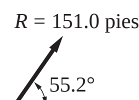
$$R^2 = 60^2 + 100^2 - 2(60)(100)\cos 140°$$

lo que produce $R = 151.0$ pies.

Ahora se puede determinar el ángulo α a partir de la ley de los senos:

$$\frac{100}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{R}{\operatorname{sen} 140°}$$

Sustituyendo $R = 151.0$ pies y despejando α, se obtiene $\alpha = 25.2°$. Con referencia a la figura (b), se observa que el ángulo que **R** forma con la horizontal es $30° + \alpha = 30° + 25.2° = 55.2°$. Por tanto, la resultante de **A** y **B** es



Respuesta

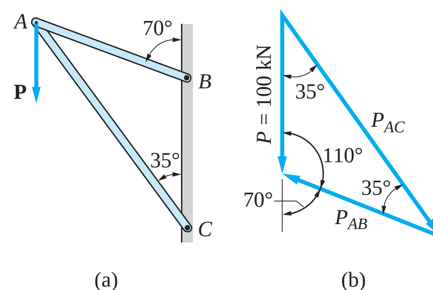
Parte 2

En la solución gráfica, la figura (b) se traza a escala con ayuda de una regla y un transportador. Primero trazamos el vector **A** a 30° con respecto a la horizontal y después agregamos el vector **B** a 70° con respecto a la horizontal. Luego la resultante **R** se obtiene trazando una línea desde la cola de **A** hasta la cabeza de **B**. Ahora se puede medir directamente en la figura la magnitud de **R** y el ángulo que forma con la horizontal.

Por supuesto, los resultados no serán tan precisos como los obtenidos en la solución analítica. Si se tiene cuidado al elaborar el dibujo, la mejor precisión que se puede esperar es de dos cifras. En este problema debemos obtener $R \approx 150$ pies, inclinada a 55° con respecto a la horizontal.

Problema de ejemplo 1.5

La fuerza vertical **P** de magnitud 100 kN se aplica al marco que se muestra en la figura (a). Resuelva **P** en componentes que sean paralelas a los miembros *AB* y *AC* de la armadura.



Solución

El triángulo de fuerzas en la figura (b) representa la suma vectorial $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{AC} + \mathbf{P}_{AB}$. Los ángulos en la figura se dedujeron de las inclinaciones de *AC* y *AB* con la vertical: $\mathbf{P}_{AC}$ está inclinada a 35° (paralela a *AC*) y $\mathbf{P}_{AB}$ está inclinada a 70° (paralela a *AB*). Aplicando la ley de los senos al triángulo, se obtiene

$$\frac{100}{\text{sen } 35°} = \frac{P_{AB}}{\text{sen } 35°} = \frac{P_{AC}}{\text{sen } 110°}$$

lo que da las magnitudes de las componentes

$$P_{AB} = 100.0 \text{ kN} \qquad P_{BC} = 163.8 \text{ kN}$$ *Respuesta*

Problemas

Resuelva los problemas de este grupo de manera analítica, a menos que su maestro le especifique una solución gráfica.

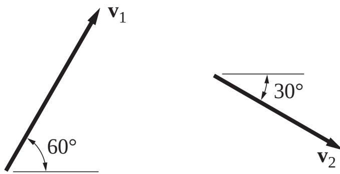


Fig. P1.22, P1.23

1.22 Las magnitudes de dos vectores son $v_1 = 3$ m/s y $v_2 = 2$ m/s. Determine su resultante $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

1.23 Determine las magnitudes de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tal que su resultante sea un vector horizontal de magnitud 4 m/s dirigida hacia la derecha.

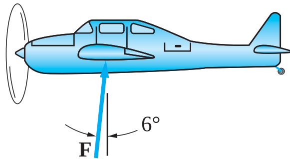


Fig. P1.24

1.24 La fuerza aerodinámica total **F** que actúa sobre el avión tiene una magnitud de 6250 lb. Resuelva esta fuerza en componentes vertical y horizontal (denominadas sustentación y resistencia al avance, respectivamente).

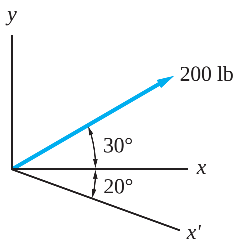


Fig. P1.25

1.25 Resuelva la fuerza de 200 lb en componentes a lo largo: (a) de los ejes x y y y (b) de los ejes x' y y.

1.26 El vector velocidad del bote tiene dos componentes: $\mathbf{v}_1$ es la velocidad del agua y $\mathbf{v}_2$ es la velocidad del bote relativa al agua. Si $v_1 = 3$ mi/h y $v_2 = 5$ mi/h, determine el vector velocidad del bote.

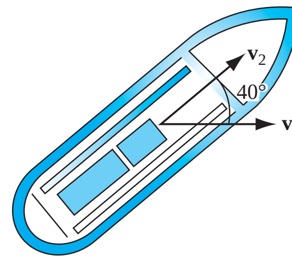


Fig. P1.26

1.27 Dos remolcadores aplican las fuerzas **P** y **Q** a la barcaza, donde $P = 76$ kN y $Q = 52$ kN. Determine la resultante de **P** y **Q**.

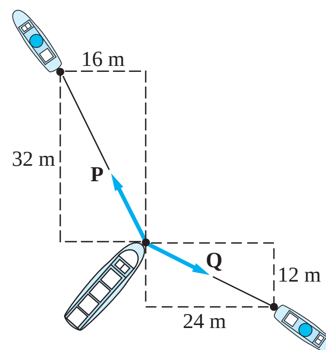


Fig. 1.27

1.28 Un peso de 500 N está soportado por dos cables, las fuerzas en los cables son $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Si se sabe que la resultante de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ es una fuerza de magnitud 500 N que actúa en la dirección *y*, determine F_1 y F_2.

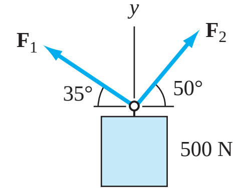


Fig. P1.28

1.29 Determine la resultante de los vectores posición **A** y **B**.

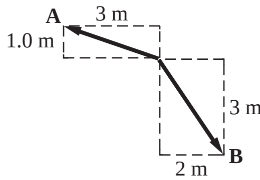


Fig. P1.29

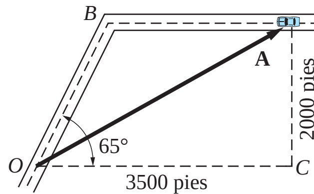


Fig. P1.30

1.30 Resuelva el vector posición **A** del automóvil (medido desde el punto fijo *O*) en componentes paralelas a *OB* y *OC*.

1.31 Resuelva la fuerza de 360 lb en componentes a lo largo de los cables *AB* y *AC*. Utilice $\alpha = 55°$ y $\beta = 30°$.

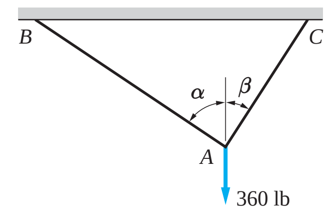


Fig. P1.31, P1.32

1.32 Los cables de soporte *AB* y *AC* están orientados de manera que las componentes de la fuerza de 360 lb a lo largo de *AB* y *AC* son 185 lb y 200 lb, respectivamente. Determine los ángulos α y β.

1.33 Las dos fuerzas que se muestran actúan sobre el miembro estructural *AB*. Determine la magnitud de **P** tal que la resultante de estas fuerzas esté dirigida a lo largo de *AB*.

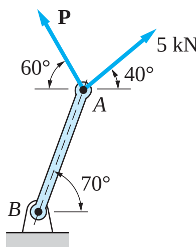


Fig. P1.33

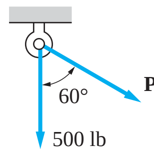


Fig. P1.34

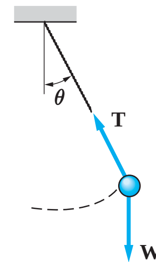


Fig. P1.35

1.34 La resultante de las dos fuerzas tiene una magnitud de 650 lb. Determine la dirección de la resultante y la magnitud de **P**.

1.35 Las fuerzas que actúan sobre la plomada del péndulo son su peso **W** (W = 2 lb) y la tensión **T** en la cuerda. Cuando el péndulo alcanza el límite de su oscilación en $\theta = 30°$, se puede demostrar que la resultante de **W** y **T** es perpendicular a la cuerda. Determine la magnitud de **T** en esta posición.

1.36 Un topógrafo visualiza un objetivo en *C* desde los puntos *A* y *B*; registra los ángulos que se muestran. Determine las magnitudes de los vectores posición **a** y **b**.

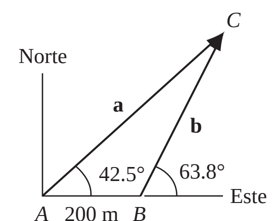


Fig. P1.36

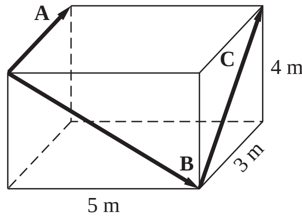


Fig. P1.37

1.37 Determine las resultantes siguientes de los vectores posición dados en la figura y muéstrelas en un bosquejo de la "caja": (a) **A** + **B** y (b) **B** + **C**.

***1.38** Para mover el barril de petróleo, la resultante de las tres fuerzas que se muestran debe tener una magnitud de 500 N. Determine la magnitud y dirección de la fuerza **F** *mínima* que ocasionaría que se mueva el barril.

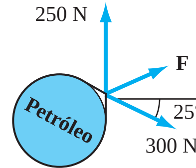


Fig. P1.38

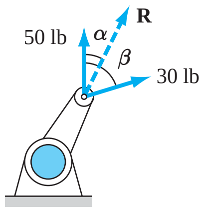


Fig. P1.39

1.39 La resultante de las fuerzas de 50 y 30 lb es **R**. Si $R = 65$ lb, determine los ángulos α y β.

1.4 Representación de vectores utilizando componentes rectangulares

Las propiedades fundamentales de los vectores analizadas en la sección anterior son independientes de los sistemas coordenados. Sin embargo, en aplicaciones ingenieriles, se acostumbra describir los vectores empleando sus componentes rectangulares y después realizar las operaciones vectoriales, como la suma, en términos de estas componentes.

a. Componentes rectangulares y cosenos directores

El marco de referencia que se utiliza en todo este libro se muestra en la figura 1.6(a). Es un sistema coordenado cartesiano rectangular de mano derecha. Para comprobar la alineación, curve los dedos de su mano derecha y extienda su dedo pulgar, como se muestra en la figura. Ahora los ejes coordenados deben estar alineados con su

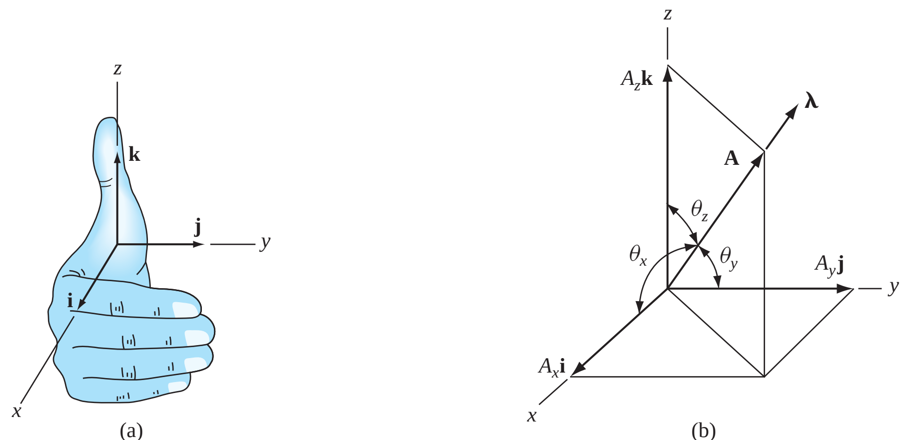


Fig. 1.6

mano como sigue: la palma está paralela a la dirección x, los dedos apuntan en la dirección y y el dedo pulgar se encuentra en la dirección z. En la figura 1.6(a) también se muestran los *vectores base* **i**, **j** y **k** del sistema coordenado, que son vectores adimensionales de magnitud unitaria dirigidos en las direcciones coordenadas positivas.

Si un vector **A** se resuelve en sus componentes rectangulares, como se ilustra en la figura 1.6(b), se puede escribir como

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \tag{1.5}$$

donde $A_x\mathbf{i}$, $A_y\mathbf{j}$ y $A_z\mathbf{k}$ son las *componentes vectoriales* de **A**. Las *componentes escalares* de **A** son

$$A_x = A\cos\theta_x \qquad A_y = A\cos\theta_y \qquad A_z = A\cos\theta_z \tag{1.6}$$

donde θ_x, θ_y y θ_z son los ángulos entre **A** y los ejes coordenados positivos. Las componentes escalares pueden ser positivas o negativas, dependiendo de si la componente vectorial correspondiente apunta en la dirección coordenada positiva o negativa. La magnitud de **A** está relacionada con sus componentes escalares mediante

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.7}$$

La dirección de **A** se acostumbra especificarla por sus *cosenos directores* definidos como

$$\lambda_x = \cos\theta_x \qquad \lambda_y = \cos\theta_y \qquad \lambda_z = \cos\theta_z \tag{1.8}$$

Ahora las componentes escalares de **A** en la ecuación (1.6) son $A_x = A\lambda_x$, $A_y = A\lambda_y$ y $A_z = A\lambda_z$, por lo que la ecuación (1.5) adopta la forma

$$\mathbf{A} = A(\lambda_x\mathbf{i} + \lambda_y\mathbf{j} + \lambda_z\mathbf{k}) = A\boldsymbol{\lambda} \tag{1.9}$$

donde

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_x\mathbf{i} + \lambda_y\mathbf{j} + \lambda_z\mathbf{k} \tag{1.10}$$

es un vector unitario en la dirección de **A**, como se muestra en la figura 1.6(b). Dado que la magnitud de $\boldsymbol{\lambda}$ es uno, sus componentes satisfacen la identidad

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \tag{1.11}$$

b. Suma de vectores empleando componentes rectangulares

Considere los dos vectores $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$. Designando a **C** como la suma de **A** y **B**, se tiene

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$$

que se puede escribir igual a

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} + C_z\mathbf{k}\\ &= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{1.12}$$

Agrupando componentes iguales, se obtiene que las componentes rectangulares de **C** son

$$C_x = A_x + B_x \qquad C_y = A_y + B_y \qquad C_z = A_z + B_z \tag{1.13}$$

Las ecuaciones (1.13) muestran que cada componente de la suma es igual a la suma de las componentes. Este resultado se representa en la figura 1.7, donde, sólo por simplicidad, el plano *xy* se eligió como un plano que contiene los vectores **A** y **B**. Las ecuaciones (1.12) y (1.13) se pueden, por supuesto, ampliar para incluir la suma de cualquier número de vectores.

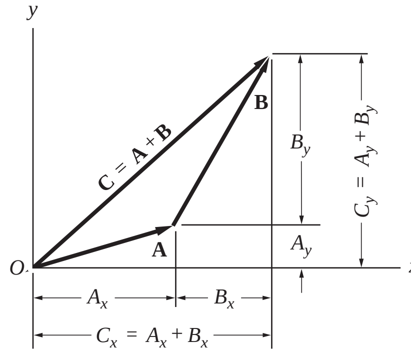


Fig. 1.7

c. Vectores de posición relativa

El vector trazado desde el origen *O* de un sistema coordenado hasta el punto *B*, denotado por $\overrightarrow{OB}$, se denomina *vector posición de B*. El vector $\overrightarrow{AB}$, trazado desde el punto *A* hasta el punto *B*, se denomina *vector posición de B relativo a A*. (Observe que el vector posición de *B* relativo a *A* es el negativo del vector posición de *A* relativo a *B*; es decir, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.)

En la figura 1.8 se muestra el vector de posición relativa $\overrightarrow{AB}$: el vector trazado desde $A(x_A, y_A, z_A)$ hasta $B(x_B, y_B, z_B)$. La representación rectangular de este vector es

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k} \tag{1.14}$$

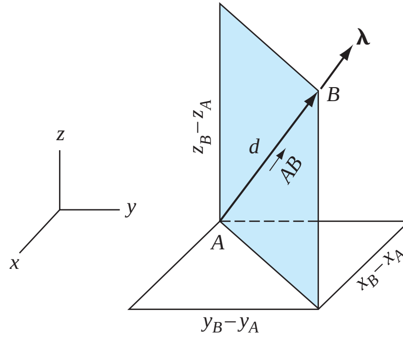


Fig. 1.8

La magnitud de $\overrightarrow{AB}$ (la distancia d en la figura 1.8) es

$$|\overrightarrow{AB}| = d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \qquad (1.15)$$

El vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ en la dirección de $\overrightarrow{AB}$ se puede determinar dividiendo el vector $\overrightarrow{AB}$ entre su magnitud:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}{d} \qquad (1.16)$$

Por tanto, las componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ son

$$\lambda_x = \frac{x_B - x_A}{d} \quad \lambda_y = \frac{y_B - y_A}{d} \quad \lambda_z = \frac{z_B - z_A}{d} \qquad (1.17)$$

d. Cómo formular un vector en forma rectangular

En estática con frecuencia se encuentra el problema siguiente: dada la magnitud de un vector y dos puntos de su línea de acción, determine la representación rectangular del vector. En la figura 1.9 se muestra un vector **F** que actúa a lo largo de la línea AB. Suponga que la magnitud de **F** y las coordenadas de A y B se conocen y que se quiere escribir el vector **F** en la forma rectangular $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$. El procedimiento recomendado es:

1. Escriba el vector de posición relativa $\overrightarrow{AB}$. Las componentes rectangulares de $\overrightarrow{AB}$ se pueden obtener inspeccionando un bosquejo similar a la figura 1.9 o bien sustituyendo las coordenadas de los puntos A y B en la ecuación (1.14).
2. Evalúe el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}|$.
3. Escriba **F** en la forma rectangular

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F(\lambda_x\mathbf{i} + \lambda_y\mathbf{j} + \lambda_z\mathbf{k}) \qquad (1.18)$$

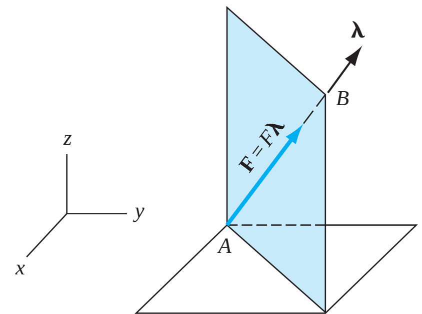
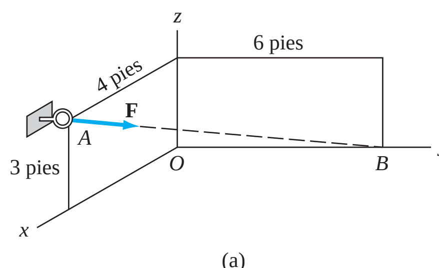


Fig. 1.9

Problema de ejemplo **1.6**

El cable colocado en la armella en la figura (a) se tensiona con la fuerza **F** de magnitud 500 lb. Determine la representación rectangular de esta fuerza.



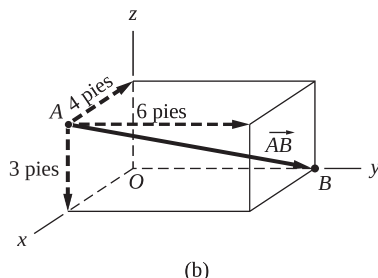
(a)

Solución

Debido a que las coordenadas de los puntos *A* y *B* en la línea de acción de **F** se conocen, el siguiente es un método conveniente para obtener la representación rectangular de **F**.

1. Escriba $\overrightarrow{AB}$, el vector desde *A* hasta *B*, en forma rectangular.

El vector $\overrightarrow{AB}$ y sus componentes rectangulares se muestran en la figura (b). Dos errores comunes que cometen los estudiantes en este punto son elegir los signos equivocados y mezclar los componentes escalares. Estas dificultades se pueden evitar tomando un momento para mostrar el vector en un bosquejo hecho con cuidado del paralelepípedo apropiado. De la figura (b) se observa que



(b)

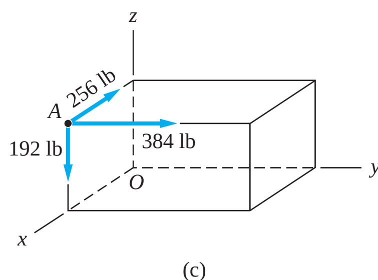
$$\overrightarrow{AB} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \text{ pies}$$

2. Evalúe $\boldsymbol{\lambda}$, el vector unitario desde *A* hacia *B*:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-3)^2}}$$

$$= -0.5122\mathbf{i} + 0.7682\mathbf{j} - 0.3841\mathbf{k}$$

3. Escriba $\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda}$:



(c)

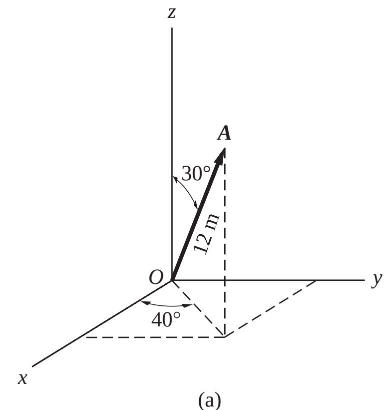
$$\mathbf{F} = 500(-0.5122\mathbf{i} + 0.7682\mathbf{j} - 0.3841\mathbf{k})$$

$$= -256\mathbf{i} + 384\mathbf{j} - 192\mathbf{k} \text{ lb}$$ *Respuesta*

Las componentes rectangulares de **F** se muestran en la figura (c).

Problema de ejemplo 1.7

Con referencia a la figura (a), determine: 1. la representación rectangular del vector posición **A** y 2. los ángulos entre **A** y cada uno de los ejes coordenados positivos.



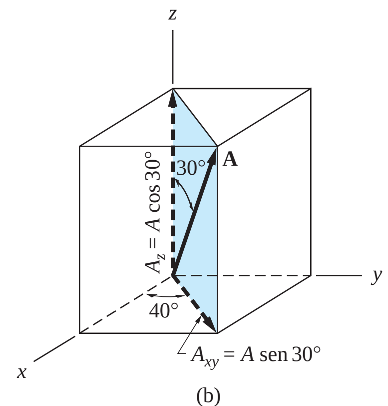
(a)

Solución

Parte 1

Primero se descompone **A** en dos componentes, como se muestra en la figura (b): A_z a lo largo del eje z y A_{xy} en el plano xy. (Una vez más se observa que un bosquejo hecho con cuidado es una ayuda esencial al realizar la descomposición vectorial.) Como **A**, A_z y A_{xy} se encuentran en el mismo plano (un plano diagonal del paralelepípedo), por trigonometría se obtiene

$$A_z = A\cos 30° = 12\cos 30° = 10.392\text{ m}$$
$$A_{xy} = A\,\text{sen}\,30° = 12\,\text{sen}\,30° = 6\text{ m}$$



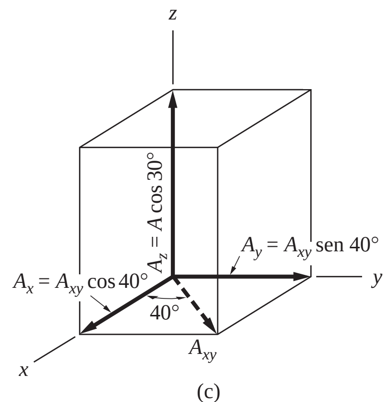
(b)

El paso siguiente, ilustrado en la figura (c), es descomponer A_{xy} en las componentes a lo largo de los ejes coordenados:

$$A_x = A_{xy}\cos 40° = 6\cos 40° = 4.596\text{ m}$$
$$A_y = A_{xy}\,\text{sen}\,40° = 6\,\text{sen}\,40° = 3.857\text{ m}$$

Por tanto, la representación rectangular de **A** es

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} = 4.60\mathbf{i} + 3.86\mathbf{j} + 10.39\mathbf{k}\text{ m}$$ *Respuesta*



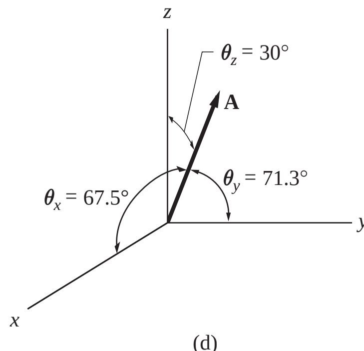
(c)

Parte 2

Los ángulos entre **A** y los ejes coordenados se pueden calcular a partir de las ecuaciones (1.6):

$$\theta_x = \cos^{-1}\frac{A_x}{A} = \cos^{-1}\frac{4.596}{12} = 67.5°$$
$$\theta_y = \cos^{-1}\frac{A_y}{A} = \cos^{-1}\frac{3.857}{12} = 71.3°$$ *Respuesta*
$$\theta_z = \cos^{-1}\frac{A_z}{A} = \cos^{-1}\frac{10.392}{12} = 30.0°$$

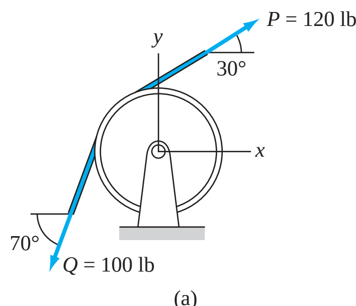
Estos ángulos se muestran en la figura (d). Observe que no fue necesario calcular θ_z, debido a que ya estaba dada en la figura (a).



(d)

Problema de ejemplo 1.8

La polea que se muestra en la figura (a) se somete a las fuerzas **P** y **Q** de la banda. Utilizando componentes rectangulares, determine la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

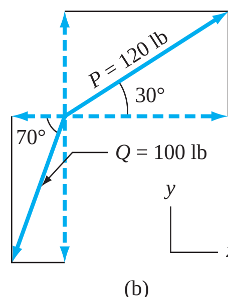


(a)

Solución

Con referencia a la figura (b), las representaciones rectangulares de **P** y **Q** son

$$\mathbf{P} = 120\cos 30°\mathbf{i} + 120 \operatorname{sen} 30°\mathbf{j} = 103.9\mathbf{i} + 60.0\mathbf{j} \text{ lb}$$
$$\mathbf{Q} = -100\cos 70°\mathbf{i} - 100 \operatorname{sen} 70°\mathbf{j} = -34.2\mathbf{i} - 94.0\mathbf{j} \text{ lb}$$

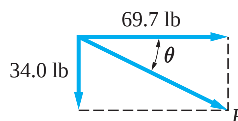


(b)

La resultante de **P** y **Q** se calcula sumando sus componentes:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} = (103.9 - 34.2)\mathbf{i} + (60.0 - 94.0)\mathbf{j}$$
$$= 69.7\mathbf{i} - 34.0\mathbf{j} \text{ lb}$$

Al calcular de la magnitud y la dirección de **R**, se obtiene



Respuesta

$$R = \sqrt{34.0^2 + 69.7^2} = 77.6 \text{ lb} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{34.0}{69.7} = 26.0°$$

Problemas

1.40 Obtenga la representación rectangular de la fuerza **P**, dada su magnitud de 30 lb.

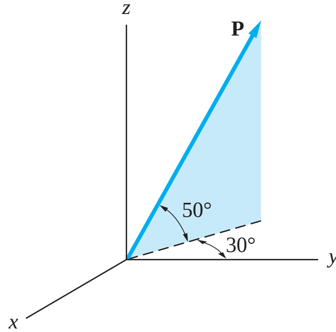


Fig. P1.40

1.41 La longitud del vector posición **r** es 240 mm. Determine las componentes rectangulares de (a) **r** y (b) el vector unitario dirigido desde *O* hacia *A*.

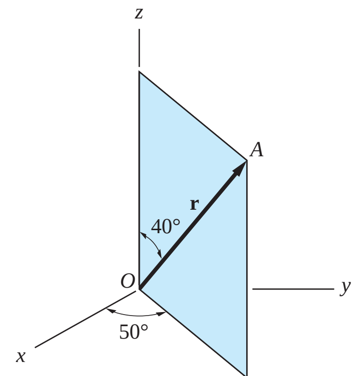


Fig. P1.41

1.42 (a) Calcule el ángulo θ_z entre el vector fuerza **F** y el eje. *z* (b) Determine la representación rectangular de **F** dado que $F = 240$ N.

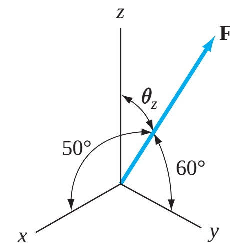


Fig. P1.42

1.43 Las coordenadas de los puntos *A* y *B* son (−3, 0, 2) y (4, 1, 7) pies, respectivamente. Determine: (a) la distancia entre *A* y *B* y (b) la representación rectangular del vector unitario dirigido desde *A* hacia *B*.

1.44 La corredera se mueve a lo largo de la barra guía *AB* con una velocidad de $v = 6$ m/s. Determine las representaciones rectangulares de (a) el vector unitario dirigido desde *A* hacia *B* y (b) el vector velocidad **v**.

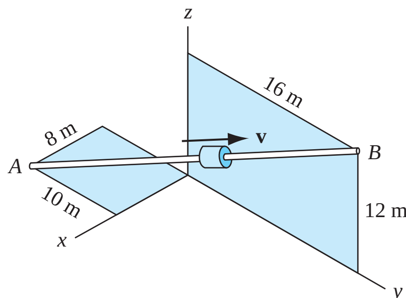


Fig. P1.44

1.45 Encuentre la representación rectangular de la fuerza **F**, dado que su magnitud es 240 N.

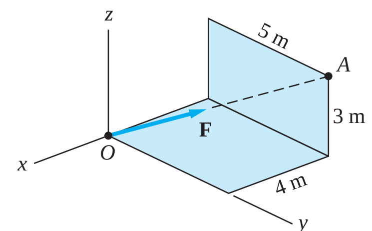


Fig. P1.45

1.46 La magnitud de la fuerza **F** es 120 lb. Encuentre su representación rectangular.

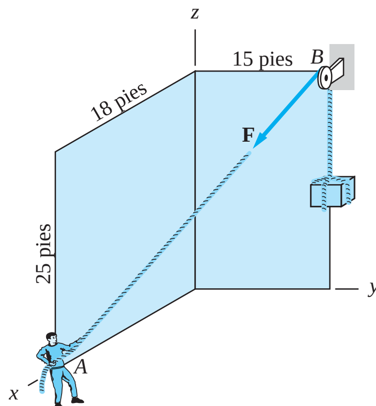


Fig. P1.46

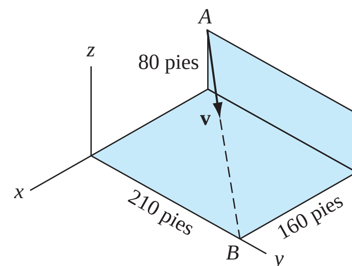


Fig. P1.47

1.47 Un rifle en A dispara hacia un objetivo en B. Si la velocidad de la bala es 1800 pies/s, determine la forma rectangular del vector velocidad **v**.

1.48 Determine los ángulos entre la fuerza $\mathbf{F} = 1200\mathbf{i} + 800\mathbf{j} - 1500\mathbf{k}$ N y los ejes x, y y z. Muestre sus resultados en un bosquejo del sistema coordenado.

1.49 Determine la resultante de las dos fuerzas, cada una con magnitud P.

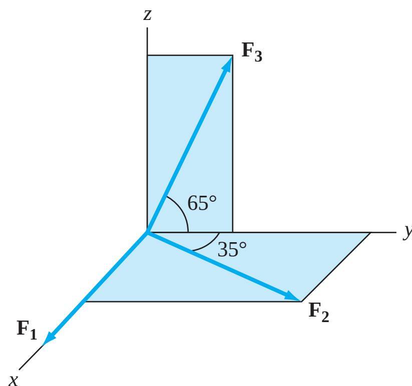


Fig. P1.51

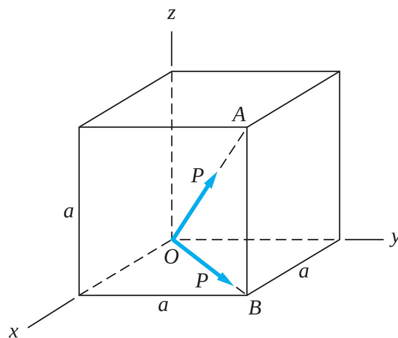


Fig. P1.49

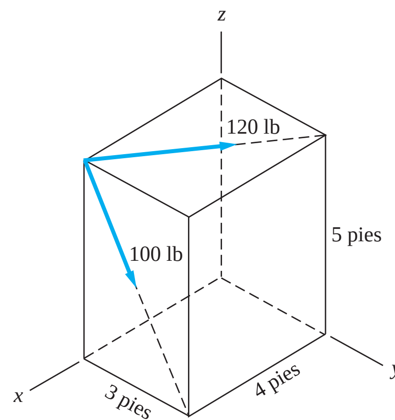


Fig. P1.50

1.50 Determine la resultante de las dos fuerzas que se muestran en la figura.

1.51 Las magnitudes de las tres fuerzas son $F_1 = 1.6$ kN, $F_2 = 1.2$ kN y $F_3 = 1.0$ kN. Calcule su resultante en la forma: (a) $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ y (b) $\mathbf{R} = R\lambda$.

1.52 Dadas $P = 120$ lb y $Q = 130$ lb, encuentre la representación rectangular de $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$.

1.53 Si sabe que $P = 120$ lb y que la resultante de **P** y **Q** se encuentra en la dirección x positiva, determine Q y la magnitud de la resultante.

1.54 Si **R** es la resultante de las fuerzas **P** y **Q**, determine P y Q.

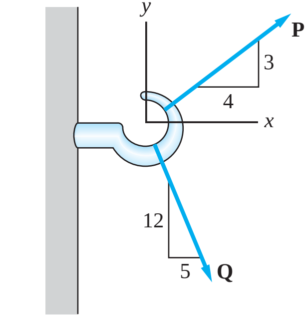


Fig. P1.52, P1.53

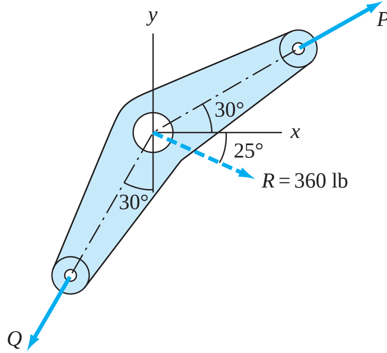


Fig. P1.54

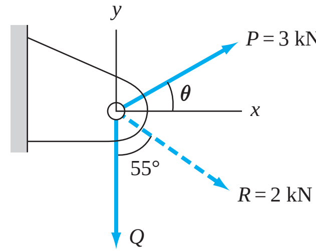


Fig. P1.55

1.55 La fuerza **R** es la resultante de **P** y **Q**. Determine Q y el ángulo θ.

1.56 El poste vertical está asegurado por tres cables. Los cables están pretensados de modo que la resultante de las fuerzas de los cables **F**, **Q** y **P** está dirigida a lo largo del eje z. Si $F = 120$ lb, encuentre P y Q.

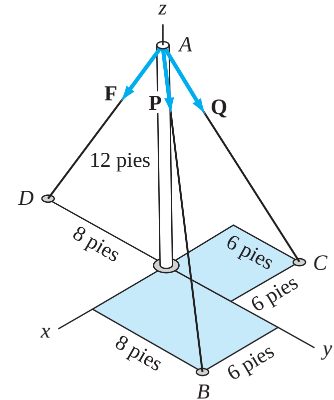


Fig. P1.56

1.5 Multiplicación de vectores*

a. Producto punto (escalar)

En la figura 1.10 se muestran dos vectores **A** y **B** con el ángulo θ entre sus direcciones positivas. El *producto punto* de **A** y **B** se define como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 180°) \tag{1.19}$$

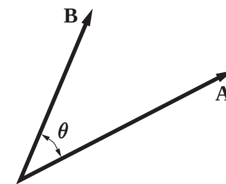


Fig. 1.10

Dado que el producto punto es un escalar, también se denomina *producto escalar*. Observe que el producto punto es positivo si $\theta < 90°$, negativo si $\theta > 90°$ y cero si $\theta = 90°$.

Las dos propiedades siguientes del producto punto se deducen de su definición en la ecuación (1.19).

- El producto punto es conmutativo: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- El producto punto es distributivo: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

*Observe que la división entre un vector, como 1/**A** o **B**/**A**, no está definida.

De la definición del producto punto, también observe que los vectores base de un sistema coordenado rectangular satisfacen las identidades siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} &= \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1\\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} &= \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0\end{aligned} \tag{1.20}$$

Cuando **A** y **B** se expresan en forma rectangular, su producto punto adopta la forma

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})$$

lo que, aplicando la propiedad distributiva del producto punto y las ecuaciones (1.20), se reduce a

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1.21}$$

La ecuación (1.21) es un método poderoso y relativamente simple para calcular el producto punto de dos vectores que se encuentran en forma rectangular.

Las siguientes son dos de las aplicaciones más importantes del producto punto.

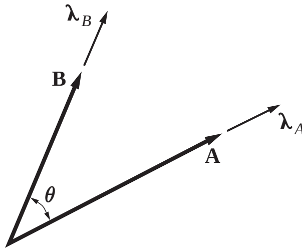


Fig. 1.11

Determinación del ángulo entre dos vectores El ángulo θ entre los dos vectores **A** y **B** en la figura 1.11 se puede determinar a partir de la definición del producto punto en la ecuación (1.19), que se puede reescribir como

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}=\frac{\mathbf{A}}{A}\cdot\frac{\mathbf{B}}{B}$$

Si $\lambda_A=\mathbf{A}/A$ y $\lambda_B=\mathbf{B}/B$ son los vectores unitarios que tienen las mismas direcciones que **A** y **B**, como se muestra en la figura 1.11, la última ecuación toma la forma

$$\cos\theta=\lambda_A\cdot\lambda_B \tag{1.22}$$

Si los vectores unitarios se escriben en forma rectangular, este producto punto se evalúa fácilmente con la ecuación (1.21).

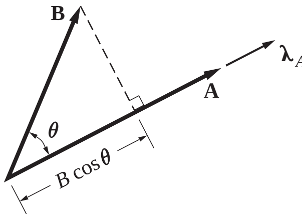


Fig. 1.12

Determinación de la componente ortogonal de un vector en una dirección dada Si se proyecta **B** sobre **A** como en la figura 1.12, la longitud proyectada $B\cos\theta$ se denomina *componente ortogonal de* **B** *en la dirección de* **A**. Dado que θ es el ángulo entre **A** y **B**, la definición del producto punto, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta$, da

$$B\cos\theta=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{A}=\mathbf{B}\cdot\frac{\mathbf{A}}{A}$$

Como $\mathbf{A}/A=\boldsymbol{\lambda}_A$ (el vector unitario en la dirección de **A**), como se muestra en la figura 1.12, la última ecuación se transforma en

$$B\cos\theta=\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\lambda}_A \tag{1.23}$$

Por tanto,

La componente ortogonal de **B** en la dirección de **A** es igual a $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\lambda}_A$. (1.24)

b. Producto cruz (vectorial)

El *producto cruz* **C** de dos vectores **A** y **B**, denotado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

tiene las características siguientes (consulte la figura 1.13):

- La magnitud de **C** es

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \qquad (1.25)$$

  donde θ ($0 \leq \theta \leq 180°$) es el ángulo entre las direcciones positivas de **A** y **B**. (Observe que C siempre es un número positivo.)
- **C** es perpendicular a **A** y **B**.
- El sentido de **C** se determina por la regla de la mano derecha, que establece que cuando los dedos de su mano derecha se enrollan en la dirección del ángulo θ (dirigido de **A** hacia **B**), su dedo pulgar apunta en la dirección de **C**.*

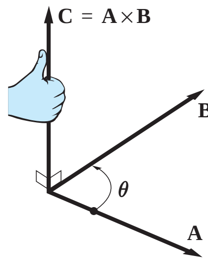


Fig. 1.13

El producto cruz de dos vectores también se denomina *producto vectorial*.

Se puede demostrar que el producto cruz es distributivo; es decir,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

Sin embargo, el producto cruz no es asociativo ni conmutativo. En otras palabras,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

De hecho, se puede deducir de la regla de la mano derecha que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

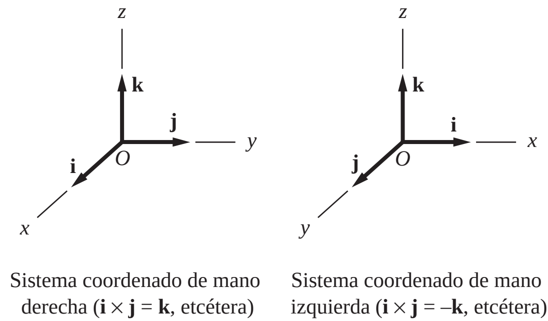
De la definición del producto cruz $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, se observa que: 1. si **A** y **B** son perpendiculares ($\theta = 90°$), entonces $C = AB$ y 2. si **A** y **B** son paralelos ($\theta = 0°$ o $180°$), entonces $C = 0$.

*Un enunciado alternativo de la regla de la mano derecha es: la dirección de **C** es la dirección en que un tornillo derecho avanza cuando se gira en la dirección de θ (dirigido de **A** hacia **B**).

De las propiedades del producto cruz, se deduce que los vectores base de un sistema coordenado rectangular satisfacen las identidades siguientes:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \end{array} \tag{1.26}$$

donde las ecuaciones en la fila inferior ahora son válidas en un sistema coordenado de *mano derecha*. Si los ejes coordenados se identifican tal que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{i}$ y $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j}$, se dice que el sistema es de *mano izquierda*. En la figura 1.14* se dan ejemplos de sistemas coordenados de mano derecha e izquierda.



Sistema coordenado de mano derecha ($\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, etcétera)

Sistema coordenado de mano izquierda ($\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$, etcétera)

Fig. 1.14

Cuando **A** y **B** se expresan en forma rectangular, su producto cruz es

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$$

Utilizando la propiedad distributiva del producto cruz y las ecuaciones (1.26), esta ecuación se vuelve

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} \\ &\quad - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} \\ &\quad + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Se obtiene una expresión idéntica cuando las reglas para desarrollar un determinante de 3 × 3 se aplican al arreglo siguiente de nueve términos (debido a que no todos éstos son escalares, el arreglo no es un determinante verdadero):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.28}$$

*En este libro se supone que todos los sistemas coordenados rectangulares son de mano derecha.

Usted puede emplear cualquier método para el desarrollo de los determinantes, pero encontrará que la técnica siguiente, denominada *desarrollo por menores utilizando la primera fila*, es muy conveniente.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$
$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Al desarrollar la ecuación (1.28) mediante este método, se tiene que los determinantes de 2×2 son iguales a las componentes **i**, **j** y **k** del producto cruz.

c. *Triple producto escalar*

De los productos vectoriales que comprenden tres o más vectores, el que es más útil en estática es el triple producto escalar. El *triple producto escalar* se origina cuando el producto cruz de dos vectores se multiplica escalarmente con un tercer vector, por ejemplo, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$. Al escribir este producto no es necesario mostrar el paréntesis ya que $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sólo se puede interpretar de una manera, el producto cruz se debe efectuar primero; de lo contrario la expresión no tiene sentido.

Suponiendo que **A**, **B** y **C** se expresan en forma rectangular y recordando la ecuación (1.27), el triple producto escalar adopta la forma

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \big[(A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}\big] \cdot (C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} + C_z\mathbf{k})$$

Empleando la ecuación (1.21) y las propiedades del producto punto de los vectores base rectangulares, esta expresión se simplifica a

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (A_y B_z - A_z B_y)C_x - (A_x B_z - A_z B_x)C_y + (A_x B_y - A_y B_x)C_z \quad (1.29)$$

Por tanto, el triple producto escalar se puede escribir en la siguiente forma de determinante, que es fácil de recordar:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1.30)$$

Las identidades siguientes relativas al triple producto escalar son útiles:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.31)$$

Observe que el valor del triple producto escalar no se altera si se intercambian las ubicaciones del punto y cruz o si se cambian las posiciones de **A**, **B** y **C**, siempre que se mantenga el orden cíclico *A*-*B*-*C*.

Problema de ejemplo **1.9**

Dados los vectores

$$\mathbf{A} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \text{ lb}$$
$$\mathbf{B} = 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \text{ pies}$$
$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \text{ pies}$$

calcule lo siguiente: 1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; 2. la componente ortogonal de $\mathbf{B}$ en la dirección de $\mathbf{C}$; 3. el ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$; 4. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; 5. un vector unitario λ que es perpendicular a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y 6. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

Solución

Parte 1

De la ecuación (1.21), el producto punto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 8(0) + 4(2) + (-2)(6)$$
$$= -4 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textit{Respuesta}$$

El signo negativo indica que el ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es mayor que 90°.

Parte 2

Si θ es el ángulo entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, de la ecuación (1.23) se obtiene

$$B\cos\theta = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}_C = \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{C}}{C} = (2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \cdot \frac{3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}}$$
$$= \frac{(0)(3) + (2)(-2) + (6)(4)}{\sqrt{29}} = 3.71 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 3

Si α es el ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, de la ecuación (1.22) se obtiene

$$\cos\alpha = \lambda_A \cdot \lambda_C = \frac{\mathbf{A}}{A} \cdot \frac{\mathbf{C}}{C}$$
$$= \frac{8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{8^2 + 4^2 + (-2)^2}} \cdot \frac{3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}}$$
$$= \frac{(8)(3) + (4)(-2) + (-2)(4)}{\sqrt{84}\,\sqrt{29}} = 0.162\,09$$

lo que da

$$\alpha = 80.7^\circ \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 4

Con referencia a la ecuación (1.28), el producto cruz de **A** y **B** es

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 28\mathbf{i} - 48\mathbf{j} + 16\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 5

El producto cruz $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a **A** y **B**. Por tanto, un vector unitario en esa dirección se obtiene dividiendo $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, que fue evaluado antes, entre su magnitud

$$\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \frac{28\mathbf{i} - 48\mathbf{j} + 16\mathbf{k}}{\sqrt{28^2 + (-48)^2 + 16^2}}$$

$$= 0.484\mathbf{i} - 0.830\mathbf{j} + 0.277\mathbf{k}$$

Como el negativo de este vector también es un vector unitario que es perpendicular a **A** y **B**, se obtiene

$$\boldsymbol{\lambda} = \pm(0.484\mathbf{i} - 0.830\mathbf{j} + 0.277\mathbf{k}) \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 6

El triple producto escalar $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ se evalúa con la ecuación (1.30)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 160 + 72 + 12 = 244 \text{ lb} \cdot \text{pie}^2 \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

1.57 Calcule el producto punto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ para cada uno de los casos siguientes. Identifique las unidades de cada producto.

(a) $\mathbf{A} = 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ pies $\quad \mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ pies
(b) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ m $\quad \mathbf{B} = 6\mathbf{i} - 13\mathbf{k}$ N
(c) $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$ m $\quad \mathbf{B} = -5\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ m

1.58 Calcule el producto cruz $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ para cada uno de los casos indicados en el problema 1.57. Identifique las unidades de cada producto.

1.59 Dados

$$\mathbf{r} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ m (vector posición)}$$
$$\mathbf{F} = 30\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \text{ N (vector fuerza)}$$
$$\lambda = 0.6\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k} \text{ ((vector unitario adimensional)}$$

calcule (a) $\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ y (b) $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$.

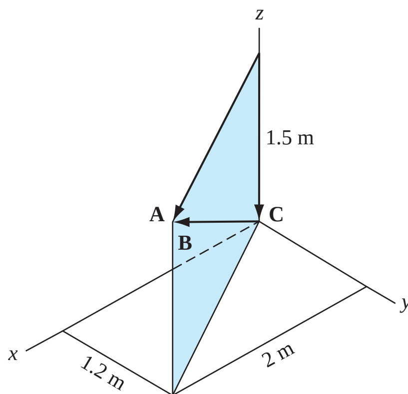


Fig. P1.60, P1.61

1.60 Calcule $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{C} \times \mathbf{B}$ para los vectores que se muestran en la figura.

1.61 Utilice el producto punto para encontrar el ángulo entre los vectores posición **A** y **B**. Verifique sus resultados por trigonometría.

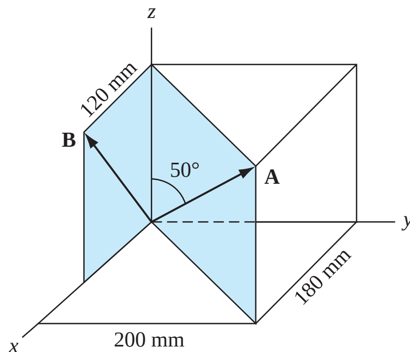


Fig. P1.62

1.62 Utilice el producto punto para encontrar el ángulo entre los vectores posición **A** y **B** que se muestran en la figura.

1.63 Si **A** y **B** son dos vectores no paralelos que se encuentran en un plano común S. Si $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, ¿cuál de los enunciados siguientes es válido: i. $\mathbf{C} = \mathbf{0}$; ii. **C** se encuentra en el plano S y iii. **C** es perpendicular al plano S?

1.64 Determine cuál de los vectores posición **B** siguientes es perpendicular a $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ m:

(a) $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ m
(b) $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ m
(c) $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ m
(d) $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ m

1.65 Encuentre un vector unitario que sea perpendicular a $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ pies y $\mathbf{B} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ pies.

1.66 Los tres puntos $A(0, -2, 2)$, $B(-1, 4, 1)$ y $C(3, 0, 0)$ definen un plano. Las coordenadas están en pulgadas. Determine un vector unitario que sea perpendicular a este plano.

1.67 Determine la componente ortogonal de $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ en la dirección del vector unitario λ donde $\mathbf{r} = 0.2\mathbf{i} + 0.3\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k}$ m, $\mathbf{F} = 300\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 50\mathbf{k}$ N y $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$

1.68 Calcule la componente ortogonal de $\mathbf{F} = 6\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ lb en la dirección del vector $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ pies.

1.69 Utilizando el producto punto, encuentre las componentes del vector velocidad $\mathbf{v} = 20\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ km/h en la dirección de los ejes x' y y'.

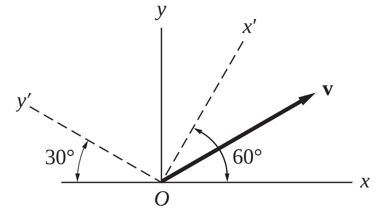


Fig. P1.69

***1.70** Descomponga $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ pulg en dos componentes vectoriales, una paralela a y la otra perpendicular a $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ pulg. Exprese cada una de sus respuestas como una magnitud multiplicada por un vector unitario.

1.71 Demuestre que la distancia más corta entre el punto P y la línea AB es $d = |\overrightarrow{AP} \times \boldsymbol{\lambda}_{AB}|$ donde $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ es un vector unitario en la dirección de la línea.

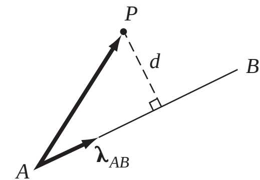


Fig. P1.71

1.72 Determine el valor del escalar a si los tres vectores siguientes tienen que encontrarse en el mismo plano: $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ m, $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ m y $\mathbf{C} = 16\mathbf{i} + 46\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ m.

***1.73** Descomponga la fuerza $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 50\mathbf{k}$ lb en dos componentes, una perpendicular al plano ABC y la otra en el plano ABC.

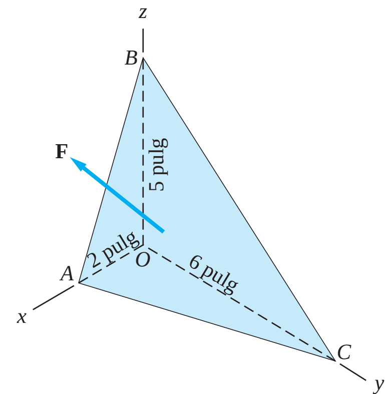


Fig. P1.73

1.74 Se puede demostrar que un área plana se puede representar por un vector $\mathbf{A} = A\boldsymbol{\lambda}$, donde A es el área y $\boldsymbol{\lambda}$ representa un vector unitario normal al plano del área. Demuestre que el vector área del paralelogramo formado por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que se muestran en la figura es $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

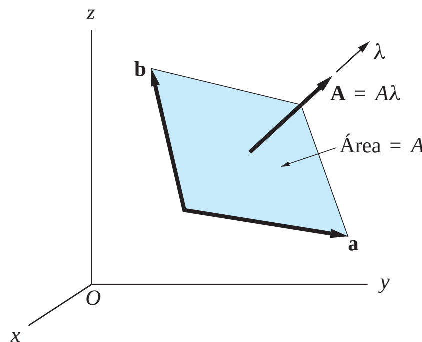


Fig. P1.74

1.75 Las coordenadas de las aristas de un triángulo ABC son $A(3, -1, 0)$, $B(-2, 2, 3)$ y $C(0, 0, 4)$. Las unidades son pulgadas. Calcule el área del triángulo ABC. (*Sugerencia:* consulte el problema 1.74.)

1.76 Demuestre que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$ es igual al volumen de un paralelepípedo que tiene bordes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. (*Sugerencia:* consulte el problema 1.74.)

Repaso de ecuaciones

Ley universal de la gravitación

$$F = Gm_A m_B/R^2$$
$$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$$
$$= 3.44 \times 10^{-8}\,\text{pie}^4/(\text{lb}\cdot\text{s}^4)$$

Componentes rectangulares de vectores

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$

Multiplicación de vectores

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\theta$$
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad |\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\,\text{sen}\,\theta$$
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

θ = ángulo entre **A** y **B**



2 Operaciones básicas con sistemas de fuerzas



Un concepto fundamental de la estática es la equivalencia de fuerzas. Por ejemplo, una fuerza simple puede producir el mismo efecto sobre la plataforma de perforación flotante que las dos fuerzas aplicadas por los remolcadores. La equivalencia de fuerzas es uno de los temas que se analizan en este capítulo. Don Farrall/Photodisc/Getty Images

2.1 Introducción

La utilidad del álgebra vectorial en problemas del mundo real se origina del hecho de que varias cantidades físicas encontradas comúnmente poseen propiedades de los vectores. Una de esas cantidades es la fuerza. Stevenius (1548-1620) demostró que ésta obedece la ley del paralelogramo o la suma.

En este capítulo se inicia el estudio de los efectos de fuerzas sobre partículas y cuerpos rígidos. En particular, aprenderemos cómo utilizar el álgebra vectorial para reducir sistemas de fuerzas a un sistema equivalente más simple. Si las fuerzas son *concurrentes* (todas ellas se intersecan en el mismo punto), se demostrará que el sistema equivalente es una sola fuerza. La reducción de un sistema de fuerzas no concurrentes requiere dos conceptos vectoriales adicionales: el momento de una fuerza y el par. En este capítulo se analizan los dos conceptos.

2.2 Equivalencia de fuerzas

Recordemos que los vectores son cantidades que tienen magnitud y dirección y que se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Se dice que dos vectores que tienen la misma magnitud y dirección son *iguales*.

En mecánica, el término *equivalencia* implica intercambio; dos vectores se consideran equivalentes si se pueden intercambiar sin cambiar el resultado del problema. La igualdad no siempre resulta en equivalencia. Por ejemplo, una fuerza aplicada a un cierto punto en un cuerpo no necesariamente produce el mismo efecto sobre el cuerpo que una fuerza igual actuando en un punto diferente.

Desde el punto de vista de la equivalencia, los vectores que representan cantidades físicas se clasifican en los tres tipos siguientes:

- *Vectores fijos:* vectores equivalentes que tienen la misma magnitud, dirección y punto de aplicación.
- *Vectores deslizantes:* vectores equivalentes que tienen la misma magnitud, dirección y línea de acción.
- *Vectores libres:* vectores equivalentes que tienen la misma magnitud y dirección.

Es posible que una cantidad física sea un tipo de vector, digamos, fijo, en una aplicación y otro tipo de vector, como deslizante, en otra aplicación. En el álgebra vectorial, repasada en el capítulo 1, todos los vectores se trataron como vectores libres.

2.3 Fuerza

Fuerza es el término asignado a la interacción mecánica entre cuerpos. Una fuerza puede afectar tanto el movimiento como la deformación del cuerpo sobre el que actúa. Las fuerzas se pueden originar del contacto directo entre cuerpos o se pueden aplicar a una distancia (como la atracción gravitacional). Las fuerzas de contacto se distribuyen sobre un área superficial del cuerpo, en tanto que las fuerzas que actúan a una distancia se distribuyen sobre el volumen del cuerpo.

En ocasiones el área sobre la que se aplica una fuerza de contacto es tan pequeña que se puede aproximar por un punto, caso en el cual se dice que la fuerza está *concentrada* en el punto de contacto. El punto de contacto también se denomina *punto de aplicación* de la fuerza. La *línea de acción* de una fuerza concentrada es la línea que pasa por el punto de aplicación y es paralela a la fuerza. En este capítulo sólo se consideran fuerzas concentradas; el análisis de las fuerzas distribuidas inicia en el capítulo siguiente.

La fuerza es un *vector fijo*, debido a que una de sus características (además de su magnitud y dirección) es su punto de aplicación. Como una prueba informal, considere las tres barras idénticas que se muestran en la figura 2.1, cada una cargada por dos fuerzas de magnitud P iguales pero opuestas. Si las fuerzas se aplican como se muestra en la figura 2.1(a), la barra está en tensión y su deformación es un alargamiento. Si se intercambian las fuerzas, como se observa en la figura 2.1(b), la barra se pone en compresión, lo que resulta en su acortamiento. Las cargas en la figura 2.1(c), donde las dos fuerzas actúan en el punto A, no producen deformación. Observe que las fuerzas en los tres casos tienen la misma línea de acción y la resultante es cero; sólo los puntos de aplicación son diferentes. Por tanto, se concluye que el punto de aplicación es una característica de una fuerza, en lo que se refiere a la deformación.

Sin embargo, si la barra es rígida (lo que significa que la deformación es despreciable), no habrá diferencias apreciables en el comportamiento de las tres barras en

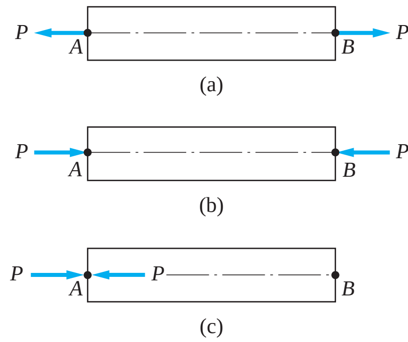


Fig. 2.1

la figura 2.1. En otras palabras, los *efectos externos** de las tres cargas son idénticos. Se deduce que si sólo se tiene interés en los efectos externos, una fuerza se puede tratar como un *vector deslizante*. La conclusión anterior se resume por el *principio de transmisibilidad*:

> Una fuerza puede desplazarse a cualquier punto de su línea de acción sin cambiar sus efectos externos sobre un cuerpo rígido.

Dos sistemas de fuerzas que producen los mismos efectos externos sobre un cuerpo rígido se dice que son *equivalentes*. (En ocasiones se utiliza el término *equivalente de cuerpo rígido*.)

En resumen, una fuerza es un vector fijo unido a un punto de aplicación, pero si sólo se tiene interés en su efecto externo sobre un cuerpo rígido, una fuerza se puede tratar como un vector deslizante.

Como ilustración adicional del principio de transmisibilidad, considere el bloque rígido que se muestra en la figura 2.2. El bloque está sometido a tres fuerzas **P**, **Q** y **S**, cada una con magnitud de 20 N. Las tres fuerzas son iguales en sentido matemático: $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \mathbf{S}$. Sin embargo, sólo **P** y **Q** producirán efectos externos idénticos ya que tienen la misma línea de acción. Dado que **S** tiene una línea de acción diferente, su efecto externo será diferente.

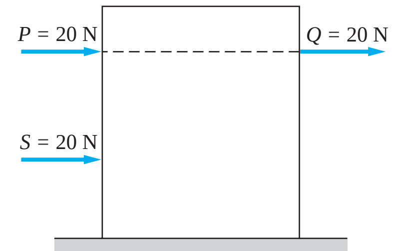


Fig. 2.2

2.4 Reducción de sistemas de fuerzas concurrentes

En esta sección se analiza el método para remplazar un sistema de fuerzas concurrentes por una sola fuerza equivalente.

Considere las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . que actúan sobre el cuerpo rígido en la figura 2.3(a) (por conveniencia, sólo se muestran tres fuerzas). Todas las fuerzas son concurrentes en el punto *O*. (Sus líneas de acción se intersecan en *O*.) Estas fuerzas se reducen a una sola equivalente mediante los dos pasos siguientes.

1. Mueva las fuerzas a lo largo de sus líneas de acción hasta el punto de concurrencia *O*, como se indica en la figura 2.3(b). De acuerdo con el principio de

*Los efectos externos que más nos interesan son el movimiento (o estado de reposo) del cuerpo y las reacciones en los soportes.

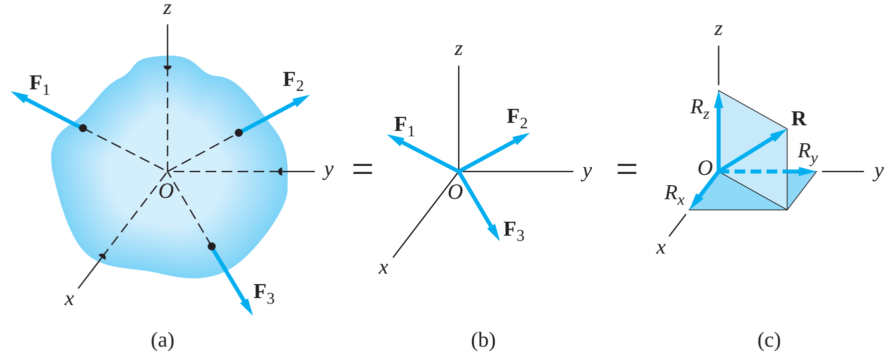


Fig. 2.3

transmisibilidad, esta operación no cambia los efectos externos sobre el cuerpo. Por tanto, los sistemas de fuerzas en las figuras 2.3(a) y (b) son equivalentes, lo que se indica mediante el signo de igual entre las figuras.

2. Con las fuerzas ahora en el punto común *O*, calcule su resultante **R** con la suma vectorial

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots \tag{2.1}$$

Esta resultante, que también es equivalente al sistema de fuerzas original, se muestra en la figura 2.3(c) junto con sus componentes rectangulares. Observe que la ecuación (2.1) determina sólo la magnitud y dirección de la resultante. La línea de acción de **R** debe pasar por el punto de concurrencia *O* a fin de que la equivalencia sea válida.

Al evaluar la ecuación (2.1), se puede utilizar cualquiera de los métodos gráficos o analíticos para la suma vectorial analizados en el capítulo 1. Si se eligen componentes rectangulares, las ecuaciones escalares equivalentes para determinar la fuerza resultante **R** son

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \tag{2.2}$$

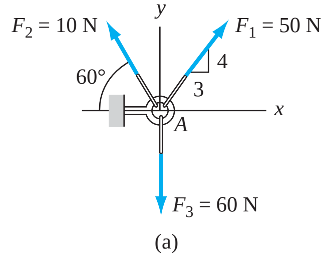
Así pues, se observa que se requieren tres ecuaciones escalares para determinar la fuerza resultante para un sistema de fuerzas concurrentes. Si las fuerzas originales se encuentran en un plano común, digamos, el plano *xy*, la ecuación $R_z = \Sigma F_z$ no proporciona información independiente y sólo las dos ecuaciones siguientes se necesitan para determinar la fuerza resultante.

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \tag{2.3}$$

Es necesario enfatizar que el método descrito aquí para determinar la fuerza resultante es válido sólo para fuerzas que sean concurrentes. Debido a que una fuerza está unida a su línea de acción, la reducción de sistemas de fuerzas no concurrentes requerirá conceptos adicionales, los cuales se analizan más adelante.

Problema de ejemplo 2.1

Determine la resultante de las tres fuerzas concurrentes que se muestran en la figura (a).

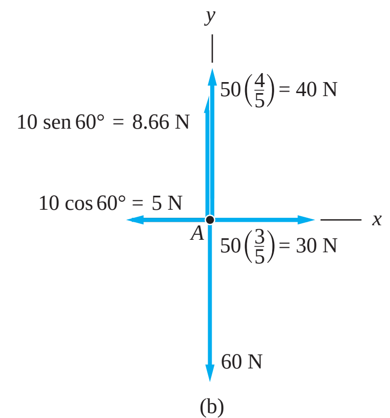


(a)

Solución

Dado que las tres fuerzas son concurrentes en el punto A, se pueden sumar de inmediato para obtener la fuerza resultante **R**.

Las componentes rectangulares de cada una de las tres fuerzas se muestran en la figura (b). Utilizando las ecuaciones (2.3) para determinar las componentes de la resultante, se tiene



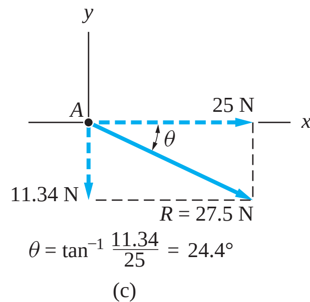
(b)

$$R_x = \Sigma F_x \quad \xrightarrow{+} \quad R_x = 30 - 5 = 25 \text{ N}$$

y

$$R_y = \Sigma F_y \quad +\!\uparrow \quad R_y = 40 + 8.66 - 60 = -11.34 \text{ N}$$

Los signos en estas ecuaciones indican que R_x actúa hacia la derecha y R_y actúa hacia abajo. La fuerza resultante **R** se muestra en la figura (c). Observe que la magnitud de la resultante es 27.5 N y que actúa a través del punto A (el punto original de concurrencia) a un ángulo de 24.4° como se muestra.



(c)

La solución anterior también se podría obtener utilizando notación vectorial. Las fuerzas primero se escribirían en forma vectorial como sigue:

$$\mathbf{F}_1 = 30\mathbf{i} + 40\mathbf{j} \text{ N}$$
$$\mathbf{F}_2 = -5\mathbf{i} + 8.66\mathbf{j} \text{ N}$$
$$\mathbf{F}_3 = -60\mathbf{j} \text{ N}$$

y la fuerza resultante **R** se determinaría a partir de la ecuación vectorial

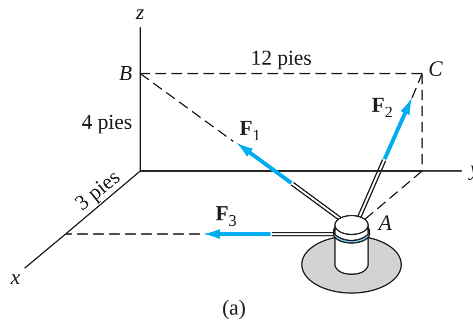
$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$
$$\mathbf{R} = (30\mathbf{i} + 40\mathbf{j}) + (-5\mathbf{i} + 8.66\mathbf{j}) + (-60\mathbf{j})$$
$$\mathbf{R} = 25\mathbf{i} - 11.34\mathbf{j}\ \text{N}$$

Respuesta

Utilizar notación escalar o vectorial es un asunto de preferencia personal.

Problema de ejemplo 2.2

Tres cuerdas están unidas al poste en A en la figura (a). Las fuerzas en las cuerdas son $F_1 = 260$ lb, $F_2 = 75$ lb y $F_3 = 60$ lb. Determine: 1. la magnitud de la fuerza **R** que es equivalente a las tres fuerzas que se muestran y 2. las coordenadas del punto donde la línea de acción de **R** interseca el plano yz.



(a)

Solución

Parte 1

Las fuerzas son concurrentes en el punto A y por consiguiente se pueden sumar de inmediato. Como las fuerzas no se encuentran en un plano coordenado, es conveniente utilizar una notación vectorial.

Un método para expresar cada una de las fuerzas en notación vectorial es emplear la forma $\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda}$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector unitario en la dirección de la fuerza **F**. Entonces

$$\mathbf{F}_1 = 260\boldsymbol{\lambda}_{AB} = 260\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 260\left(\frac{-3\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{13}\right)$$
$$= -60\mathbf{i} - 240\mathbf{j} + 80\mathbf{k}\ \text{lb}$$

$$\mathbf{F}_2 = 75\boldsymbol{\lambda}_{AC} = 75\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = 75\left(\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}}{5}\right)$$
$$= -45\mathbf{i} + 60\mathbf{k}\ \text{lb}$$

$$\mathbf{F}_3 = -60\mathbf{j}\ \text{lb}$$

La fuerza resultante está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3\\ &= (-60\mathbf{i} - 240\mathbf{j} + 80\mathbf{k}) + (-45\mathbf{i} + 60\mathbf{k}) + (-60\mathbf{j})\\ &= -105\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 140\mathbf{k}\ \text{lb}\end{aligned}$$

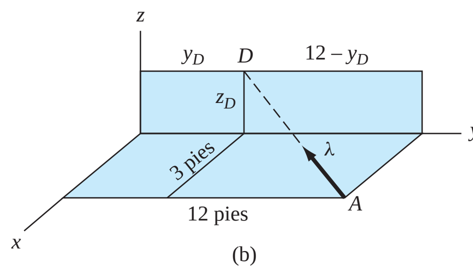
La magnitud de **R** es

$$R = \sqrt{(-105)^2 + (-300)^2 + (140)^2} = 347.3\ \text{lb}$$ *Respuesta*

Parte 2

El vector unitario **λ** en la dirección de **R** es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} &= \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{-105\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 140\mathbf{k}}{347.3}\\ &= -0.3023\mathbf{i} - 0.8638\mathbf{j} + 0.4031\mathbf{k}\end{aligned}$$



(b)

Sea D el punto donde **λ** interseca el plano yz, como se muestra en la figura (b). Las coordenadas de D se pueden determinar mediante proporciones:

$$\frac{|\lambda_x|}{3} = \frac{|\lambda_y|}{12 - y_D} = \frac{|\lambda_z|}{z_D}$$

Sustituyendo las componentes de **λ**, se tiene

$$\frac{0.3023}{3} = \frac{0.8638}{12 - y_D} = \frac{0.4031}{z_D}$$

lo que da

$$y_D = 3.43\ \text{pies} \qquad z_D = 4.0\ \text{pies}$$ *Respuesta*

Problemas

2.1 ¿Cuáles de los sistemas de fuerzas son equivalentes a la fuerza de 500 N en (a)?

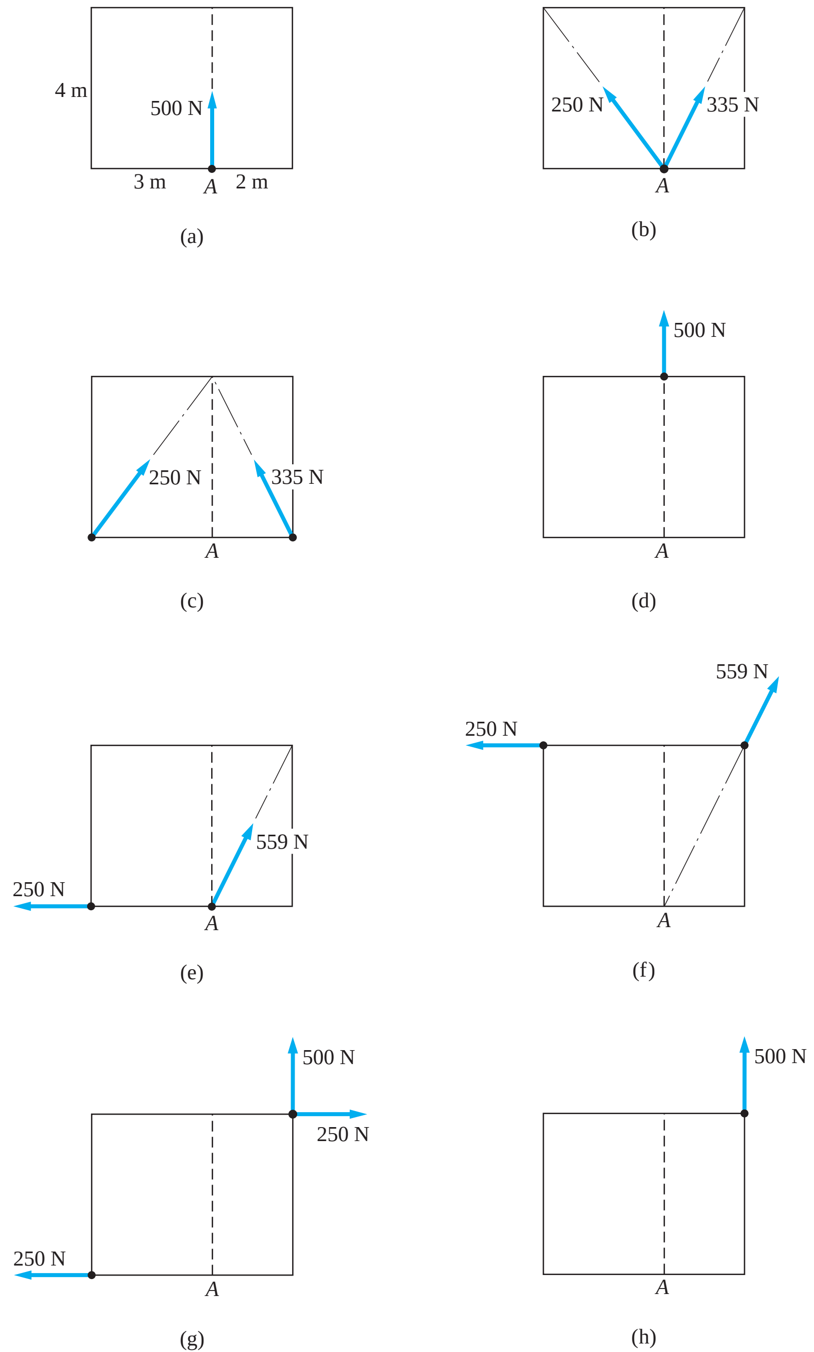


Fig. P2.1

2.2 Dos personas tratan de mover la roca aplicando las fuerzas que se muestran. Determine la magnitud y dirección de la fuerza que es equivalente a las dos fuerzas aplicadas.

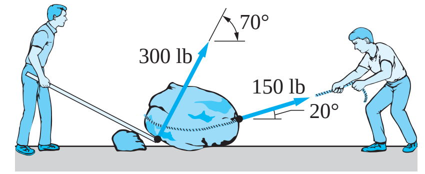


Fig. P2.2

2.3 Las magnitudes de las tres fuerzas aplicadas a la armella son $T_1 = 110$ lb, $T_2 = 40$ lb y $T_3 = 150$ lb. Remplace estas fuerzas con una sola fuerza equivalente **R**. Muestre el resultado en un bosquejo de la armella.

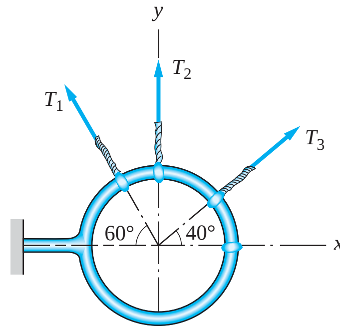


Fig. P2.3

2.4 Determine P y θ de manera que las tres fuerzas indicadas sean equivalentes a la fuerza simple $\mathbf{R} = 85\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ kN.

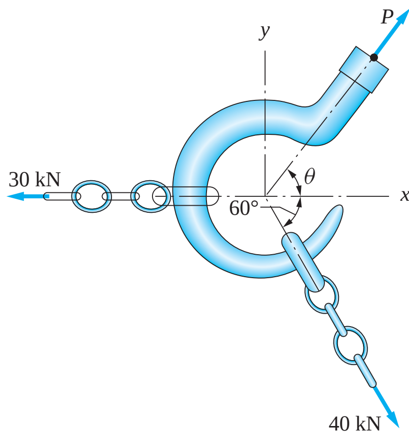


Fig. P2.4

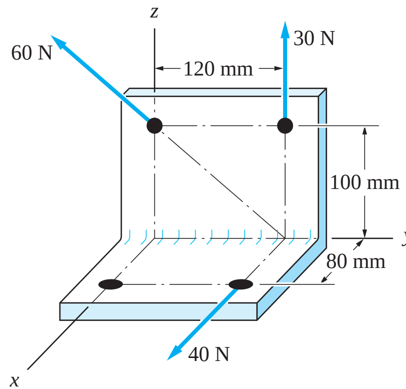


Fig. P2.5

2.5 Remplace las tres fuerzas que actúan sobre la ménsula por una fuerza equivalente.

2.6 Las fuerzas $P_1 = 110$ lb, $P_2 = 200$ lb y $P_3 = 150$ lb son equivalentes a una sola fuerza **R**. Determine: (a) la magnitud de **R** y (b) las coordenadas del punto donde la línea de acción de **R** cruza el plano *yz*.

2.7 Determine las magnitudes de las tres fuerzas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$, si son equivalentes a la fuerza $\mathbf{R} = -600\mathbf{i} + 500\mathbf{j} + 300\mathbf{k}$ lb.

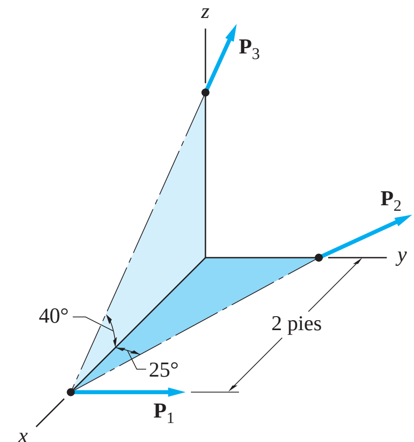


Fig. P2.6, P2.7

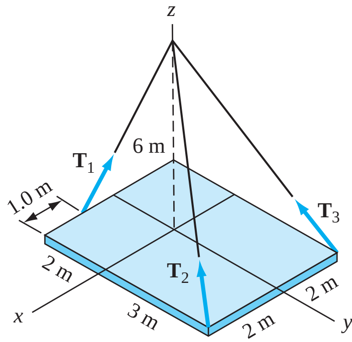


Fig. P2.8, P2.9

2.8 Las magnitudes de las tres fuerzas que actúan sobre la placa son $T_1 = 100$ kN, $T_2 = 80$ kN y $T_3 = 50$ kN. Remplace estas fuerzas con una sola fuerza equivalente **R**. Además, encuentre las coordenadas del punto donde **R** interseca la placa.

2.9 Determine las tres fuerzas que actúan sobre la placa que son equivalentes a la fuerza $\mathbf{R} = 210\mathbf{k}$ kN.

2.10 La fuerza **R** es la resultante de las fuerzas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ que actúan sobre la placa rectangular. Determine P_1 y P_2 si $R = 40$ kN y $P_3 = 20$ kN.

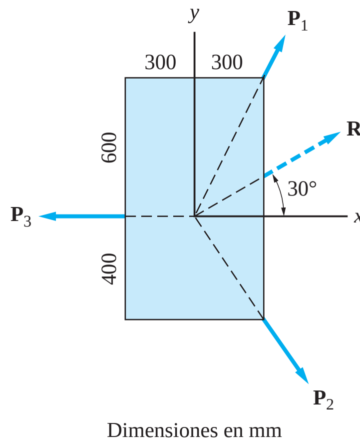


Fig. P2.10

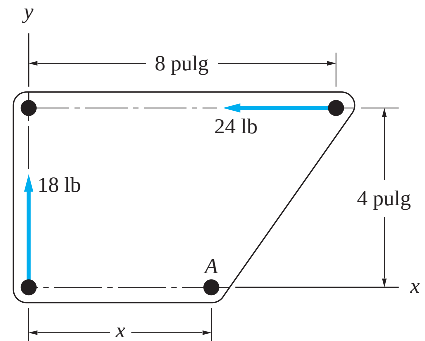


Fig. P2.11

2.11 Las dos fuerzas son equivalentes a una fuerza **R** que tiene la misma línea de acción que pasa por el punto *A*. Determine *R* y la distancia *x*.

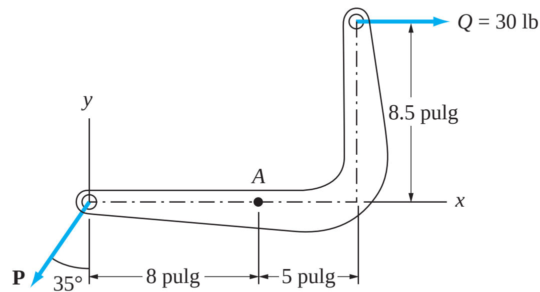


Fig. P2.12

2.12 Si se sabe que las fuerzas **P** y **Q** son equivalentes a una sola fuerza **R** que pasa por el punto *A*, determine *P* y *R*.

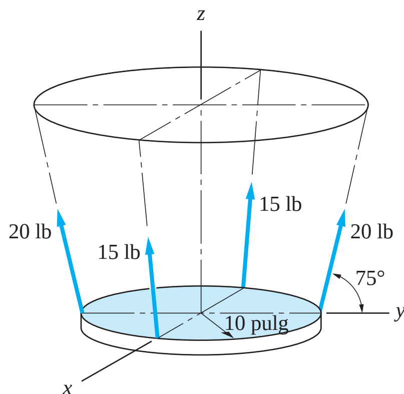


Fig. P2.13

2.13 Las cuatro fuerzas se remplazarán por una sola fuerza equivalente. Determine las componentes rectangulares de esta fuerza y el punto de intersección de su línea de acción con la placa.

2.14 Encuentre las fuerzas Q_1, Q_2 y Q_3 de manera que los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes.

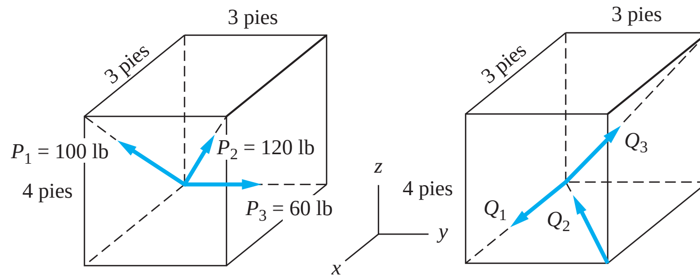


Fig. P2.14

2.15 La persona ejerce una fuerza **P** de 150 lb de magnitud sobre el manubrio de la carretilla. Si se sabe que la resultante de las fuerzas **P**, **Q** (la reacción en el neumático) y **W** (el peso de la carretilla) es la fuerza $\mathbf{R} = 10\mathbf{i}$ lb, determine **W**.

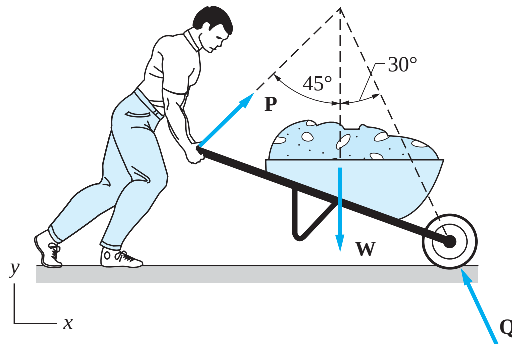


Fig. P2.15

2.16 Las tres fuerzas que actúan sobre la viga se pueden remplazar por una sola fuerza equivalente **R**. Determine el ángulo θ y **R**.

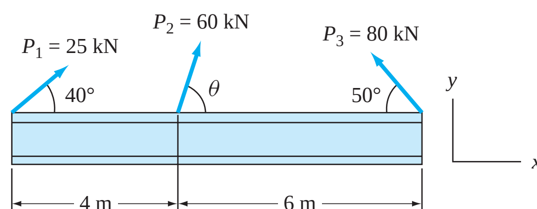


Fig. P2.16

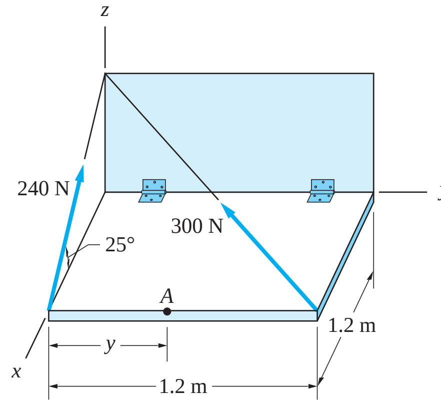


Fig. P2.17

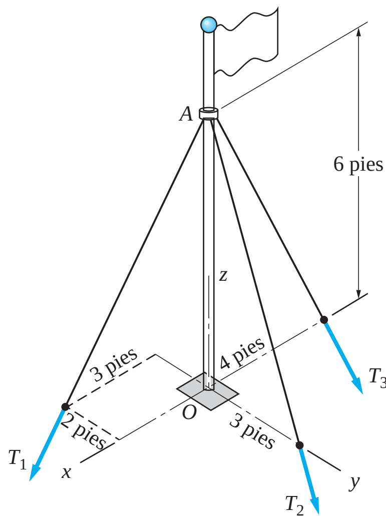


Fig. P2.18

2.17 El escotillón se mantiene en el plano horizontal por dos cables. Remplace las fuerzas en los cables por una fuerza equivalente **R** que pase por el punto *A* y determine la coordenada *y* del punto *A*.

2.18 Remplace las tres fuerzas que actúan sobre la retenida de alambres por una sola fuerza equivalente que actúe sobre el asta de bandera. Utilice $T_1 = 200$ lb, $T_2 = 400$ lb y $T_3 = 350$ lb.

2.19 Las tres fuerzas que actúan sobre el poste son equivalentes a una sola fuerza **R**. Determine: (a) la magnitud de **R** y (b) las coordenadas del punto donde la línea de acción de **R** cruza el plano *xy*.

2.20 Las tres fuerzas, cada una de magnitud *F*, se aplican a la caja. Determine *F* de manera que las tres fuerzas sean equivalentes a una sola fuerza de 600 lb.

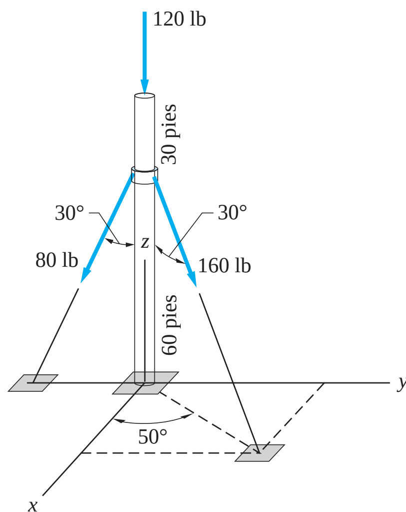


Fig. P2.19

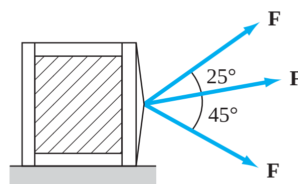


Fig. P2.20

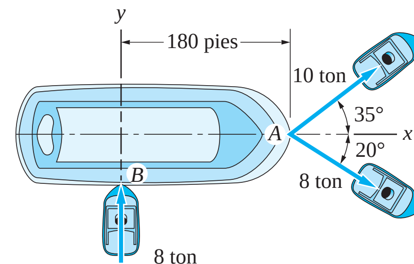


Fig. P2.21

***2.21** Determine la fuerza resultante **R** que es equivalente a las fuerzas ejercidas por los tres remolcadores al maniobrar la barca. Especifique la coordenada del punto en el eje *x* por el que pasa **R**. (*Sugerencia:* primero determine la fuerza resultante para las dos fuerzas en el punto *A* y después sume este resultado con la fuerza en el punto *B*.)

2.5 Momento de una fuerza respecto a un punto

En general, una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido tiende a girar, así como a trasladar, el cuerpo. La fuerza en sí es el efecto traslacional, el cuerpo tiende a moverse en la dirección de la fuerza y la magnitud de la fuerza es proporcional a su habilidad para trasladar el cuerpo. (El enunciado formal de esta relación es la segunda ley de Newton: la fuerza es igual a la masa por la aceleración.) Aquí se introduce la tendencia de una fuerza a girar un cuerpo, denominada *momento de una fuerza respecto a un punto*. Este efecto rotacional depende de la magnitud de la fuerza y la distancia entre el punto y la línea de acción de la fuerza. La tendencia de una fuerza a girar un cuerpo respecto a un eje, denominada *momento de una fuerza respecto a un eje*, se analiza en la sección siguiente.

a. Definición

Sea **F** una fuerza y O un punto que no se encuentra en la línea de acción de **F**, como se muestra en la figura 2.4. Observe que la fuerza **F** y el punto O determinan un plano único. Sea A cualquier punto en la línea de acción de **F** y **r** definida como el vector desde el punto O hasta el punto A.

El momento de la fuerza **F** respecto al punto O, denominado *centro de momento*, se define como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{2.4}$$

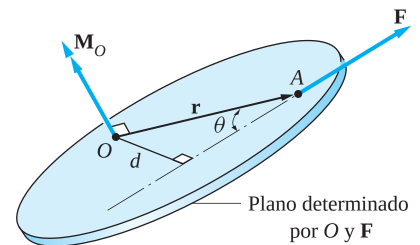


Fig. 2.4

Observe que el momento respecto a un punto tiene dimensiones [FL]. En unidades SI, el momento se mide en newton-metro (N · m). En unidades del sistema inglés, es común emplear libra-pulgada (lb · pulgada) y libra-pie (lb · pie).

El momento de **F** respecto al punto O es un vector por definición. De las propiedades del producto cruz de dos vectores, $\mathbf{M}_O$ es perpendicular a **r** y **F**, con su sentido determinado por la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura 2.4.*

b. Interpretación geométrica

El momento de una fuerza respecto a un punto siempre se puede calcular utilizando el producto cruz en la ecuación (2.4). Sin embargo, un cálculo escalar de la magnitud del momento se puede obtener a partir de la interpretación geométrica de la ecuación (2.4).

Observe que la magnitud de $\mathbf{M}_O$ está dada por

$$M_O = |\mathbf{M}_O| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \operatorname{sen} \theta \tag{2.5}$$

en donde θ es el ángulo entre **r** y **F**. Regresando a la figura 2.4, se observa que

$$r \operatorname{sen} \theta = d \tag{2.6}$$

donde d es la distancia perpendicular desde el centro de momento hasta la línea de acción de la fuerza **F** denominada *brazo de momento* de la fuerza. Por tanto, la magnitud de $\mathbf{M}_O$ es

$$M_O = Fd \tag{2.7}$$

*Los vectores momento se dibujan como flechas de doble punta en todo este libro.

Debido a que la magnitud de $\mathbf{M}_O$ sólo depende de la magnitud de la fuerza y la distancia perpendicular *d*, una fuerza se puede mover en cualquier punto a lo largo de su línea de acción sin cambiar su momento respecto a un punto. Por tanto, en esta aplicación, una fuerza se puede tratar como un vector deslizante. Esto explica por qué cualquier punto *A* en la línea de acción de la fuerza se puede elegir al determinar el vector **r** en la ecuación (2.4).

La ecuación (2.7) es conveniente sólo cuando el brazo de momento se puede determinar con facilidad. Además, al emplear la ecuación (2.7), la dirección de $\mathbf{M}_O$ se debe encontrar por inspección. Por ejemplo, la magnitud del momento de la fuerza de 100 N respecto al punto *O* en la figura 2.5(a) es $(100)(2) = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$ y su dirección es en sentido contrario al horario, según su observación desde el eje *z* positivo. Utilizando la regla de la mano derecha, la representación vectorial de este momento es $\mathbf{M}_O = 200\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, como se muestra en la figura 2.5(b). La magnitud del momento respecto al punto *O* para la fuerza de 100 N en la figura 2.5(c) también es de 200 N · m, pero en este caso su dirección es en sentido horario, según su observación desde el eje *z* positivo. Para esta fuerza, $\mathbf{M}_O = -200\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, como se muestra en la figura 2.5(d). Si bien la descripción vectorial para las dos fuerzas es $-100\mathbf{i}$ N, sus momentos respecto al punto *O* están dirigidos opuestamente.

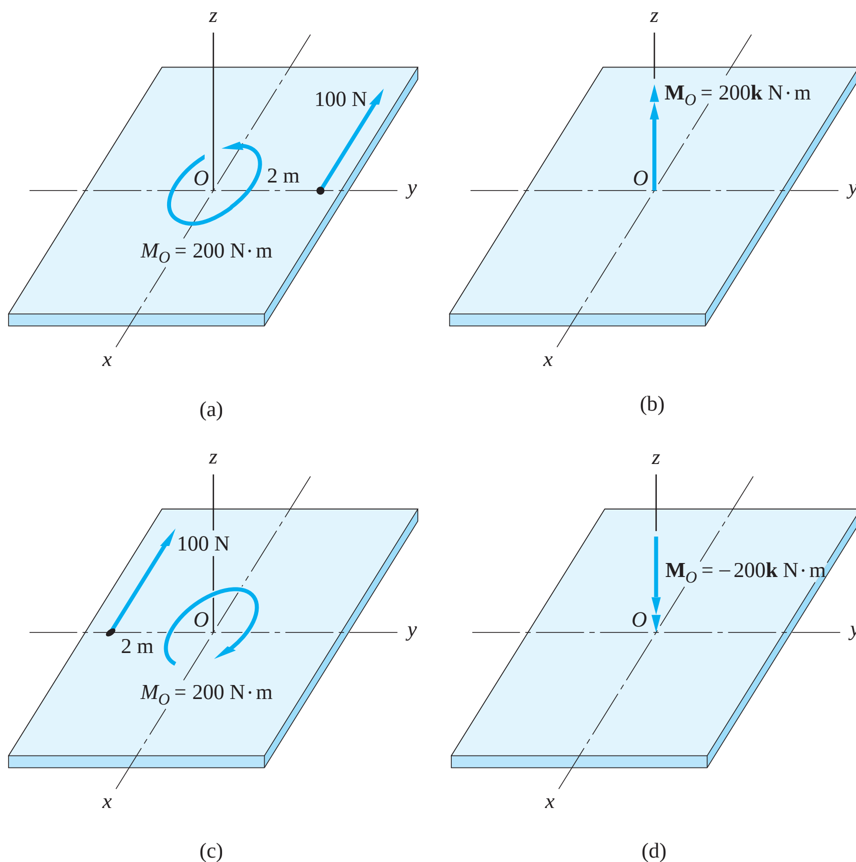


Fig. 2.5

c. Principio de los momentos

Al determinar el momento de una fuerza respecto a un punto, con frecuencia es conveniente emplear el *principio de los momentos*, también conocido como *teorema de Varignon*:

> El momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto a ese punto.

Demostración

Para demostrar el teorema de Varignon, considere las tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ concurrentes en el punto A, como se muestra en la figura 2.6, donde $\mathbf{r}$ es el vector desde el punto O hasta el punto A. La suma de los momentos respecto al punto O para las tres fuerzas es

$$\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_3) \tag{a}$$

Empleando las propiedades del producto cruz, la ecuación (a) se puede escribir así:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \mathbf{r} \times \mathbf{R} \tag{b}$$

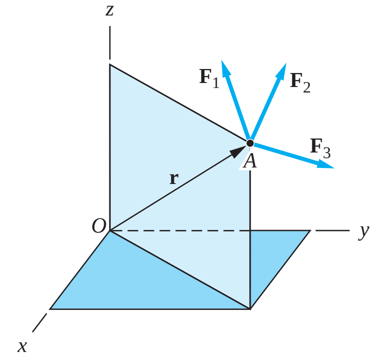


Fig. 2.6

donde $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ es la fuerza resultante para las tres fuerzas originales. La ecuación (b) demuestra el principio de los momentos: el momento de $\mathbf{R}$ es igual a los momentos de las componentes de $\mathbf{R}$. (Aunque en la demostración anterior sólo se utilizaron tres componentes, es obvio que se puede ampliar a cualquier número de componentes).

d. Métodos vectoriales y escalares

A partir del análisis anterior se observa que los siguientes son métodos equivalentes para calcular el momento de una fuerza $\mathbf{F}$ respecto a un punto O.

Método vectorial En el método vectorial se utiliza $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{r}$ es un vector desde el punto O hasta cualquier punto en la línea de acción de $\mathbf{F}$. La técnica más efectiva para utilizar el método vectorial (con componentes rectangulares) es la siguiente: 1. se escribe $\mathbf{F}$ en forma vectorial; 2. se elige una $\mathbf{r}$ y se escribe ésta en forma vectorial y 3. se utiliza la forma de determinante de $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para evaluar $\mathbf{M}_O$:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

donde la segunda y la tercera líneas en el determinante son las componentes rectangulares de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$, respectivamente. Estas componentes se muestran en la figura 2.7. El desarrollo del determinante en la ecuación (2.8) da

$$\mathbf{M}_O = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k} \tag{2.9}$$

Método escalar En el método escalar, la magnitud del momento de la fuerza $\mathbf{F}$ respecto a O se determina con $M_O = Fd$, donde d es el brazo de momento de la fuerza. En este método el sentido del momento se debe determinar por inspección. Como ya se mencionó, el método escalar es conveniente sólo cuando el brazo de momento d se puede determinar con facilidad.

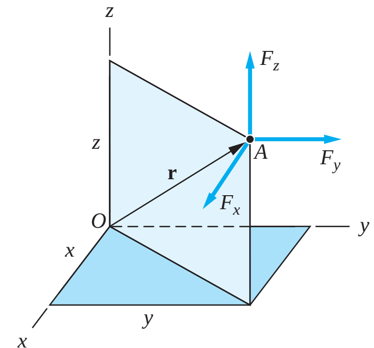
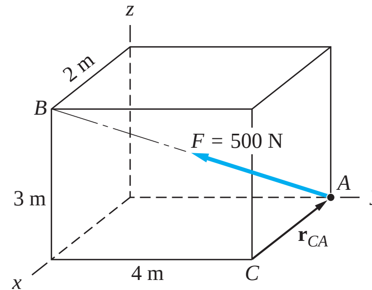


Fig. 2.7

Problema de ejemplo 2.3

Determine: 1. el momento de la fuerza **F** respecto al punto *C* y 2. la distancia perpendicular entre *C* y la línea de acción de **F**.



Solución

Parte 1

El momento de una fuerza respecto al punto *C* se puede calcular ya sea mediante el método escalar ($M_C = Fd$) o bien mediante el método vectorial ($\mathbf{M}_C = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$). En este problema el método escalar sería inconveniente, debido a que no hay una forma fácil para determinar *d* (la distancia perpendicular entre *C* y la línea *AB*). Por tanto, se utiliza el método vectorial, que consiste de los tres pasos siguientes: 1. se escribe **F** en forma vectorial, 2. se elige una **r** que se escribe en forma vectorial y 3. se calcula $\mathbf{M}_C = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Paso 1: Se escribe **F** en forma vectorial.

Con referencia a la figura, se obtiene

$$\mathbf{F} = 500\boldsymbol{\lambda}_{AB} = 500\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 500\left(\frac{2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{5.385}\right)$$

lo que da

$$\mathbf{F} = 185.7\mathbf{i} - 371.4\mathbf{j} + 278.6\mathbf{k}\ \text{N}$$

Paso 2: Se elige una **r** que se escribe en forma vectorial.

El vector **r** es un vector desde el punto *C* hasta cualquier punto en la línea de acción de **F**. De la figura se observa que hay dos opciones convenientes para **r**, el vector desde el punto *C* hasta el punto *A* o hasta el punto *B*. Como se indica en la figura, se elige que **r** sea $\mathbf{r}_{CA}$. (Como ejercicio, puede resolver este problema eligiendo **r** como el vector desde el punto *C* hasta el punto *B*.) Ahora se tiene

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{CA} = -2\mathbf{i}\ \text{m}$$

Paso 3: Se calcula $\mathbf{M}_C = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

El método más fácil para evaluar el producto cruz es emplear el desarrollo del determinante:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 185.7 & -371.4 & 278.6 \end{vmatrix}$$

Al desarrollar este determinante se obtiene

$$\mathbf{M}_C = 557.2\mathbf{j} + 742.8\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$ *Respuesta*

Parte 2

La magnitud de $\mathbf{M}_C$ es

$$M_C = \sqrt{(557.2)^2 + (742.8)^2} = 928.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La distancia perpendicular d desde el punto C hasta la línea de acción de **F** se puede determinar así:

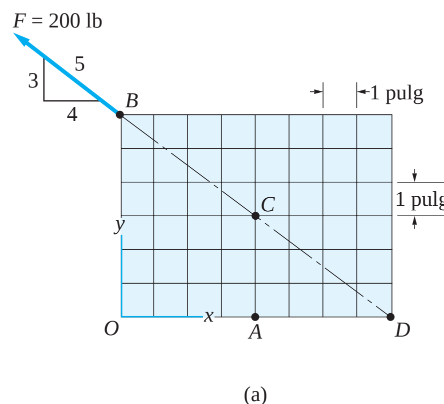
$$d = \frac{M_C}{F} = \frac{928.6}{500} = 1.857 \text{ m}$$ *Respuesta*

Observe que, en vez de emplear la distancia perpendicular para determinar el momento, se utilizó el momento para precisar la distancia perpendicular.

Advertencia Un error común es elegir el sentido equivocado para **r** en la ecuación (2.4). Observe que **r** está dirigido desde el centro de momento hasta la línea de acción de **F**. Si se invierte el sentido de **r**, $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ producirá la magnitud correcta del momento, pero el sentido erróneo. Para evitar esta pifia, se recomienda que dibuje **r** en su bosquejo antes de intentar escribirlo en forma vectorial.

Problema de ejemplo **2.4**

Determine el momento de la fuerza **F** en la figura (a) respecto al punto A.



(a)

Solución

La fuerza **F** y el punto A se encuentran en el plano xy. Los problemas de este tipo se pueden resolver utilizando el método vectorial ($\mathbf{r} \times \mathbf{F}$) o bien el método escalar (Fd). Para fines de ilustración, se utilizarán los dos métodos.

Solución vectorial

Recuerde que los tres pasos en el método vectorial son escribir **F** en forma vectorial, elegir **r** y anotarlo en forma vectorial y después evaluar el producto cruz $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Escribiendo **F** en forma vectorial, se tiene

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{4}{5}\right)200\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\right)200\mathbf{j}$$
$$= -160\mathbf{i} + 120\mathbf{j} \text{ lb}$$

Hay varias buenas opciones para **r** en este problema, tres de las cuales son $\mathbf{r}_{AB}$, $\mathbf{r}_{AC}$ y $\mathbf{r}_{AD}$. Eligiendo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{AB} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} \text{ pulg}$$

el momento respecto al punto A es

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 6 & 0 \\ -160 & 120 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando este determinante, se obtiene

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{k}[(120)(-4) + (160)(6)] = 480\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pulg} \qquad \textit{Respuesta}$$

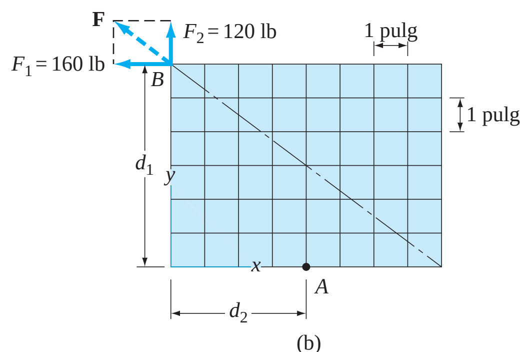
La magnitud de $\mathbf{M}_A$ es 480 lb · pulg. Observe que la dirección de $\mathbf{M}_A$ es la dirección z positiva, lo que de acuerdo con la regla de la mano derecha significa que el momento respecto al punto A es en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Solución escalar

En la figura (b) la fuerza se descompuso en componentes rectangulares $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en el punto B. El brazo de momento de cada componente respecto al punto A (la distancia perpendicular entre A y la línea de acción de la fuerza) se puede determinar por inspección. Los brazos de momento son $d_1 = 6$ pulg para $\mathbf{F}_1$ y $d_2 = 4$ pulg para $\mathbf{F}_2$, como se muestra en la figura (b).

El momento de **F** respecto a A ahora se puede obtener aplicando el principio de los momentos. Observando que el momento de $\mathbf{F}_1$ es en sentido contrario a las manecillas del reloj, en tanto que el momento de $\mathbf{F}_2$ es en sentido de las manecillas del reloj, se obtiene

$$\circlearrowleft + \quad M_A = F_1 d_1 - F_2 d_2$$
$$= 160(6) - 120(4) = 480 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$



(b)

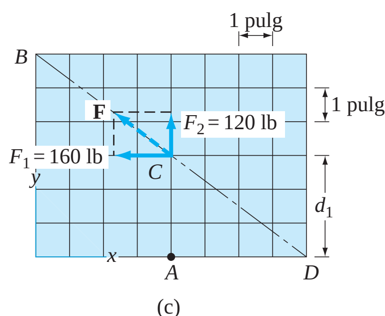
Observe que el sentido de M_A es contrario a las manecillas del reloj. Aplicando la regla de la mano derecha, la representación vectorial del momento es

$$\mathbf{M}_A = 480\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$ *Respuesta*

Recuerde que una fuerza, siendo un vector deslizante, se puede mover a cualquier punto en su línea de acción sin cambiar su momento. En la figura (c) movimos **F** hasta el punto C. Ahora el brazo de momento de $\mathbf{F}_1$ respecto a A es $d_1 = 3$ pulg y el brazo de momento de $\mathbf{F}_2$ es cero. De aquí, el momento de **F** respecto a A es

$$\circlearrowleft + \quad M_A = F_1 d_1 = 160(3) = 480 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

en sentido contrario a las manecillas del reloj, igual que antes.



(c)

Otra ubicación conveniente para **F** sería el punto D en la figura (c). Aquí, el brazo de momento de $\mathbf{F}_1$ respecto a A es cero, en tanto que el brazo de momento de $\mathbf{F}_2$ es 4 pulg, lo que de nuevo da $M_A = 480$ lb · pulg en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Problemas

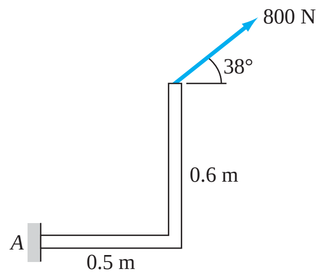


Fig. P2.22

2.22 Determine la magnitud y el sentido del momento de la fuerza de 800 N respecto al punto *A*.

2.23 Encuentre la magnitud y el sentido del momento de la fuerza de 60 lb respecto a los puntos *A* y *B*.

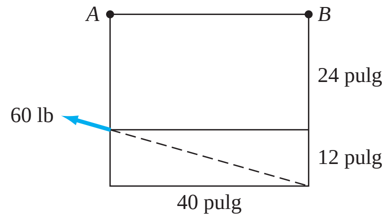


Fig. P2.23

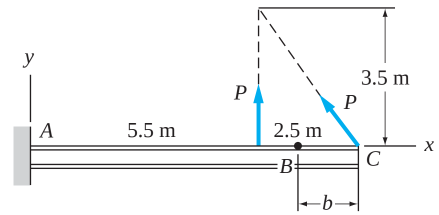


Fig. P2.24

2.24 Las dos fuerzas se pueden remplazar por una fuerza equivalente **R** que actúa en el punto *B* en la viga. Determine la distancia *b* que ubica *B*. (*Sugerencia:* el momento combinado de las dos fuerzas respecto a cualquier punto es igual al momento de **R** respecto al mismo punto.)

2.25 Una fuerza **P** en el plano *xy* actúa sobre la placa triangular. Los momentos de **P** respecto a los puntos *O*, *A* y *B* son $M_O = 200$ N · m en sentido de las manecillas del reloj, $M_A = 0$ y $M_B = 0$. Determine **P**.

2.26 Una fuerza **P** en el plano *xy* actúa sobre la placa triangular. Los momentos de **P** respecto a los puntos *O*, *A* y *B* son $M_O = 80$ N · m en sentido contrario de las manecillas del reloj, $M_A = 200$ N · m en sentido de las manecillas del reloj y $M_B = 0$. Determine **P**.

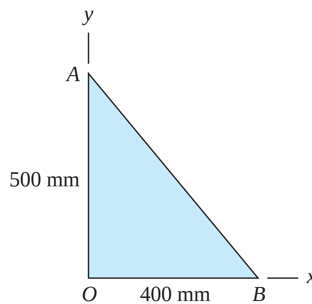


Fig. P2.25, P2.26

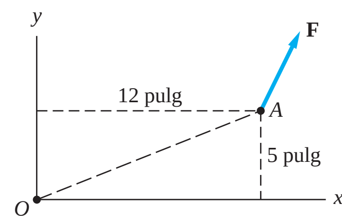


Fig. P2.27

2.27 Determine el momento de la fuerza $\mathbf{F} = 9\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ lb respecto al punto *O* mediante los métodos siguientes: (a) método vectorial utilizando $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$; (b) método escalar empleando componentes rectangulares de **F** y (c) método escalar utilizando componentes de **F** que sean paralelas y perpendiculares a la línea *OA*.

2.28 Dado que $T = 28.3$ kN y $W = 25$ kN, determine la magnitud y el sentido de los momentos respecto al punto B de lo siguiente: (a) la fuerza **T**; (b) la fuerza **W** y (c) las fuerzas **T** y **W** combinadas.

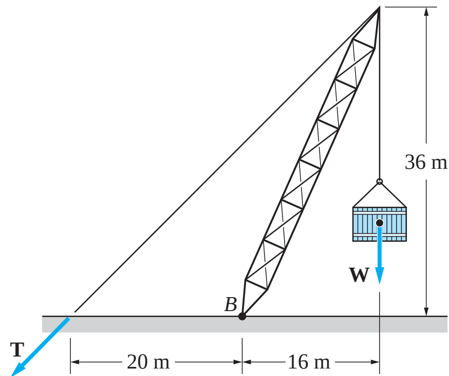


Fig. P2.28

2.29 Un momento de 50 lb · pie respecto a O se requiere para aflojar la tuerca. Determine la magnitud mínima de la fuerza **F** y el ángulo θ correspondiente que hará girar la tuerca.

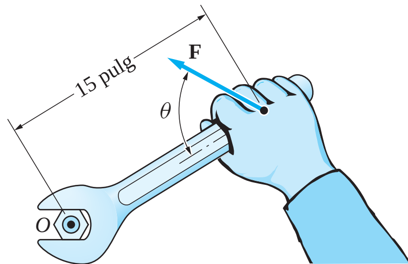


Fig. P2.29

2.30 Sabiendo que las fuerzas **P** y **Q** son equivalentes a una sola fuerza **R** que pasa por el punto A, determine P. (*Sugerencia:* el momento combinado de **P** y **Q** respecto a A es cero).

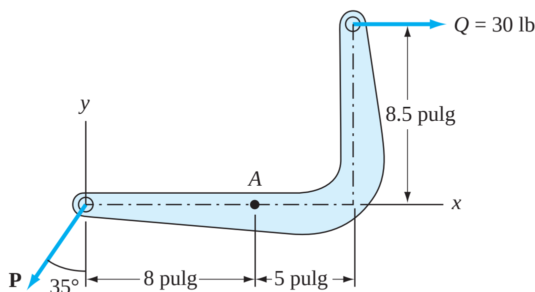


Fig. P2.30

2.31 La resultante de las dos fuerzas que se muestran tiene una línea de acción que pasa por el punto A. Reconociendo que el momento de la resultante respecto a A es cero, determine la distancia x.

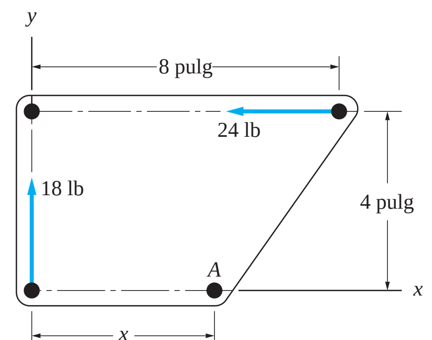


Fig. P2.31

2.32 Los neumáticos frontales del remolcador se levantarán del suelo si el momento de la carga *W* respecto al eje posterior excede el momento del peso de 6200 lb del remolcador. Determine la *W* máxima que se puede aplicar con seguridad.

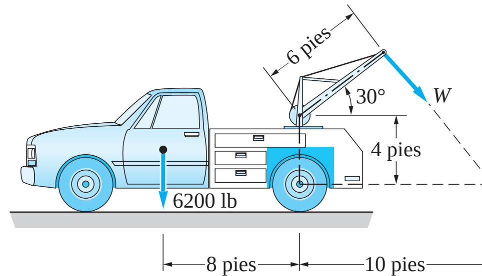


Fig. P2.32

2.33 La fuerza **F** actúa sobre las tenazas del brazo robótico. Los momentos de **F** respecto a los puntos *A* y *B* son 210 N · m y 90 N · m, respectivamente, los dos son en sentido contrario de las manecillas del reloj. Determine *F* y el ángulo θ.

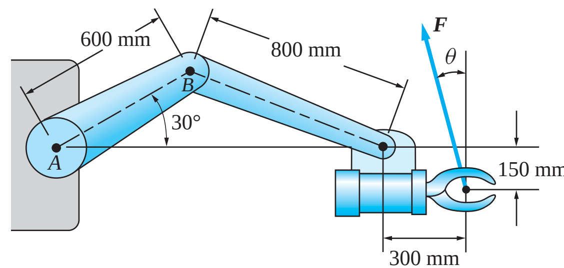


Fig. P2.33

2.34 Calcule el momento de la fuerza **P** respecto al punto *A*.

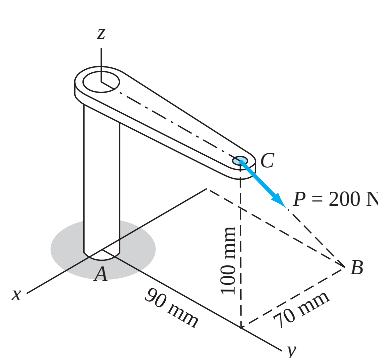


Fig. P2.34

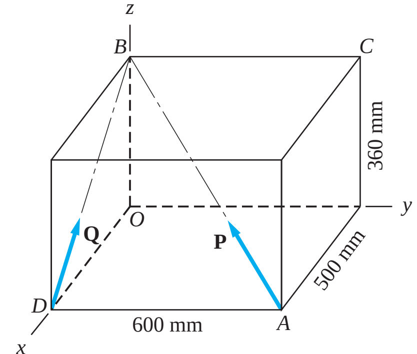


Fig. P2.35, P2.36

2.35 La magnitud de la fuerza **P** es 100 N. Determine los momentos de **P** respecto (a) al punto *O* y (b) al punto *C*.

2.36 La magnitud de la fuerza **Q** es 250 N. Determine los momentos de **Q** respecto (a) al punto *O* y (b) al punto *C*.

2.37 La magnitud del momento de la fuerza **P** respecto al punto *O* es 200 kN · m. Determine la magnitud de **P**.

2.38 La magnitud de la fuerza **P** es 50 kN. Determine el momento de **P** respecto (a) al punto *A* y (b) al punto *B*.

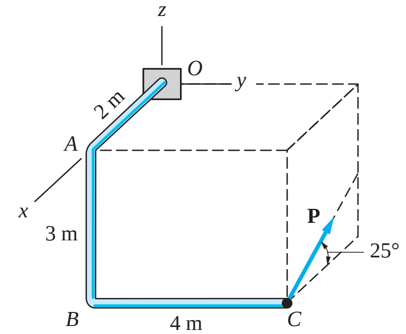


Fig. P2.37, P2.38

2.39 Determine los momentos de **Q** respecto (a) al punto *O* y (b) al punto *C*. La magnitud de **Q** es 20 lb.

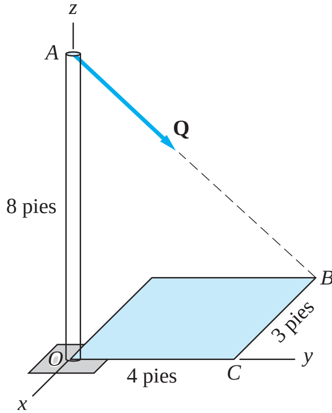


Fig. P2.39

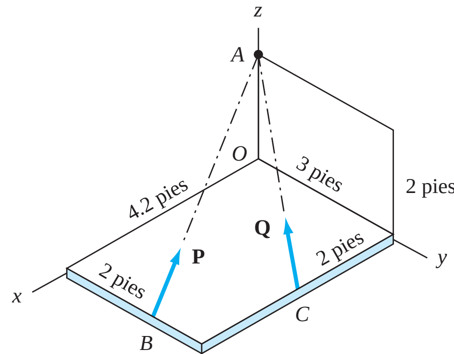


Fig. P2.40

2.40 Encuentre el momento combinado de las fuerzas **P** y **Q** respecto al punto *O*. Las magnitudes de las fuerzas son $P = 80$ lb y $Q = 60$ lb.

2.41 La llave se utiliza para apretar una tuerca del neumático. Determine el momento de la fuerza de 120 lb respecto al origen *O*. Exprese su respuesta en forma vectorial.

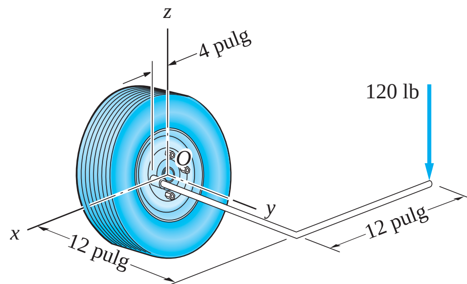


Fig. P2.41

2.42 Las magnitudes de las dos fuerzas que se muestran son $P = 16$ lb y $Q = 22$ lb. Determine la magnitud del momento combinado de **P** y **Q** respecto a *O* y los cosenos directores de este vector momento.

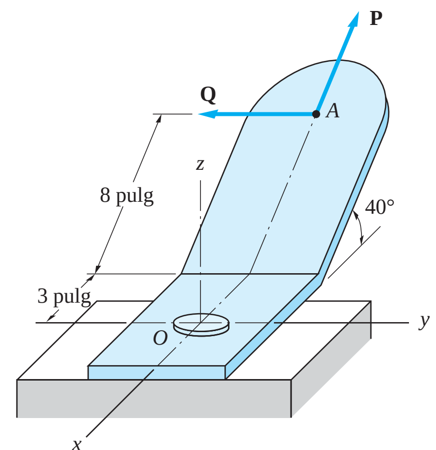


Fig. P2.42

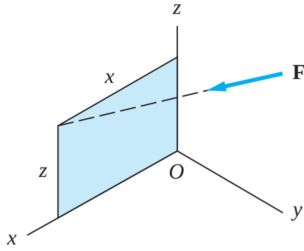


Fig. P2.43

2.43 El momento de la fuerza $\mathbf{F} = 50\mathbf{i} - 100\mathbf{j} - 70\mathbf{k}$ lb respecto al punto O es $\mathbf{M}_O = 400\mathbf{i} + 410\mathbf{j} - 300\mathbf{k}$ lb · pie. Determine las coordenadas del punto donde la línea de acción de **T** interseca el plano xz.

2.44 Determine la magnitud del momento de la fuerza de 150 N respecto al punto O y encuentre los cosenos directores del vector momento.

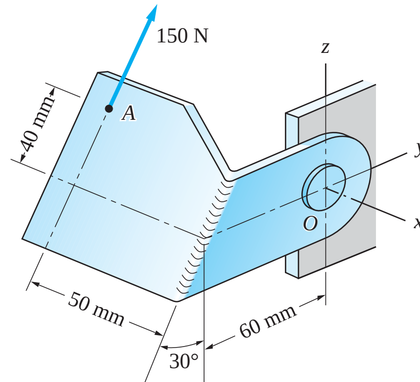


Fig. P2.44

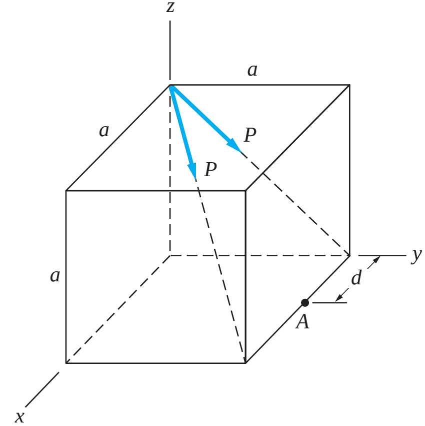


Fig. P2.45

2.45 El momento combinado de las dos fuerzas, cada una de magnitud P, respecto al punto A es cero. Determine la distancia d que ubica A.

2.46 La fuerza $\mathbf{F} = -20\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ lb actúa en el punto A. Determine las coordenadas del punto B donde la línea de acción de **F** interseca el plano xy. (*Sugerencia*: el momento de **F** respecto a B es cero.)

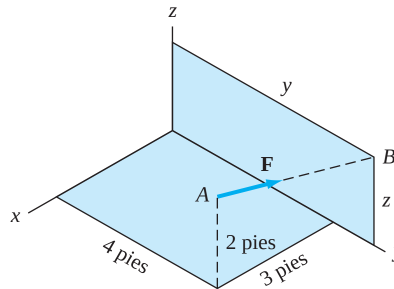


Fig. P2.46

2.6 *Momento de inercia de una fuerza respecto a un eje*

En la sección anterior se definió el momento de una fuerza respecto a un punto, en ésta se analiza una fuerza respecto a un eje. Dado que el momento respecto a un eje es una medida de la tendencia de una fuerza a girar un cuerpo respecto al eje, es fundamental para el estudio de la mecánica para ingenieros. Se inicia con una definición formal del momento respecto a un eje y después se examina su interpretación geométrica.

a. Definición

El momento de una fuerza respecto a un eje, denominado *eje de momento*, se define con más facilidad en términos del momento de la fuerza respecto a un punto en el eje. En la figura 2.8 se muestra la fuerza **F** y su momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ respecto al punto O, donde O es cualquier punto en el eje AB. El momento respecto a un eje se define como sigue:

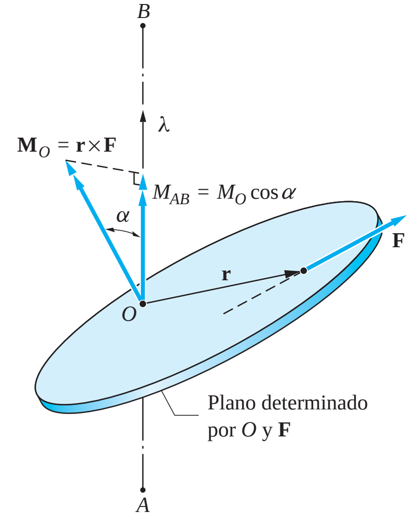


Fig. 2.8

> El momento de **F** respecto al eje AB es la componente ortogonal de $\mathbf{M}_O$ a lo largo del eje AB, donde O es cualquier punto en AB.

Si $\boldsymbol{\lambda}$ es un vector unitario dirigido desde A hacia B, esta definición da para el momento de **F** respecto al eje AB

$$M_{AB} = M_O \cos\alpha \tag{2.10}$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{M}_O$ y $\boldsymbol{\lambda}$, como se muestra en la figura 2.8.

Como $M_O \cos\alpha = \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\lambda}$ (de la definición del producto punto), la ecuación (2.10) también se puede expresar en la forma

$$M_{AB} = \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{2.11}$$

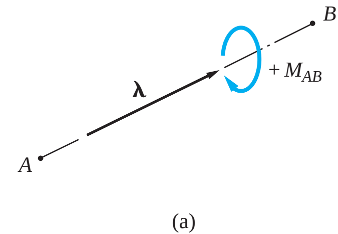
Repasemos cada uno de los términos que aparecen en esta ecuación:

- M_{AB} es el momento (en realidad, la magnitud del momento) de la fuerza **F** respecto al eje AB.
- $\mathbf{M}_O$ representa el momento de **F** respecto al punto O, donde O es cualquier punto en el eje AB.*
- $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector unitario dirigido desde A hacia B.
- **r** es el vector posición trazado desde O hasta cualquier punto en la línea de acción de **F**.

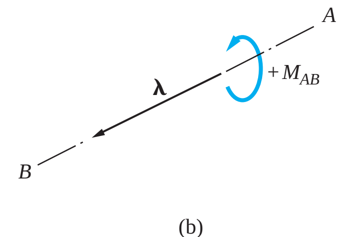
Observe que la dirección de $\boldsymbol{\lambda}$ determina el sentido positivo de M_{AB} de acuerdo con la regla de la mano derecha, como se ilustra en la figura 2.9. Tomando en cuenta esta convención de signos le permitirá interpretar de manera correcta el signo de M_{AB} en las ecuaciones (2.10) y (2.11).

En ocasiones se quiere expresar el momento de **F** respecto al eje AB como un vector. Esto se puede hacer multiplicando M_{AB} por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ que especifica la dirección del eje de momento, lo que da

$$\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\lambda} \tag{2.12}$$



(a)



(b)

Fig. 2.9

Componentes rectangulares de $\mathbf{M}_O$ Sea $\mathbf{M}_O$ el momento de una fuerza **F** respecto a O, donde O es el origen del sistema coordenado xyz que se muestra en la figura

*Si O y C son dos puntos en el eje de momento AB, entonces $\mathbf{M}_O$ y $\mathbf{M}_C$ serán, en general, diferentes. Sin embargo, se puede demostrar que $\mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{M}_C \cdot \boldsymbol{\lambda}$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es un vector unitario paralelo a AB. Por esta razón o en la ecuación (2.10) puede ser cualquier punto en AB.

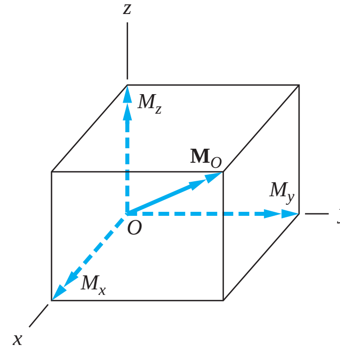


Fig. 2.10

2.10. Los momentos de **F** respecto a los tres ejes coordenados se pueden obtener con la ecuación (2.11) sustituyendo **i**, **j** y **k** a su vez por **λ**. Los resultados son

$$M_x = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{i} \qquad M_y = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{j} \qquad M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k}$$

de donde se obtiene la conclusión siguiente:

Las componentes rectangulares del momento de una fuerza respecto al origen *O* son iguales a los momentos de la fuerza respecto a los ejes coordenados.

En otras palabras,

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \tag{2.13}$$

donde M_x, M_y y M_z, mostradas en la figura 2.10, son iguales a los momentos de la fuerza respecto a los ejes coordenados.

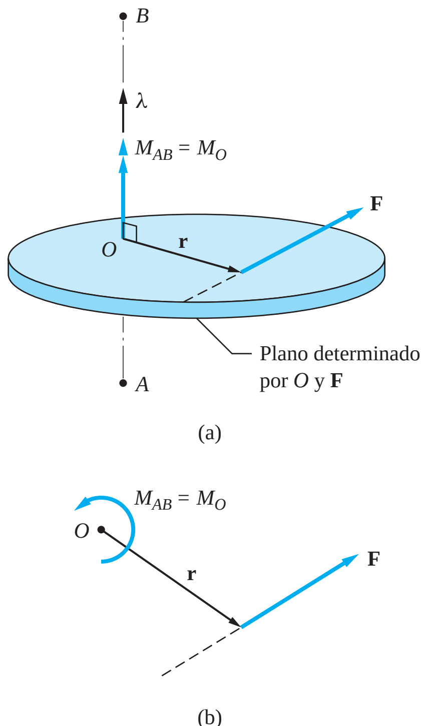


Fig. 2.11

Caso especial: eje de momento perpendicular a F Considere el caso donde el eje de momento es perpendicular al plano que contiene la fuerza **F** y el punto *O*, como se muestra en la figura 2.11(a). Debido a que las direcciones de $\mathbf{M}_O$ y $\mathbf{M}_{AB}$ ahora coinciden, **λ** en la ecuación (2.11) es en la dirección de $\mathbf{M}_O$. En consecuencia, la ecuación (2.11) da

$$M_O = M_{AB} \tag{2.14}$$

Es decir, el momento de **F** respecto a *O* es igual al momento de **F** respecto al eje *AB*.

Una representación bidimensional de la figura 2.11(a) observada a lo largo del eje de momento *AB*, se muestra en la figura 2.11(b). Con frecuencia utilizaremos una figura similar en la solución de problemas bidimensionales (problemas donde todas las fuerzas se encuentran en el mismo plano). En problemas de este tipo, se acostumbra emplear el término *momento respecto a un punto* (M_O), en vez de *momento respecto a un eje* (M_{AB}).

b. Interpretación geométrica

Es ilustrativo examinar la interpretación geométrica de la ecuación $M_{AB} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}$.

Suponga que se da una fuerza arbitraria **F** y un eje arbitrario *AB*, como se muestra en la figura 2.12. Trazamos un plano $\mathcal{P}$ que es perpendicular al eje *AB* y designamos

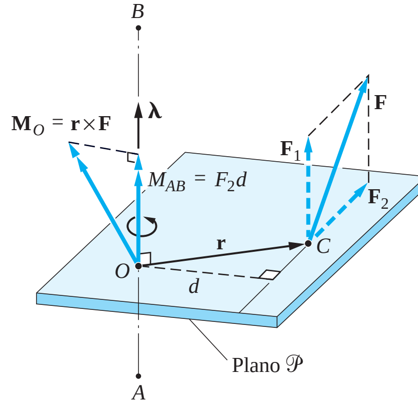


Fig. 2.12

O y *C* como los puntos donde el eje y la línea de acción de la fuerza intersecan 𝒫, respectivamente. El vector de *O* a *C* se denota por **r** y **λ** es el vector unitario a lo largo del eje *AB*. Luego se descompone **F** en dos componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, que son paralelas y perpendiculares al eje *AB*, respectivamente (observe que $\mathbf{F}_2$ se encuentra en el plano 𝒫). En términos de estas componentes, el momento de **F** respecto al eje *AB* es

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\lambda} \end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1$ es perpendicular a $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0$ y se obtiene

$$M_{AB} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

La sustitución de $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\lambda} = F_2 d$, donde *d* es la distancia perpendicular de *O* a la línea de acción de $\mathbf{F}_2$, da

$$M_{AB} = F_2 d \tag{2.15}$$

Se observa que el momento de **F** respecto al eje *AB* es igual al producto de la componente de **F** que es perpendicular a *AB* y la distancia perpendicular de esta componente de *AB*. Observe que la ecuación (2.15) proporciona sólo la magnitud del momento respecto al eje; su sentido se debe determinar por inspección.

La consideración de la ecuación (2.15) revela que el momento de una fuerza respecto a un eje, según su definición en la ecuación (2.10), posee las características físicas siguientes:

- Una fuerza que es paralela al eje de momento (como F_1) no tiene momento respecto a ese eje.
- Si la línea de acción de una fuerza interseca el eje de momento ($d = 0$), la fuerza no tiene momento respecto a ese eje.
- El momento de una fuerza es proporcional a su componente que es perpendicular al eje de momento (como F_2) y al brazo de momento (d) de esa componente.
- El sentido del momento es consistente con la dirección en la que la fuerza tendería a girar un cuerpo.

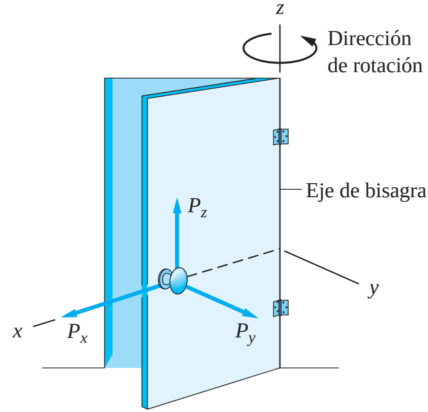


Fig. 2.13

Para ilustrar las características anteriores, considere abrir la puerta de la figura 2.13 aplicando una fuerza **P** a la perilla. En la figura, **P** se descompone en las componentes rectangulares siguientes: P_x interseca el eje de la bisagra, P_y es perpendicular a la puerta y P_z es paralela al eje de la bisagra.

Para abrir la puerta, se debe aplicar un momento respecto al eje z (el eje de la bisagra). La experiencia indica que P_y es la única componente de la fuerza que lograría la tarea. Las componentes P_x y P_z son inefectivas, debido a que sus momentos respecto al eje z son cero. También se sabe que es más fácil abrir la puerta si se incrementa la distancia entre la perilla y el eje de la bisagra (el brazo de momento) o si la magnitud de P_y se incrementa. Por último observe que P_y ocasiona que la puerta gire en la dirección mostrada en la figura, que también es el sentido del momento respecto al eje z.

c. Métodos vectoriales y escalares

Del análisis anterior se observa que el momento de la fuerza **F** respecto a un eje AB se puede calcular mediante dos métodos.

Método vectorial El momento de **F** respecto a AB se obtiene del triple producto escalar $M_{AB} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}$, donde **r** es un vector trazado desde cualquier punto en el eje de momento AB hasta un punto en la línea de acción de **F** y $\boldsymbol{\lambda}$ representa una unidad dirigida desde A hacia B. Un medio conveniente para evaluar el triple escalar es por medio de su forma de determinante

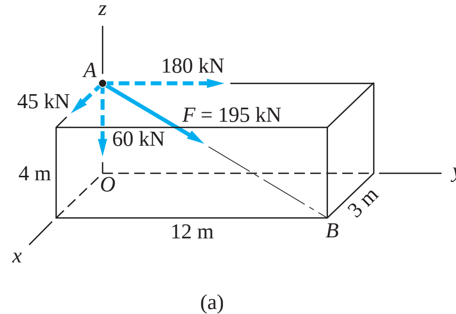
$$M_{AB} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \\ \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{vmatrix} \tag{2.16}$$

donde x, y y z son las componentes rectangulares de **r**.

Método escalar El momento de **F** respecto a AB se obtiene de la expresión escalar $M_{AB} = F_2 d$. El sentido del momento se debe determinar por inspección. Este método es conveniente si AB es paralela a uno de los ejes coordenados (lo que siempre es el caso en problemas bidimensionales).

Problema de ejemplo **2.5**

La fuerza **F** de magnitud 195 kN actúa a lo largo de la línea *AB*. 1. Determine los momentos M_x, M_y y M_z de **F** respecto a los ejes coordenados mediante el método escalar y 2. encuentre el momento de **F** respecto al punto *O* mediante el método vectorial y verifique que $\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$.



(a)

Solución

Se inicia calculando las componentes rectangulares de **F**:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda}_{AB} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 195\left(\frac{3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k}}{\sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2}}\right)$$

$$= 45\mathbf{i} + 180\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\ \text{kN}$$

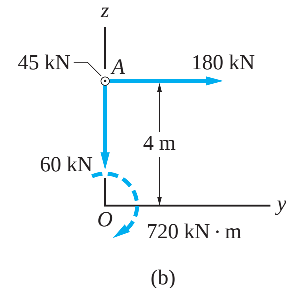
Al calcular el momento de una fuerza, ésta se puede colocar en cualquier punto en su línea de acción. Como se muestra en la figura (a), elegimos tener la fuerza actuando en el punto *A*.

Parte 1

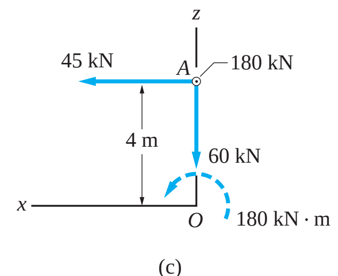
El momento de **F** respecto al eje coordenado se puede calcular sumando los momentos de las componentes de **F** en relación a ese eje (el principio de los momentos).

Momentos respecto al eje x La figura (b) representa una versión bidimensional de la figura (a), mostrando el plano *yz*. Se observa que las componentes de 45 kN y 60 kN de la fuerza no contribuyen al momento respecto al eje *x* (la primera es paralela al eje y la segunda interseca el eje). La distancia perpendicular (brazo de momento) entre la componente de 180 kN y el eje *x* es 4 m. Por tanto, el momento de esta componente respecto al eje *x* (que también es el momento de **F**) es 180(4) = 720 kN · m, en sentido de las manecillas del reloj. De acuerdo con la regla de la mano derecha, el sentido positivo de M_x es contrario de las manecillas del reloj, lo que significa que M_x es negativo; es decir,

$$M_x = -720\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Respuesta}$$



(b)



(c)

Momento respecto al eje y Para calcular el momento respecto al eje *y*, nos referimos a la figura (c), en donde se representa el plano *xz*. Se observa que sólo la componente de la fuerza de 45 kN tiene un momento respecto al eje *y* ya que la componente de 180 kN es paralela al eje *y* y a que la componente de 60 kN interseca el eje *y*. Debido a que el brazo de momento de la componente de 45 kN es 4 m, el

momento de **F** respecto al eje y es $45(4) = 180$ kN · m, en sentido contrario de las manecillas del reloj. Por tanto, se tiene

$$M_y = 45(4) = 180 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Respuesta}$$

El signo del momento es positivo ya que la regla de la mano derecha determina un M_y positivo en sentido contrario de las manecillas del reloj.

Momento respecto al eje z El momento de **F** respecto al eje z es cero, debido a que **F** interseca ese eje. De aquí,

$$M_z = 0 \qquad \textit{Respuesta}$$

Parte 2

Considerando que el vector desde O hasta A en la figura (a) es $\mathbf{r}_{OA} = 4\mathbf{k}$ m, el momento de **F** respecto al punto O se puede calcular como sigue.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 45 & 180 & -60 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}(4)(180) + \mathbf{j}(4)(45)$$

$$= -720\mathbf{i} + 180\mathbf{j} \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Respuesta}$$

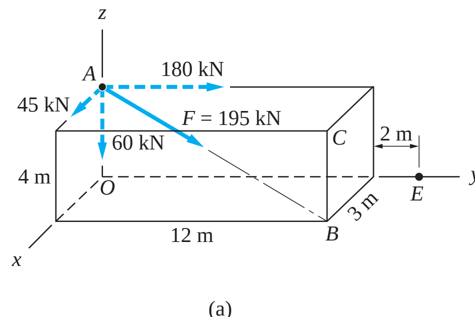
Comparando esta respuesta con $\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$, se observa que

$$M_x = -720 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad M_y = 180 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad M_z = 0$$

lo que concuerda con los resultados obtenidos en la parte 1.

Problema de ejemplo 2.6

La fuerza **F** del problema de ejemplo 2.5 se muestra de nuevo en la figura (a). 1. Determine el momento de **F** respecto al eje CE y 2. exprese el momento determinado en la parte 1 en forma vectorial.



(a)

Solución

Parte 1

Con referencia a la figura (a), se observa que no es práctico calcular el momento respecto al eje *CE* mediante el método escalar. Como el eje *CE* no es paralelo a un eje coordenado, la tarea de determinar la distancia perpendicular entre **F** y *CE* sería tediosa. Sin embargo, si se utiliza el método vectorial, el cálculo del momento es directo.

Para emplear el método vectorial primero se expresa la fuerza **F** en forma vectorial. Esto ya se hizo en la solución del problema de ejemplo 2.5:

$$\mathbf{F} = 45\mathbf{i} + 180\mathbf{j} - 60\mathbf{k} \text{ kN}$$

Luego se calcula el momento de **F** respecto a cualquier punto conveniente en el eje *CE*. La inspección de la figura (a) revela que sólo hay dos puntos convenientes de dónde elegir, los puntos *C* y *E*. Elijamos el punto *C*. Como se utilizará el producto cruz $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para calcular el momento respecto a *C*, el paso siguiente es elegir el vector **r** y escribirlo en forma vectorial (recuerde que **r** debe ser un vector desde el punto *C* hasta cualquier punto en la línea de acción de **F**). De la figura (a) se observa que hay dos elecciones convenientes para **r**: ya sea el vector desde *C* hasta *A* o bien el vector desde *C* hasta *B*. Eligiendo este último, se tiene

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{CB} = -4\mathbf{k} \text{ m}$$

Entonces el momento de **F** respecto a *C* es

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C &= \mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -4 \\ 45 & 180 & -60 \end{vmatrix} \\ &= 720\mathbf{i} - 180\mathbf{j} \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Observe que la componente *z* de $\mathbf{M}_C$ es cero. Para comprender este resultado, recuerde que la componente *z* de $\mathbf{M}_C$ es igual al momento de **F** respecto al eje *BC* (la línea paralela al eje *z* que pasa por *C*). Dado que **F** interseca *BC*, su momento respecto a *BC* se espera que sea cero.

En seguida se calcula el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}_{CE}$ dirigido desde el punto *C* hacia el punto *E*:

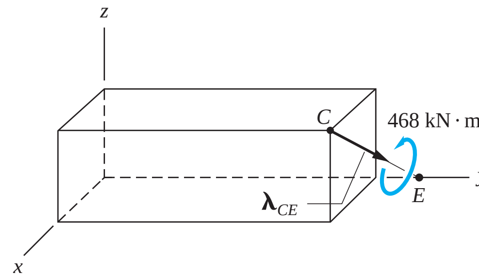
$$\boldsymbol{\lambda}_{CE} = \frac{\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|} = \frac{-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = -0.5571\mathbf{i} + 0.3714\mathbf{j} - 0.7428\mathbf{k}$$

Ahora se puede obtener el momento de $\mathbf{M}_C$ respecto al eje *CE* con la ecuación (2.11):

$$\begin{aligned} M_{CE} &= \mathbf{M}_C \cdot \boldsymbol{\lambda}_{CE} \\ &= (720\mathbf{i} - 180\mathbf{j}) \cdot (-0.5571\mathbf{i} + 0.3714\mathbf{j} - 0.7428\mathbf{k}) \\ &= -468 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Respuesta

El signo negativo indica que el sentido del momento es como se muestra en la figura (b), es decir opuesto al sentido asociado con $\boldsymbol{\lambda}_{CE}$.



(b)

También se podría calcular $\mathbf{M}_{CE}$ sin primero determinar $\mathbf{M}_C$ utilizando el triple producto escalar:

$$M_{CE} = \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{CE} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 45 & 180 & -60 \\ -0.5571 & 0.3714 & -0.7428 \end{vmatrix}$$

$$= -468 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Esto concuerda, por supuesto, con el resultado determinado antes.

Parte 2

Para expresar el momento de **F** respecto al eje *CE* en forma vectorial, se multiplica $\mathbf{M}_{CE}$ por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}_{CE}$, lo que da

$$\mathbf{M}_{CE} = M_{CE}\boldsymbol{\lambda}_{CE} = -468(-0.5571\mathbf{i} + 0.3714\mathbf{j} - 0.7428\mathbf{k})$$

$$= 261\mathbf{i} - 174\mathbf{j} + 348\mathbf{k} \text{ kN} \cdot \text{m}$$ *Respuesta*

No hay duda que emplear el método vectorial es conveniente cuando se quiere calcular el momento respecto a un eje como *CE*, que está inclinado relativo al sistema coordenado. Sin embargo, hay una desventaja con el formalismo vectorial: se puede perder fácilmente la apreciación de la naturaleza física del problema.

Problemas

2.47 Calcule el momento combinado de las tres fuerzas respecto a cada uno de los ejes. Utilice (a) el método escalar y (b) el método vectorial.

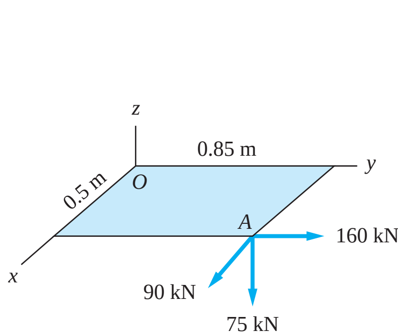


Fig. P2.47

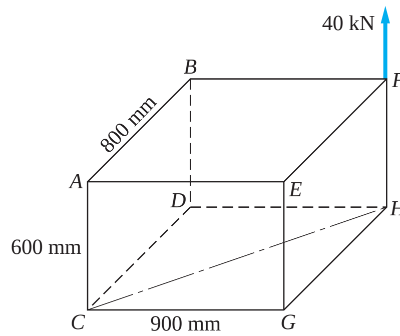


Fig. P2.48

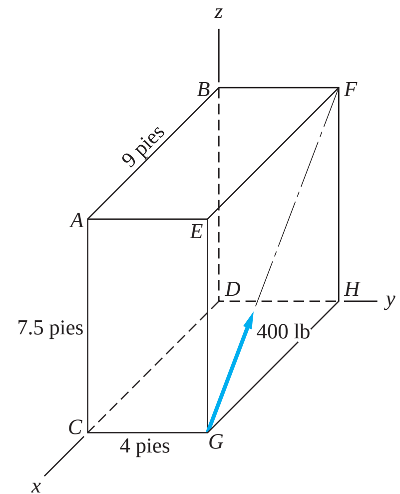


Fig. P2.49

2.48 Determine el momento de la fuerza de 40 kN respecto a los ejes siguientes: (a) *AB*; (b) *CD*; (c) *CG*; (d) *CH* y (e) *EG*.

2.49 Determine el momento de la fuerza de 400 lb respecto a cada uno de los ejes siguientes; (a) *AB*; (b) *CD*; (c) *BF*; (d) *DH* y (e) *BD*.

2.50 La magnitud de la fuerza **F** es 75 lb. Calcule el momento de **F** respecto al eje *x* utilizando (a) el método escalar y (b) el método vectorial.

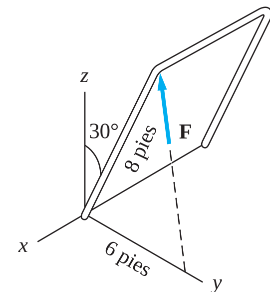


Fig. P2.50

2.51 La fuerza $\mathbf{F} = 12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ N se aplica a las tenazas del dispositivo de sujeción que se muestra. Determine el momento de **F** respecto (a) al eje *a* y (b) al eje *z*.

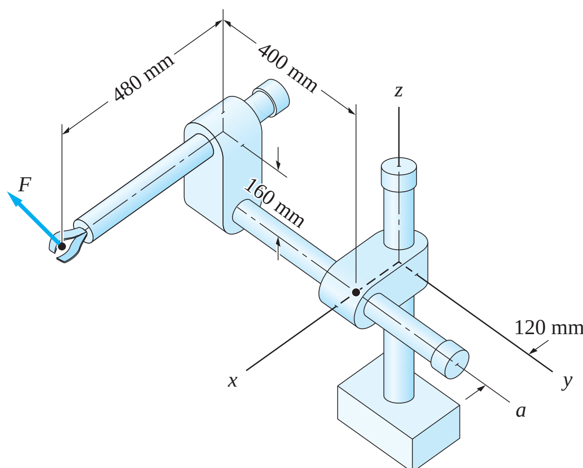


Fig. P2.51

2.52 El momento de la fuerza **F** respecto al eje x es 1080 N · m. Determine el momento de **F** respecto al eje AB.

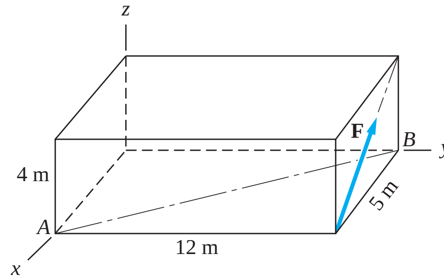


Fig. P2.52

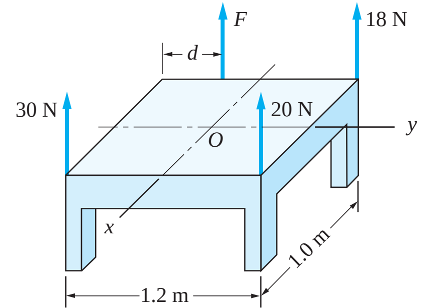


Fig. P2.53, P2.54

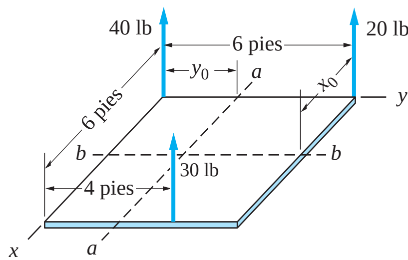


Fig. P2.55

2.53 Calcule el momento combinado de las cuatro fuerzas paralelas respecto al punto O (el centro de la mesa) utilizando $F = 40$ N y $d = 0.4$ m. Exprese su respuesta en forma vectorial.

2.54 Para levantar la mesa sin inclinarla, el momento combinado de las cuatro fuerzas paralelas debe ser cero respecto al eje x y al eje y (O es el centro de la mesa). Determine la magnitud de la fuerza **F** y la distancia d.

2.55 El momento combinado de las tres fuerzas es cero respecto al eje a-a y al eje b-b. Determine las distancias x_0 y y_0.

2.56 La puerta batiente se mantiene abierta por la cuerda AB. Si la tensión en la cuerda es $T = 40$ lb, determine su momento respecto al eje y.

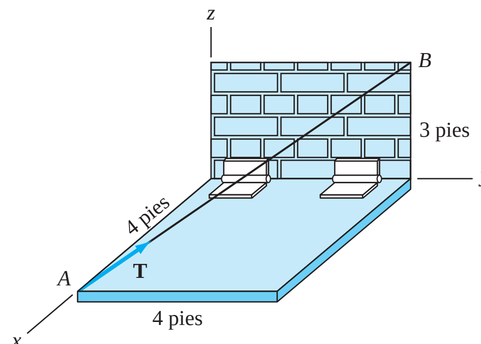


Fig. P2.56

2.57 Las fuerzas **P** y **Q** actúan sobre las manijas de la llave. Si $P = 32$ lb y $Q = 36$ lb, determine el momento combinado de las dos fuerzas respecto al eje z.

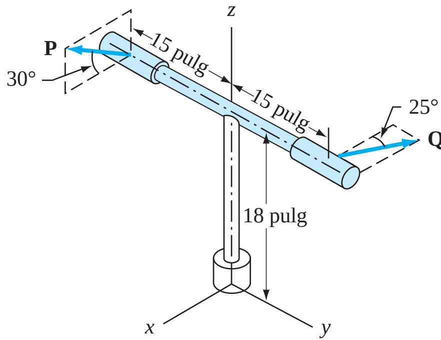


Fig. P2.57

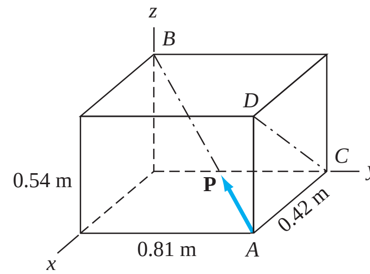


Fig. P2.58

2.58 La magnitud de la fuerza **P** es 480 N. Determine el momento de **P** respecto al eje *CD*. Exprese el resultado en forma vectorial.

2.59 El momento combinado de **P** y la fuerza de 20 lb respecto al eje *GB* es cero. Determine la magnitud de **P**.

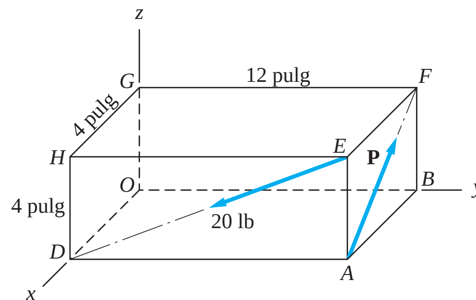


Fig. P2.59

2.60 Determine la magnitud de la fuerza **F** dado que su momento respecto al eje *BC* es 150 lb · pie.

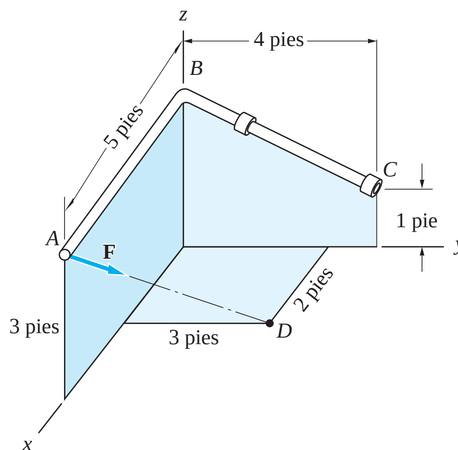


Fig. P2.60

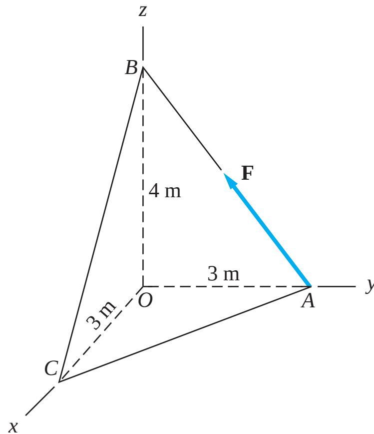


Fig. P2.61

***2.61** Dado que $F = 250$ N, determine el momento de **F** respecto al eje que es perpendicular al plano *ABC* y pasa por el punto *O*. Exprese su respuesta en forma vectorial.

2.62 Calcule el momento de la fuerza **F** respecto al eje *AD* utilizando (a) el punto *A* como el centro de momento y (b) el punto *D* como el centro de momento.

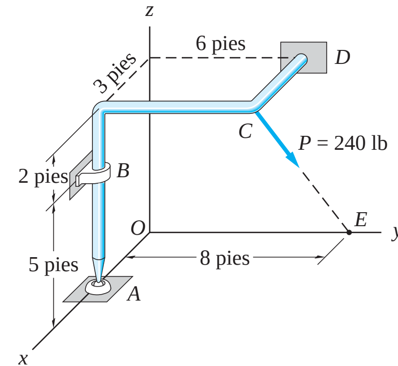


Fig. P2.62

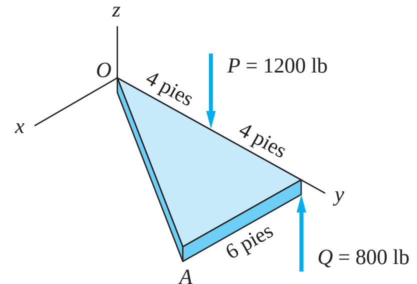


Fig. P2.63

2.63 Calcule el momento combinado de las dos fuerzas respecto al eje *OA*, utilizando (a) el método vectorial y (b) el método escalar (utilice trigonometría para encontrar el brazo de momento de cada fuerza respecto al eje *OA*).

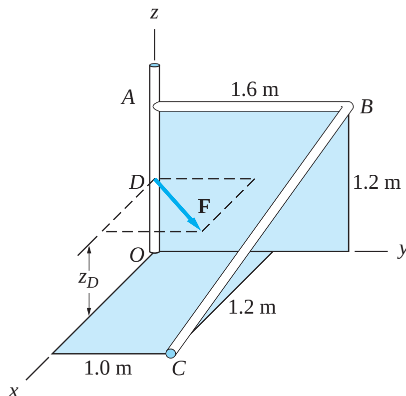


Fig. P2.64

2.64 La fuerza $\mathbf{F} = F(0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j})$ kN se aplica al marco en el punto $D(0, 0, z_D)$. Si el momento de **F** respecto al eje *BC* es cero, determine la coordenada z_D.

2.65 Determine el momento combinado de las cuatro fuerzas que actúan sobre las poleas respecto al eje *AB* (los puntos *A* y *B* son los centros de las poleas).

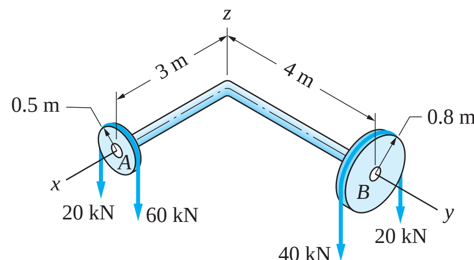


Fig. P2.65

2.66 El eje flexible *AB* de la llave se dobla en un arco horizontal con un radio de 24 pulg. Las dos fuerzas de 20 lb, que son paralelas al eje *z*, se aplican a la manija *CD*, como se muestra. Determine el momento combinado de las dos fuerzas de 20 lb respecto al eje *x* (el eje de cubo de la llave en el punto *B*).

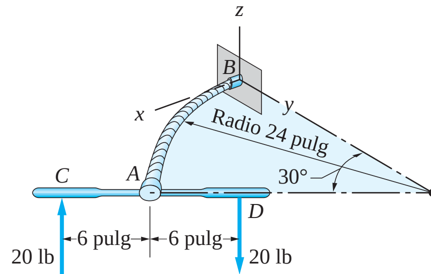


Fig. P2.66

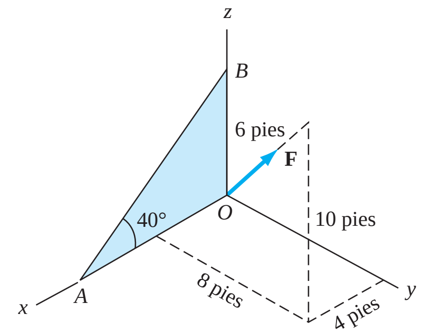


Fig. P2.67

2.67 La magnitud de la fuerza **F** es 120 lb. Encuentre el momento de **F** respecto al eje *AB* utilizando (a) el método vectorial y (b) el método escalar.

2.7 Pares

Como se indicó antes, una fuerza tiene dos efectos sobre un cuerpo rígido: traslación debida a la propia fuerza y rotación debida al momento de la fuerza. Un par, por otro lado, es un efecto puramente rotacional; tiene un momento, pero no una fuerza resultante. Los pares tienen una función importante en el análisis de sistemas de fuerzas.

a. Definición

Dos fuerzas paralelas no colineales de magnitud igual y opuestas en dirección se conocen como un *par*.

En la figura 2.14 se muestra un par común. Las dos fuerzas de magnitud igual F están opuestamente dirigidas a lo largo de líneas de acción que están separadas por la distancia perpendicular d. (En una descripción vectorial de las fuerzas, una de las fuerzas se identificará **F** y la otra –**F**.) Las líneas de acción de las dos fuerzas determinan un plano que se denomina *plano del par*. Las dos fuerzas que forman un par tienen algunas propiedades interesantes, que serán aparentes cuando se calcule su momento combinado respecto a un punto.

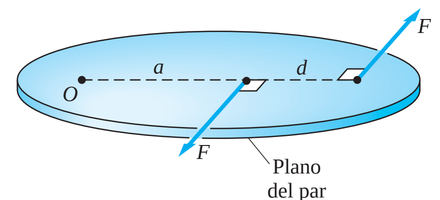


Fig. 2.14

b. Momento de un par respecto a un punto

El momento de un par respecto a un punto es la suma de los momentos de las dos fuerzas que forman el par. Al calcular el momento de un par respecto a un punto, se puede emplear el método escalar (fuerza por la distancia perpendicular) o bien el método vectorial ($\mathbf{r} \times \mathbf{F}$). Para fines de ilustración, se calculará el momento de un par con los dos métodos. Aplicar dos métodos de análisis para determinar la misma cantidad puede parecer redundante, pero es instructivo ya que cada método enfatiza características diferentes de un par.

Cálculo escalar Calculemos el momento del par que se muestra en la figura 2.14 respecto al punto O. Observe que O es un punto arbitrario en el plano del par y que

se ubica a una distancia a desde la fuerza a la izquierda. La suma de los momentos respecto al punto O para las dos fuerzas es

$$\circlearrowleft + \quad M_O = F(a + d) - F(a) = Fd \tag{2.17}$$

Observe que el momento del par respecto al punto O es *independiente* de la ubicación de O, debido a que el resultado es independiente de la distancia a.

Del análisis anterior, se observa que un par posee dos características importantes: 1. un par no tiene fuerza resultante ($\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$) y 2. el momento de un par es el mismo respecto a cualquier punto en el plano del par.

Cálculo vectorial Cuando las dos fuerzas que forman un par se expresan como vectores, se pueden denotar por **F** y –**F**, como se muestra en la figura 2.15. Los puntos identificados en la figura son A, cualquier punto en la línea de acción de **F**; B, cualquier punto en la línea de acción de –**F** y O, un punto arbitrario en el espacio (no necesariamente que se encuentre en el plano del par). Los vectores $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$ se trazan desde el punto O hasta los puntos A y B, respectivamente. El vector $\mathbf{r}_{BA}$ conecta los puntos B y A. Utilizando el producto cruz para evaluar el momento de un par respecto al punto O, se obtiene

$$\mathbf{M}_O = [\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}] + [\mathbf{r}_{OB} \times (-\mathbf{F})] = (\mathbf{r}_{OA} - \mathbf{r}_{OB}) \times \mathbf{F}$$

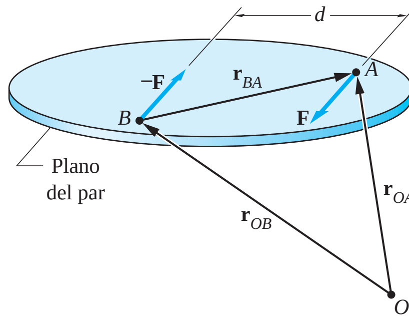


Fig. 2.15

Como $\mathbf{r}_{OA} - \mathbf{r}_{OB} = \mathbf{r}_{BA}$, el momento del par respecto al punto O se reduce a

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} \tag{2.18}$$

lo que confirma que el momento del par respecto al punto O es independiente de la ubicación de O. Si bien la elección del punto O determina $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$, ninguno de estos vectores aparece en la ecuación (2.18). Entonces se concluye lo siguiente:

El momento de un par es el mismo respecto a cualquier punto.

En otras palabras, el momento de un par es un *vector libre*. (Recuerde que, en el cálculo escalar, el punto O estaba restringido a puntos en el plano del par. Ahora se observa que esta restricción es innecesaria; es decir O puede ser cualquier punto en el espacio.) En contraste, el momento de una fuerza respecto a un punto (el centro de momento) es un vector fijo, debido a que el momento depende de la ubicación del centro de momento.

c. Pares equivalentes

Como un par no tiene una fuerza resultante, su único efecto sobre un cuerpo rígido es su momento. Por esta razón, dos pares que tienen el mismo momento se dice que son *equivalentes* (tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido). En la figura 2.16 se ilustran las cuatro operaciones que se pueden efectuar en un par sin cambiar su momento; todos los pares que se muestran en la figura son equivalentes. Las operaciones son:

1. Cambio de la magnitud F de cada fuerza y la distancia perpendicular d mientras se mantiene constante el producto Fd
2. Rotación del par en su plano
3. Desplazamiento del par a una posición paralela en su plano
4. Desplazamiento del par a un plano paralelo

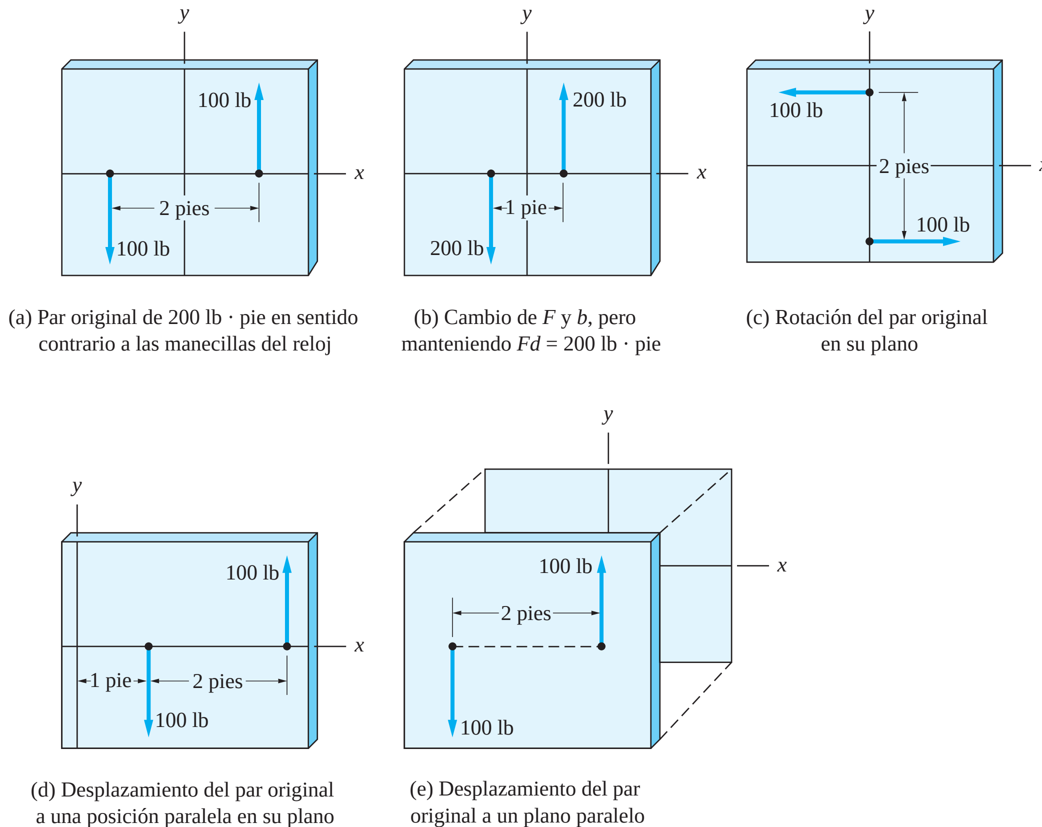
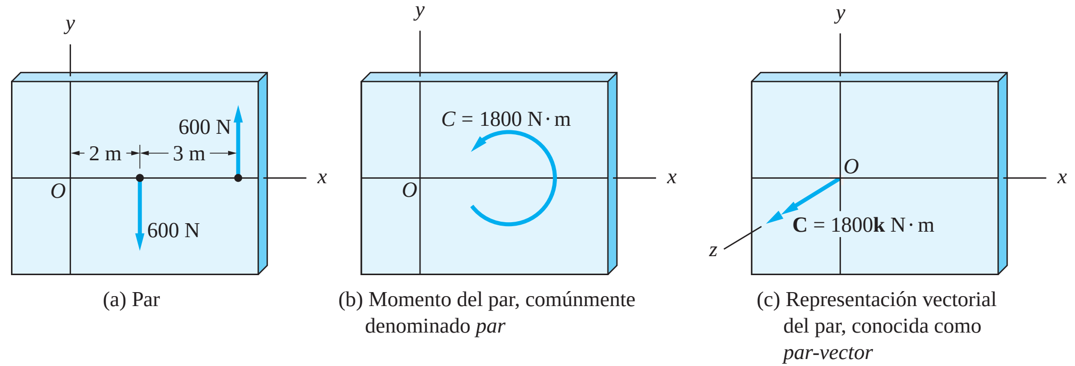


Fig. 2.16

d. Notación y terminología

Considere el par que se muestra en la figura 2.17(a). El momento de este par, como se muestra en la figura 2.17(b), tiene una magnitud de $C = 1800$ N · m y está dirigido en sentido contrario al horario en el plano xy. Como el único efecto sobre un cuerpo rígido de un par es su momento, las representaciones en las figuras 2.17(a) y (b) son equivalentes. Es decir, se puede remplazar un par que actúe sobre un cuerpo



(a) Par

(b) Momento del par, comúnmente denominado *par*

(c) Representación vectorial del par, conocida como *par-vector*

Fig. 2.17

rígido por su momento sin cambiar el efecto externo sobre el cuerpo. Esta equivalencia también se aplica a la terminología, en vez de referirse a C como el *momento del par*, suele denominarse simplemente *par*.

En la figura 2.17(c) se muestra el mismo par (estrictamente hablando, el momento del par) como un vector, al que llamaremos *par-vector*. El par-vector es perpendicular al plano del par y su dirección se determina por la regla de la mano derecha. La elección del punto O para la ubicación del par-vector fue arbitraria. Como es un vector libre, el par-vector se podría colocar en cualquier parte en la figura.

Utilizaremos las representaciones escalares y vectoriales en las figuras 2.17(b) y (c) intercambiablemente, eligiendo la que sea más conveniente para el problema en turno.

e. *Suma y descomposición de pares*

Como los pares son vectores, se pueden agregar aplicando las reglas usuales de la suma vectorial. Como son vectores libres, el requisito de que los pares que se sumarán deben tener un punto común de aplicación no aplica. Esto difiere de la suma de fuerzas, las cuales se pueden agregar sólo si son concurrentes. La concurrencia también se requiere para la suma de momentos de fuerzas respecto a puntos, debido a que éstas están fijas a un centro de momento. Se deduce que se debe tener cuidado al representar momentos de fuerzas y pares como vectores; es fácil confundir estos dos conceptos. Para minimizar la posibilidad de confusión, se utilizará **M** para denotar momentos de fuerzas y se reservará **C** para pares.

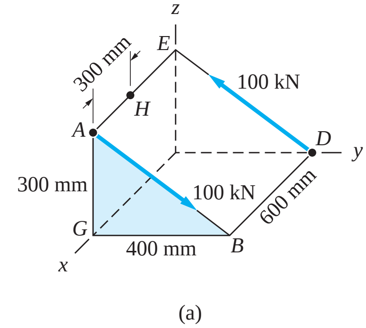
La descomposición de pares no es diferente de la de momentos de fuerzas. Por ejemplo, el momento de un par **C** respecto a un eje AB se puede calcular con la ecuación (2.11) remplazando $\mathbf{M}_O$ por **C**:

$$M_{AB} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{2.19}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector unitario en la dirección del eje. Observe que el subíndice O, que indicó que el momento se debe tomar respecto al punto O que se encuentra en el eje AB ya no aparece en la ecuación (2.19). La razón es, por supuesto, debido a que el momento de **C** es el mismo respecto a cada punto. Igual que en el caso de momentos de fuerzas, $\mathbf{M}_{AB}$ es igual a la componente rectangular de **C** en la dirección de AB y es una medida de la tendencia de **C** a girar un cuerpo respecto al eje AB.

Problema de ejemplo 2.7

Para el par que se muestra en la figura (a), determine: 1. el par-vector correspondiente y 2. el momento del par respecto al eje *GH*.



(a)

Solución

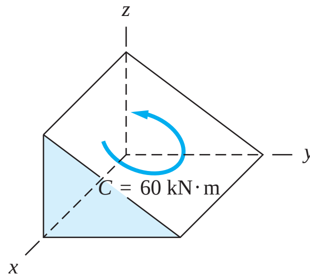
Parte 1

Un método para determinar el par-vector es multiplicar la magnitud del par por el vector unitario en su dirección. La magnitud del par es

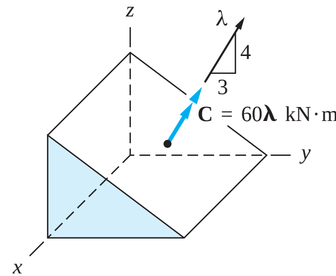
$$Fd = 100(0.6) = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El sentido del par se muestra en la figura (b), contrario de las manecillas del reloj observándolo desde arriba sobre el plano del par. Designando $\boldsymbol{\lambda}$ como un vector unitario perpendicular al plano del par, como se muestra en la figura (c), el par-vector **C** se puede escribir como $\mathbf{C} = 60\boldsymbol{\lambda}$ kN · m. Dado que $\boldsymbol{\lambda}$ es perpendicular a la línea *AB*, se puede observar que $\boldsymbol{\lambda} = (3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})/5$ (recordando que las líneas perpendiculares tienen pendientes recíprocas negativas). Por tanto, el par-vector es

$$\mathbf{C} = 60\lambda = 60\left(\frac{3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{5}\right) = 36\mathbf{j} + 48\mathbf{k} \text{ kN} \cdot \text{m}$$ *Respuesta*



(b)



(c)

Solución alternativa Dado que el par-vector es igual al momento del par respecto a cualquier punto, también se puede determinar sumando los momentos de las dos fuerzas que forman el par respecto a cualquier punto conveniente, como el punto B. Designando **F** como la fuerza de 100 kN que actúa a lo largo de la línea *DE*, se tiene

$$\mathbf{F} = 100\boldsymbol{\lambda}_{DE} = 100\frac{\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{DE}|} = 100\left(\frac{-0.4\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k}}{0.5}\right)$$
$$= -80\mathbf{j} + 60\mathbf{k} \text{ kN}$$

Igualando **C** al momento de **F** respecto al punto B (la otra fuerza del par pasa por B), se obtiene

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}_{BD} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & 60 \end{vmatrix}$$

$$= 36\mathbf{j} + 48\mathbf{k} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

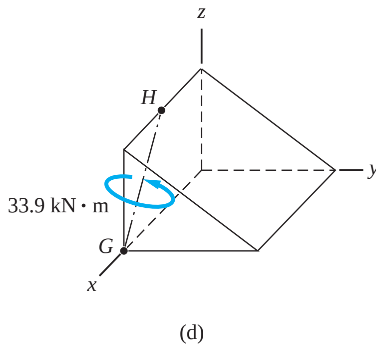
lo que concuerda con la respuesta determinada antes.

En esta solución, la elección del punto B como centro de momento fue arbitraria. Como el momento de un par es el mismo respecto a cualquier punto, se hubiera obtenido el mismo resultado sin importar qué punto se hubiera elegido como el centro de momento.

Parte 2

El método más directo para determinar el momento del par respecto al eje GH es $\mathbf{M}_{GH} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{GH}$. Como **C** ya se calculó, todo lo que se necesita hacer es calcular el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}_{GH}$ y evaluar el producto punto. Con referencia a la figura (a), se tiene

$$\boldsymbol{\lambda}_{GH} = \frac{\overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{GH}|} = \frac{-0.3\mathbf{i} + 0.3\mathbf{k}}{0.3\sqrt{2}} = -0.7071\mathbf{i} + 0.7071\mathbf{k}$$



(d)

De aquí que el momento del par respecto al eje GH sea

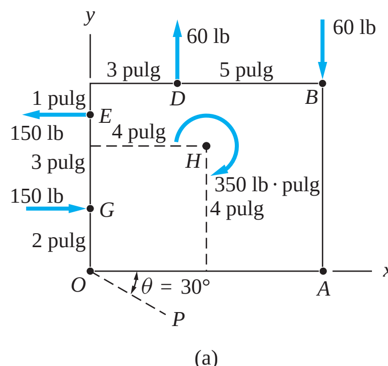
$$M_{GH} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{GH} = (36\mathbf{j} + 48\mathbf{k}) \cdot (-0.7071\mathbf{i} + 0.7071\mathbf{k})$$

$$= +33.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$ *Respuesta*

El resultado se ilustra en la figura (d). Si necesita ayuda al interpretar el signo positivo en la respuesta, consulte de nuevo la figura 2.9.

Problema de ejemplo **2.8**

La placa plana que se muestra en la figura (a) está sometida a tres pares. Remplace los tres pares por 1. un par-vector; 2. dos fuerzas, una actuando a lo largo de la línea



(a)

OP y la otra trabajando en el punto *A*, y 3. el menor par de fuerzas, una procediendo en el punto *O* y la otra en el punto *A*.

Solución

Parte 1

Las magnitudes (*Fd*) y los sentidos de los pares, todos los cuales se encuentran en el plano *xy*, se indican a continuación.

- Par en *H*: 350 lb · pulg en sentido de las manecillas del reloj.
- Par que actúa en *GE*: (150)(3) = 450 lb · pulg en sentido contrario de las manecillas del reloj.
- Par que actúa en *DB*: (60)(5) = 300 lb · pulg en sentido de las manecillas del reloj.

Como los tres pares se encuentran en el mismo plano, se pueden sumar algebraicamente y su total es la resultante del par C^R. Eligiendo el sentido contrario al horario como positivo, se obtiene

$$\circlearrowleft + \quad C^R = -350 + 450 - 300 = -200 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

El signo negativo muestra que el sentido de C^R es el de las manecillas del reloj. Por tanto, el par-vector correspondiente $\mathbf{C}^R$ es, de acuerdo con la regla de la mano derecha, en la dirección *z* negativa. Se deduce que

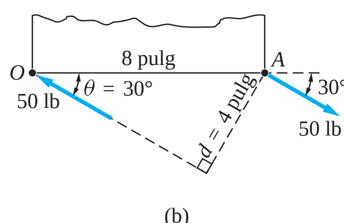
$$\mathbf{C}^R = -200\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pulg} \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que en la figura (a) se dan más dimensiones que las necesarias para obtener la solución. Las únicas dimensiones relevantes son las distancias entre las fuerzas de 60 lb (5 pulg) y las fuerzas de 150 lb (3 pulg).

Parte 2

Las dos fuerzas que son equivalentes a los tres pares mostradas en la figura (a) deben, por supuesto, formar un par. En el problema se indica que una de las fuerzas actúa a lo largo de la línea *OP* y la otra actúa en el punto *A*.

Debido a que las dos fuerzas que forman un par deben tener líneas de acción paralelas, la línea de acción de la fuerza en el punto *A* también debe ser paralela a *OP*. De la figura (b), se observa que la distancia perpendicular *d* entre las líneas de acción de las dos fuerzas es $d = 8 \text{ sen } 30° = 4$ pulg. Como ya se determinó que la magnitud del par resultante es 200 lb · pulg, las magnitudes de las fuerzas que forman el par están dadas por $C^R/d = 200/4 = 50$ lb. El sentido de cada fuerza debe ser consistente con el sentido horario de C^R. El resultado final se muestra en la figura (b).



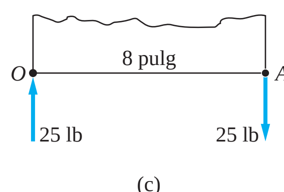
(b)

Respuesta

Parte 3

Aquí se deben determinar las dos fuerzas menores actuando en los puntos O y A que sean equivalentes a los tres pares mostrados en la figura (a). Por tanto, las dos fuerzas que se deben determinar tienen que formar un par que sea equivalente al par resultante (200 lb · pulg, en sentido horario).

La magnitud de un par (Fd) es igual al producto de la magnitud de las fuerzas que forman el par (F) y la distancia perpendicular (d) entre las fuerzas. Para un par de magnitud dada, las fuerzas menores se obtendrán cuando la distancia perpendicular d sea tan grande como sea posible. De la figura (b) se puede observar que para las fuerzas que actúan en los puntos O y A, la d mayor corresponderá a $\theta = 90°$, dando $d = 8$ pulg. Por tanto, las magnitudes de las fuerzas menores se obtienen con $C^R/d = 200/8 = 25$ lb. Estos resultados se muestran en la figura (c), donde de nuevo se debe observar el sentido de las fuerzas.

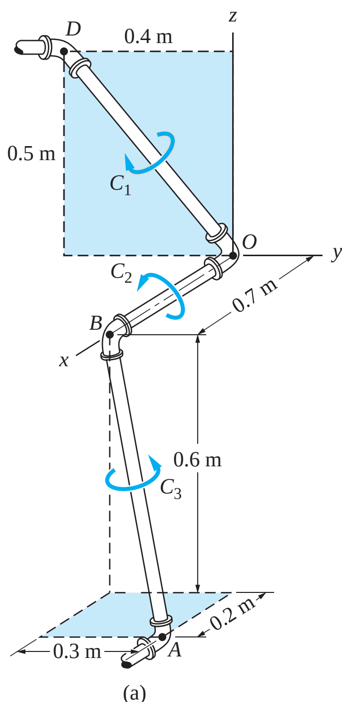


(c)

Respuesta

Problema de ejemplo 2.9

Una sección de un sistema de tuberías se somete a los tres pares que se muestran en la figura (a). Determine la magnitud de par-vector resultante $\mathbf{C}^R$ y sus cosenos directores, dado que las magnitudes de los pares aplicados son $C_1 = 50$ N · m, $C_2 = 90$ N · m y $C_3 = 140$ N · m.



(a)

Solución

Aplicando la regla de la mano derecha a cada uno de los tres pares en la figura (a), se observa que los par-vectores correspondientes estarán dirigidos como sigue: $\mathbf{C}_1$, desde el punto D hacia el punto O; $\mathbf{C}_2$, desde el punto O hacia el punto B y $\mathbf{C}_3$, desde el punto A hacia el punto B. Como estos par-vectores no tienen las mismas direcciones, el método más práctico para determinar su resultante es emplear la ecuación vectorial

$$\mathbf{C}^R = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3$$

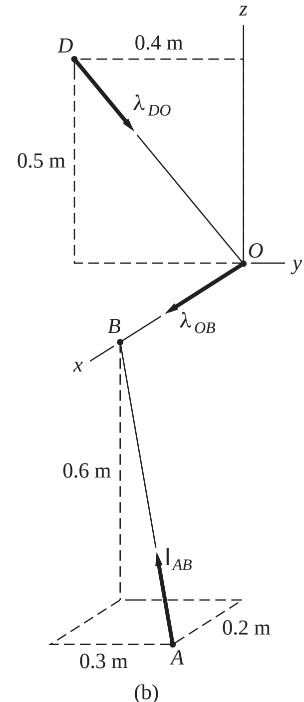
Utilizando los tres vectores unitarios que se muestran en la figura (b), los par-vectores $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ y $\mathbf{C}_3$ se pueden escribir como

$$\mathbf{C}_1 = C_1\,\boldsymbol{\lambda}_{DO} = 50\frac{\overrightarrow{DO}}{|\overrightarrow{DO}|} = 50\left(\frac{0.4\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}}{0.6403}\right)$$
$$= 31.24\mathbf{j} - 39.04\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\mathbf{C}_2 = C_2\,\boldsymbol{\lambda}_{OB} = 90\mathbf{i}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{C}_3 = C_3\,\boldsymbol{\lambda}_{AB} = 140\,\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 140\left(\frac{-0.2\mathbf{i} - 0.3\mathbf{j} + 0.6\mathbf{k}}{0.7000}\right)$$

$$= -40\mathbf{i} - 60\mathbf{j} + 120\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}$$



(b)

Sumando estos tres par-vectores da

$$\mathbf{C}^R = 50\mathbf{i} - 28.76\mathbf{j} + 80.96\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

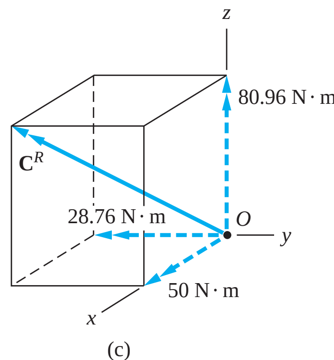
La magnitud de $\mathbf{C}^R$ es

$$C^R = \sqrt{(50)^2 + (-28.76)^2 + (80.96)^2} = 99.41\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Respuesta}$$

y los cosenos directores de $\mathbf{C}^R$ son las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ dirigido a lo largo de $\mathbf{C}^R$.

$$\lambda_x = \frac{50}{99.41} = 0.503 \qquad \lambda_y = -\frac{28.76}{99.41} = -0.289 \qquad \lambda_z = \frac{80.96}{99.41} = 0.814 \qquad \textit{Respuesta}$$

El par-vector resultante se muestra en la figura (c). Si bien $\mathbf{C}^R$ se muestra en el punto O, se debe recordar que los pares son vectores libres, de manera que $\mathbf{C}^R$ se podría mostrar actuando en cualquier punto.



(c)

El par-vector $\mathbf{C}^R$ se puede representar como dos fuerzas paralelas iguales y opuestas. Sin embargo, como las dos fuerzas se encontrarán en un plano perpendicular al par-vector, en este caso un plano inclinado, esta representación aquí es inconveniente.

En general, dadas dos fuerzas que forman un par, el par-vector correspondiente se determina con facilidad (por ejemplo, sumando los momentos de las dos fuerzas respecto a cualquier punto). Sin embargo, dado un par-vector, no siempre es conveniente (o incluso deseable) determinar dos fuerzas equivalentes.

Problemas

2.68 ¿Cuáles de los sistemas son equivalentes al par en (a)?

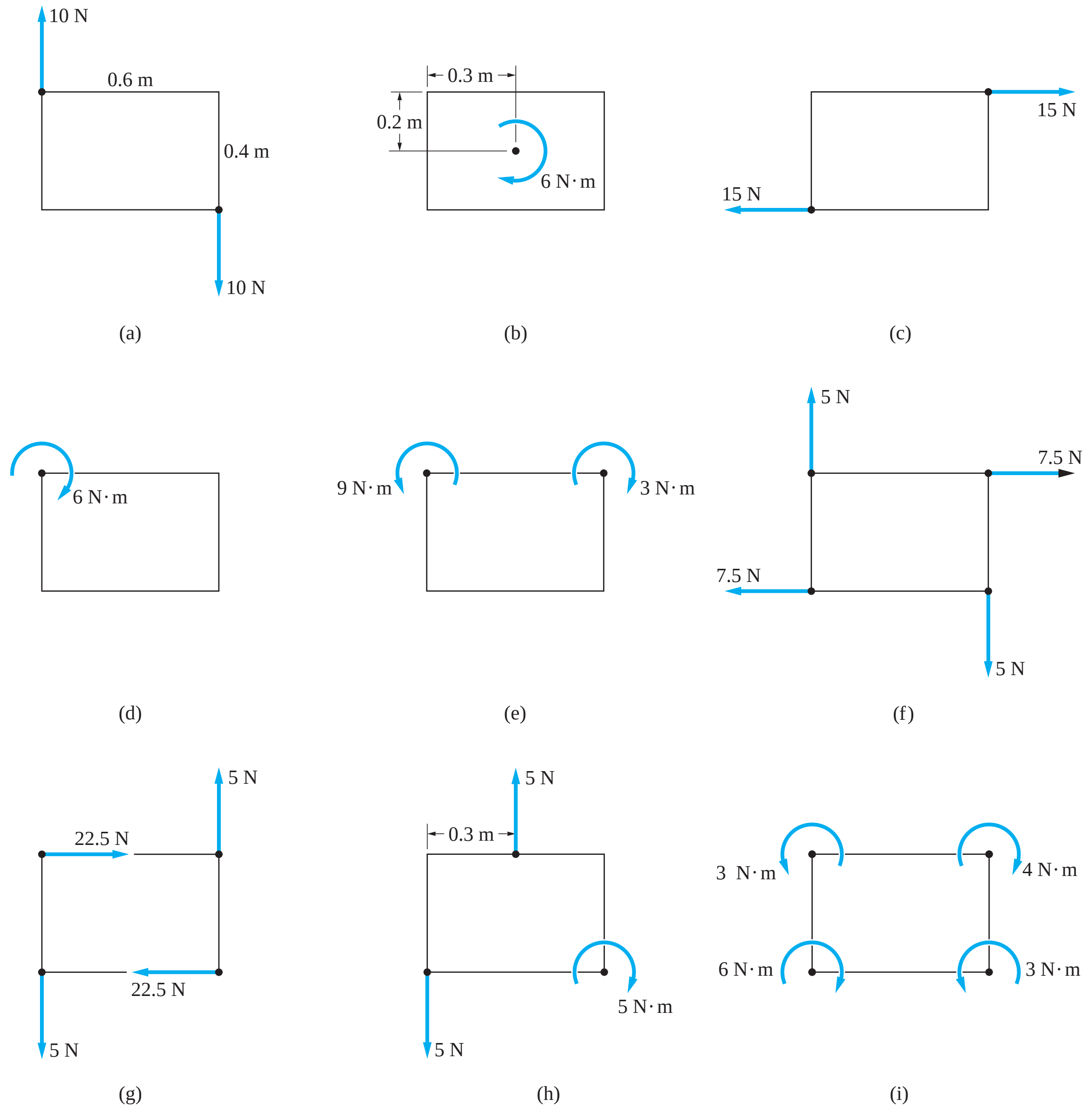


Fig. P2.68

2.69 ¿Cuáles de los sistemas son equivalentes al par en (a)?

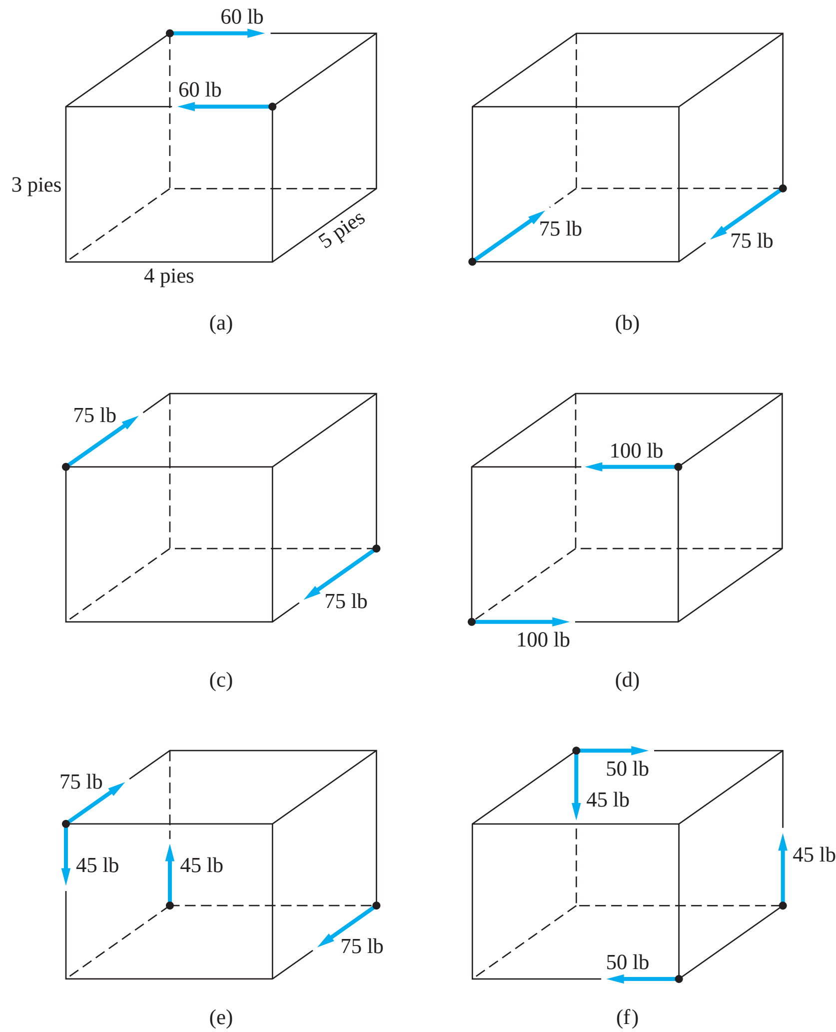


Fig. P2.69

2.70 Remplace los dos pares mostrados por un solo par equivalente.

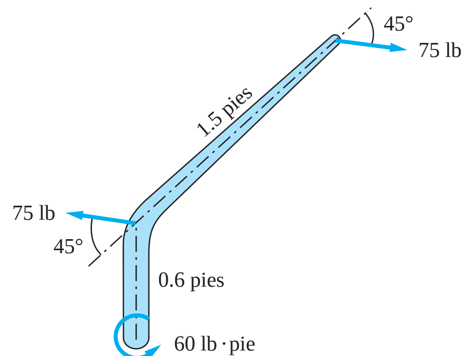


Fig. P2.70

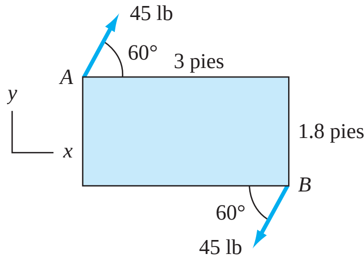


Fig. P2.71

2.71 Determine la representación vectorial del par indicado.

2.72 Determine la magnitud del par único que sea equivalente a los dos pares mostrados.

2.73 Calcule el momento combinado del par **C** y la fuerza **P** respecto al eje *AB*. Utilice $C = 80$ N · m y $P = 400$ N.

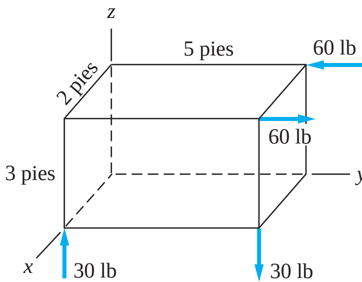


Fig. P2.72

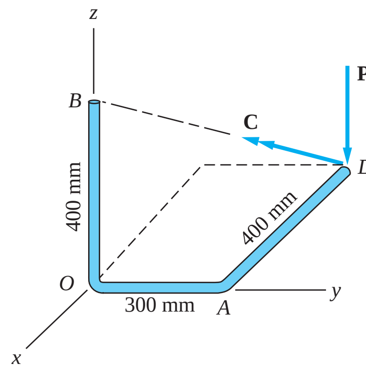


Fig. P2.73

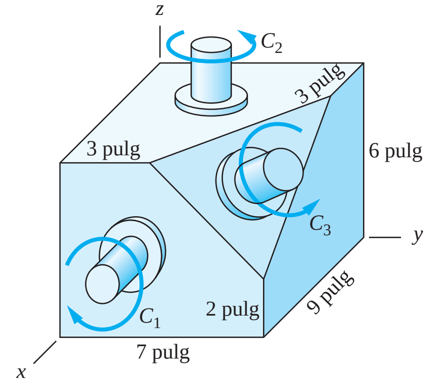


Fig. P2.74

***2.74** Determine el par-vector que sea equivalente a los tres pares que actúan sobre la caja de engranajes, si $C_1 = 200$ lb · pulg, $C_2 = 140$ lb · pulg y $C_3 = 220$ lb · pulg.

2.75 Las dos fuerzas de magnitud $F = 24$ kN forman un par. Determine el par-vector correspondiente.

2.76 El par actúa sobre las manijas del mecanismo de dirección. En la posición que se muestra, el momento aplicado por el par respecto al eje *z* es cero. Determine la distancia *b*. Utilice $\mathbf{F} = 200\mathbf{i} - 110\mathbf{j} - 80\mathbf{k}$ kN.

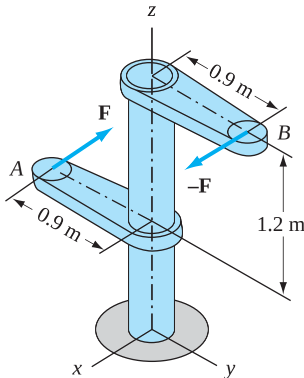


Fig. P2.75

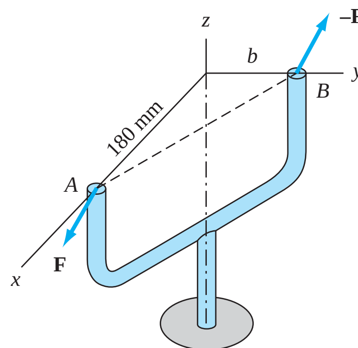


Fig. P2.76

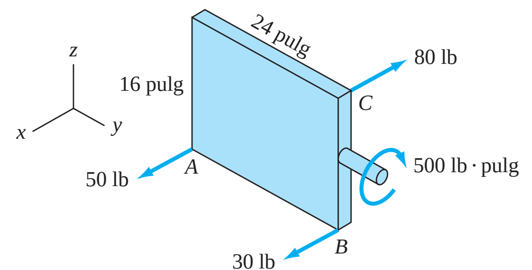


Fig. P2.77

2.77 El sistema fuerza-par que se muestra se puede remplazar por un par único equivalente $\mathbf{C}^R$. Determine $\mathbf{C}^R$.

2.78 Un par de magnitud 360 lb · pie se aplica respecto a *AB* del eje motriz (el eje motriz está conectado mediante juntas universales en los puntos *B* y *C*). Calcule el momento del par aplicado respecto a la porción *CD* cuando el eje motriz está en la posición indicada.

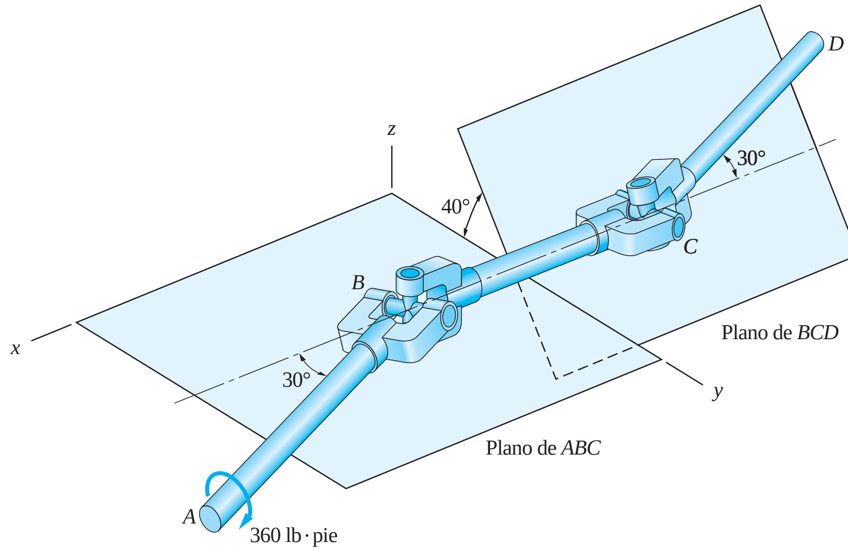


Fig. P2.78

2.79 El brazo *ABCD* del robot industrial se encuentra en un plano vertical que está inclinado a 40° con el plano *yz*. El brazo *CD* forma un ángulo de 30° con la vertical. Una llave de cubo unida en el punto *D* aplica un par de 52 lb · pie respecto al brazo *CD*, dirigido como se muestra. (a) Encuentre el par-vector que represente el par dado. (b) Determine el momento del par respecto al eje *z*.

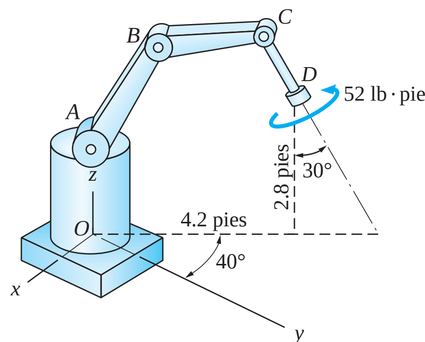


Fig. P2.79

2.80 En la figura se muestra la mitad de un acoplamiento universal conocido como *junta de Hooke*. El acoplamiento está sometido a los tres pares mostrados: (a) el par de entrada que consiste de fuerzas de magnitud *P*; (b) el par de salida C_0 y (c) el par formado por las reacciones en los cojinetes de magnitud *R*. Si la resultante de estos pares es cero, calcule *R* y C_0 para $P = 600$ lb.

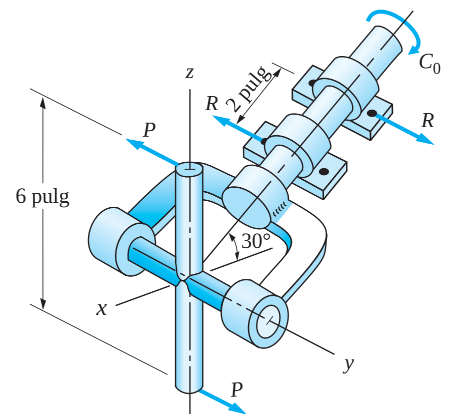


Fig. P2.80

2.81 La columna de dirección del mecanismo de dirección de piñón y cremallera se encuentra en el plano *xz*. El tubo *AB* del engrane de dirección está unido al chasís del automóvil en *A* y *B*. Cuando el volante se gira, el conjunto se somete a los cuatro pares mostrados: el par de 3 N · m aplicado por el conductor al volante, dos pares de 1.8 N · m (uno en cada neumático) y el par formado por las dos fuerzas de magnitud *F* que actúan en *A* y *B*. Si el par resultante actuando sobre el mecanismo de dirección es cero, determine *F* y el ángulo θ (la magnitud y dirección de las reacciones en los cojinetes).

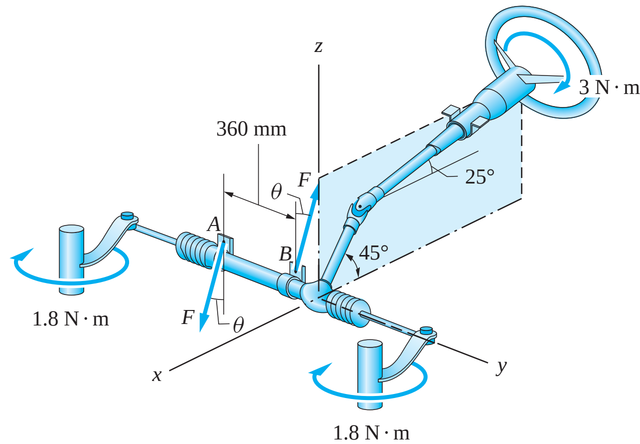
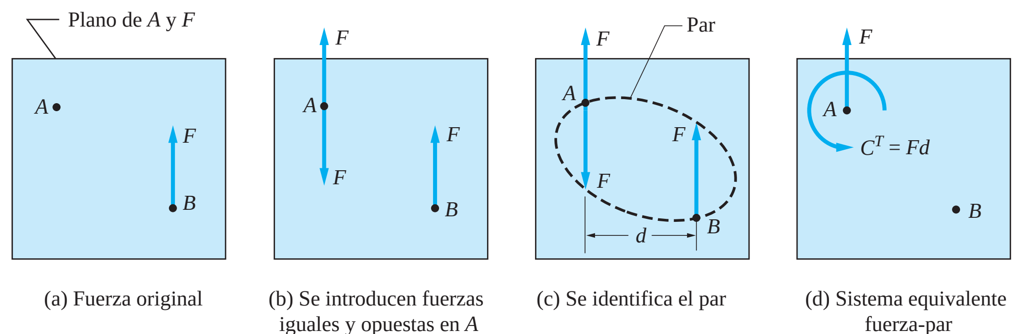


Fig. P2.81

2.8 *Cambio de la línea de acción de una fuerza*

En esta sección se muestra cómo cambiar la línea de acción de una fuerza sin afectar su efecto externo sobre un cuerpo rígido. Este tema constituye la base del capítulo siguiente, en donde se analizan las resultantes de sistemas de fuerzas.

Con referencia a la figura 2.18(a), considere el problema de mover la fuerza de magnitud *F* del punto *B* al *A*. Simplemente no se puede mover la fuerza a *A*, debido a que esto cambiaría su línea de acción y por consiguiente se alteraría el efecto rotacional (el momento) de la fuerza. Sin embargo, se puede contrarrestar este cambio



(a) Fuerza original (b) Se introducen fuerzas iguales y opuestas en *A* (c) Se identifica el par (d) Sistema equivalente fuerza-par

Fig. P2.18

introduciendo un par que restaure el efecto rotacional a su estado original. El procedimiento para determinar este par se ilustra en la figura 2.18 y consiste de los dos pasos siguientes:

- Se introducen dos fuerzas iguales y opuestas de magnitud F en el punto A, como se muestra en la figura 2.18(b). Estas fuerzas son paralelas a la fuerza original en B. Como las fuerzas en A no tienen un efecto externo sobre un cuerpo rígido, los sistemas de fuerzas en las figuras 2.18(a) y (b) son equivalentes.
- Se identifican las fuerzas que forman un par, como se hizo en la figura 2.18(c). La magnitud de este par es $C^T = Fd$, donde d es la distancia entre las líneas de acción de las fuerzas en A y B. De esta manera la tercera fuerza y C^T constituyen el *sistema fuerza-par* que se muestra en la figura 2.18(d) y que es equivalente a la fuerza original en la figura 2.18(a).

Nos referimos al par C^T como *par de transferencia* ya que es el par que se debe introducir cuando una fuerza se transforma de una línea de acción a otra. Del procedimiento ilustrado en la figura 2.18 se observa lo siguiente

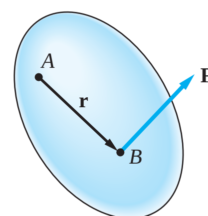
El par de transferencia es igual al momento de la fuerza original (actuando en B) respecto al punto de transferencia A.

En terminología vectorial, la línea de acción de una fuerza $\mathbf{F}$ se puede cambiar a una línea paralela, siempre que se introduzca el par de transferencia

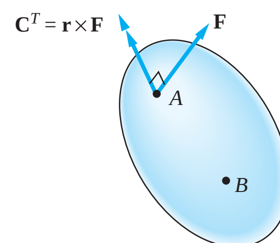
$$\mathbf{C}^T = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{2.20}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector trazado desde el punto de transferencia A hasta el punto de aplicación B de la fuerza original, como se ilustra en la figura 2.19. Es convencional mostrar $\mathbf{C}^T$ actuando en el punto de transferencia, como en la figura 2.19(b), pero no se debe olvidar que un par es un vector libre que se podría colocar en cualquier parte.

De acuerdo con las propiedades del producto cruz en la ecuación (2.20), el par-vector $\mathbf{C}^T$ es perpendicular a $\mathbf{F}$. Así pues, una fuerza en un punto dado siempre se puede remplazar por una fuerza en un punto diferente y un par-vector que sea perpendicular a la fuerza. Lo inverso también es válido: una fuerza y un par-vector que son mutuamente perpendiculares siempre se pueden reducir a una fuerza única equivalente invirtiendo el procedimiento delineado en las figuras 2.18 y 2.19.



(a) Fuerza original

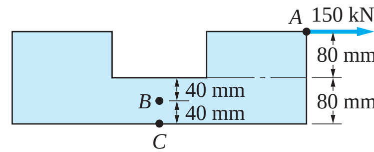


(b) Sistema equivalente fuerza-par

Fig. 2.19

Problema de ejemplo 2.10

Para la parte de una máquina que se muestra en la figura (a), remplace la carga aplicada de 150 kN que actúa en el punto A por 1. un sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en el punto B y 2. dos fuerzas horizontales, una actuando en el punto B y la otra actuando en el punto C.



(a)

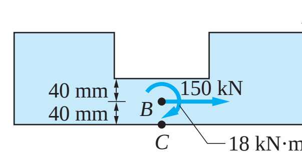
Solución

Parte 1

Primero se desplaza la fuerza de 150 kN al punto B y luego se introduce el par de transferencia igual al momento de la fuerza de 150 kN en la figura (a) respecto al punto B, dado por

$$\circlearrowleft+ \quad C^T = M_B = -150(0.080 + 0.040) = -18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El signo negativo indica que el sentido del par es horario. El sistema equivalente fuerza-par se muestra en la figura (b).

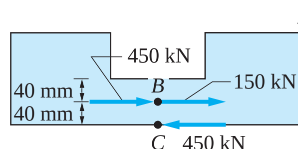


(b)

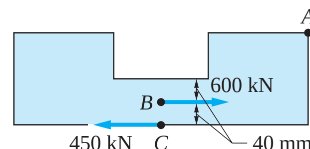
Respuesta

Parte 2

El par de 18 kN · m en sentido horario en la figura (b) se puede remplazar por dos fuerzas de 450 kN, una actuando en el punto B y la otra en el punto C, como se muestra en la figura (c). (El par representado por estas dos fuerzas es 450(0.040) = 18 kN · m en la dirección horaria.) Las dos fuerzas actuando en el punto B se pueden sumar para obtener el sistema que se muestra en la figura (d). Esta es la respuesta ya que se remplazó la fuerza original por dos fuerzas horizontales, una en el punto B y la otra en el punto C, como se requería.



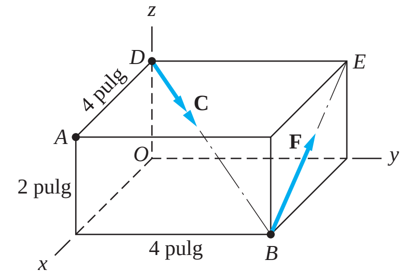
(c)



(d)

Respuesta

Problema de ejemplo 2.11



(a)

Remplace el sistema fuerza-par que se muestra en la figura (a) por un sistema equivalente fuerza-par, con la fuerza actuando en el punto A, si $F = 100$ lb y $C = 120$ lb · pulg.

Solución

Desplazar la fuerza dada **F** del punto B al punto A requiere introducir un par de transferencia $\mathbf{C}^T$. Luego este par se suma al par-vector dado **C** obteniendo así el par-vector resultante, que identificamos como $\mathbf{C}^R$. Entonces el par-vector $\mathbf{C}^R$ y la fuerza **F** ubicada en el punto A serán el sistema requerido fuerza-par.

Debido a la naturaleza tridimensional de este problema, es conveniente emplear métodos vectoriales en la solución. Escribiendo **F** en forma vectorial, se obtiene

$$\mathbf{F} = 100\boldsymbol{\lambda}_{BE} = 100\frac{\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BE}|} = 100\left(\frac{-4\mathbf{i} + 2\mathbf{k}}{4.472}\right)$$
$$= -89.44\mathbf{i} + 44.72\mathbf{k} \text{ lb}$$

El vector posición de A a B es $\mathbf{r}_{AB} = 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ pulg. El par de transferencia es igual al momento de la fuerza dada **F** respecto al punto A, por lo que se tiene

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & -2 \\ -89.44 & 0 & 44.72 \end{vmatrix}$$
$$= 178.9\mathbf{i} + 178.9\mathbf{j} + 357.8\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

Expresando el par-vector dado **C** que se muestra en la figura (a) en forma vectorial,

$$\mathbf{C} = 120\boldsymbol{\lambda}_{DB} = 120\frac{\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|} = 120\left(\frac{4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{6}\right)$$
$$= 80\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 40\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

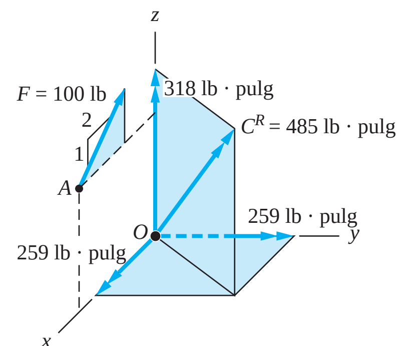
Sumando $\mathbf{C}^T$ y **C** (recuerde que los par-vectores son vectores libres), el par-vector resultante es

$$\mathbf{C}^R = \mathbf{C}^T + \mathbf{C} = 258.9\mathbf{i} + 258.9\mathbf{j} + 317.8\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

La magnitud de $\mathbf{C}^R$ está dada por

$$C^R = \sqrt{(258.9)^2 + (258.9)^2 + (317.8)^2} = 485 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

El sistema equivalente fuerza-par se muestra en la figura (b). Observe que la fuerza actúa en el punto A. Por conveniencia de representación, $\mathbf{C}^R$ se muestra en el punto O, pero como es un vector libre, se podría colocar en cualquier punto.



(b)

Problemas

2.82 ¿Cuáles de los sistemas son equivalentes al sistema fuerza-par en (a)?

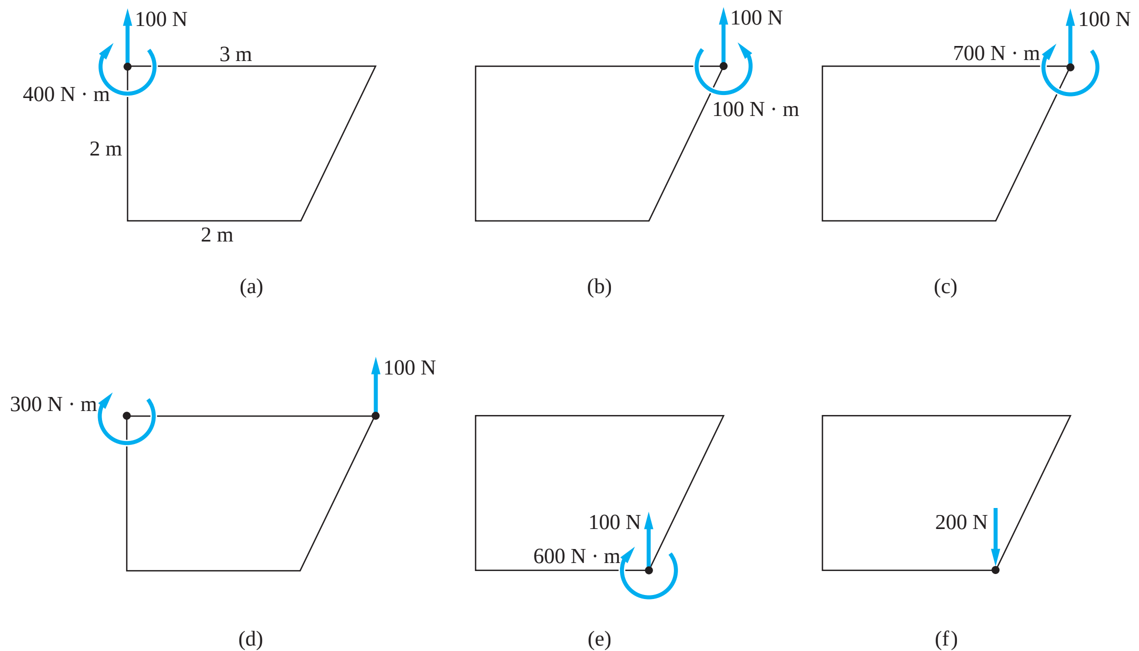


Fig. P2.82

2.83 Una fuerza de 15 lb actúa en el punto *A* sobre el grifo de agua a alta presión. Remplace esta fuerza por (a) un sistema fuerza-par, la fuerza del cual actúa en el punto *B* y (b) dos fuerzas horizontales, una actuando en el punto *B* y la otra en el punto *C*.

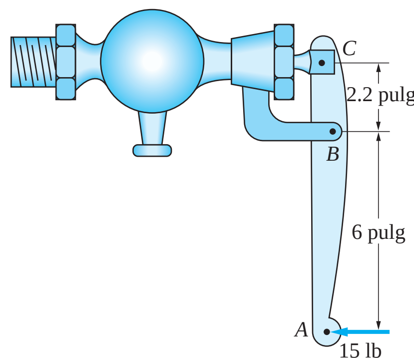


Fig. P2.83

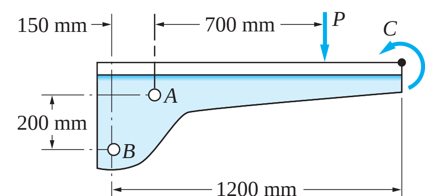


Fig. P2.84

2.84 La ménsula, que está anclada en un muro con pernos de anclaje en *A* y *B*, está sometida a la fuerza $P = 120$ N y al par $C = 140$ N · m. Remplace *P* y *C* por

(a) un sistema equivalente fuerza-par, la fuerza del cual actúa en *A* y (b) dos fuerzas verticales, una actuando en *A* y la otra en *B*.

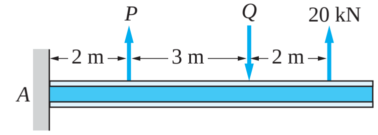


Fig. P2.85

2.85 Las tres fuerzas que se muestran son equivalentes a una fuerza hacia arriba de 50 kN en *A* y a un par de 170 kN · m en sentido contrario al horario. Determine *P* y *Q*.

2.86 Remplace las dos fuerzas indicadas por un sistema fuerza-par con la fuerza actuando en *O*.

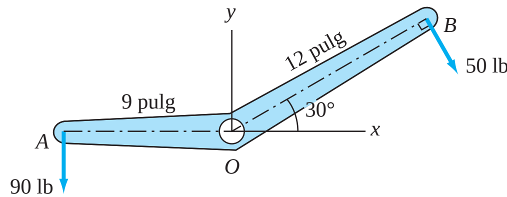


Fig. P2.86

2.87 En la figura se muestra un esquema de una barra de torsión de la suspensión de un automóvil (la barra de torsión aparece en sección transversal en *A*). Si las tres fuerzas y el par C = 900 lb · pie son equivalentes a una fuerza vertical hacia arriba R = 1200 lb actuando en *D*, determine *H* y *V*.

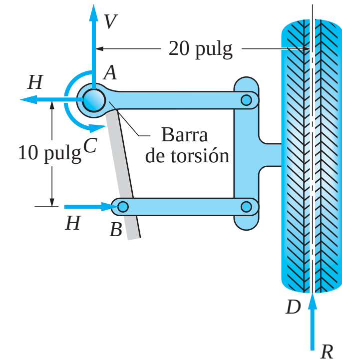


Fig. P2.87

2.88 La mesa se puede levantar sin inclinarla aplicando la fuerza de 100 N en el punto *O*, el centro de la mesa. Determine el sistema fuerza-par con la fuerza actuando en la esquina *A* que producirá el mismo resultado.

2.89 La magnitud de la fuerza **F** que actúa en el punto *A* sobre la placa es 160 kN. Determine el sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en el punto *O*.

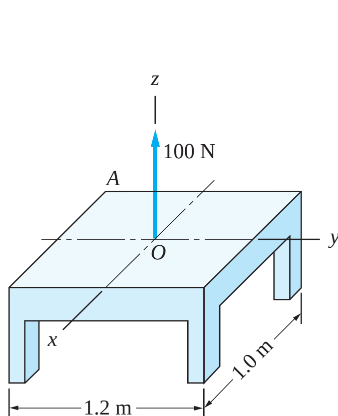


Fig. P2.88

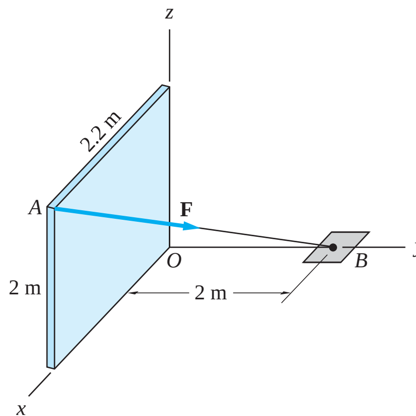


Fig. P2.89

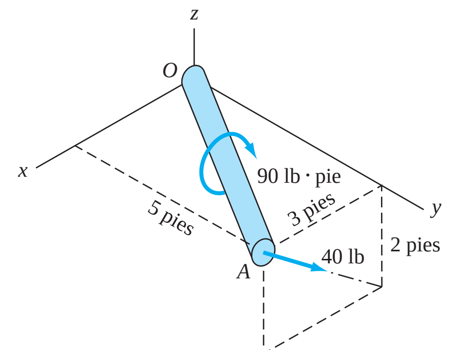


Fig. P2.90

2.90 Remplace el sistema fuerza-par que actúa sobre el tubo por un sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en el punto *O*.

***2.91** (a) Remplace la fuerza $\mathbf{F} = -2800\mathbf{i} + 1600\mathbf{j} + 3000\mathbf{k}$ lb que actúa en el extremo *A* de la manija de la manivela con una fuerza **R** que actúa en *O* y un par-vector $\mathbf{C}^R$. (b) Descomponga **R** en la componente normal *P* (normal a la sección transversal del eje) y en la componente cortante *V* (en el plano de la sección transversal). (c) Descomponga $\mathbf{C}^R$ en la componente de torsión *T* y en la componente de flexión *M*.

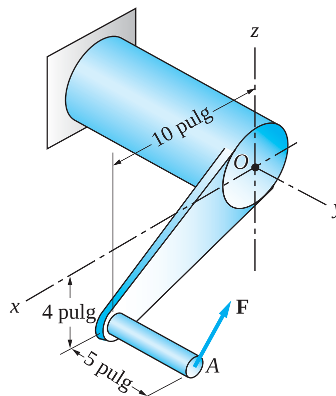


Fig. P2.91

2.92 Determine el sistema fuerza-par, con la fuerza actuando en el punto *O*, que es equivalente a la fuerza y al par que actúan sobre el brazo *CD* del robot industrial. Observe que el brazo *ABCD* se encuentra en un plano vertical que está inclinado a 40° con el plano *yz*; el brazo *CD* forma un ángulo de 30° con la vertical.

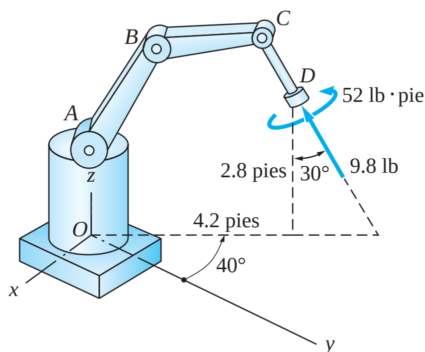


Fig. P2.92

2.93 Remplace la fuerza y el par indicados por un sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en (a) el punto *B* y (b) el punto *D*.

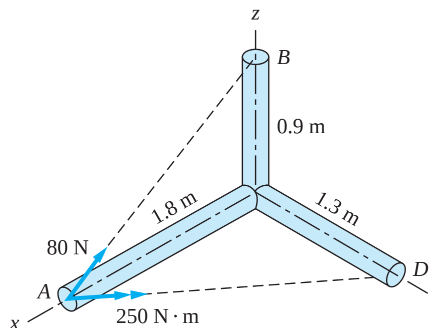


Fig. P2.93

Repaso de ecuaciones

Principio de transmisibilidad

Una fuerza se puede desplazar a cualquier punto a lo largo de su línea de acción sin cambiar su efecto externo sobre un cuerpo rígido.

Momento de una fuerza respecto al punto O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad M_O = Fd$$

$\mathbf{r}$ = vector de O hasta cualquier punto en la línea de acción de $\mathbf{F}$
d = distancia perpendicular entre O y la línea de acción de $\mathbf{F}$

Momento de una fuerza F respecto al eje AB

$$M_{AB} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

$\mathbf{r}$ = vector desde cualquier punto en AB hasta cualquier punto en la línea de acción de $\mathbf{F}$
$\boldsymbol{\lambda}$ = vector unitario dirigido desde A hacia B
O = cualquier punto en AB

Cambio de la línea de acción de una fuerza

Una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en el punto A es equivalente a $\mathbf{F}$ actuando en el punto B más el par de transferencia

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{r}$ = vector de A a B

Problemas de repaso

2.94 El momento de la fuerza **P** respecto al eje *AB* es 600 lb · pie. Determine la magnitud de **P**.

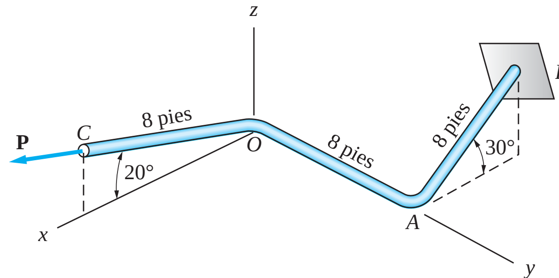


Fig. P2.94

2.95 Remplace la fuerza y el par indicados por un sistema equivalente fuerza-par donde la fuerza actúa en *A*.

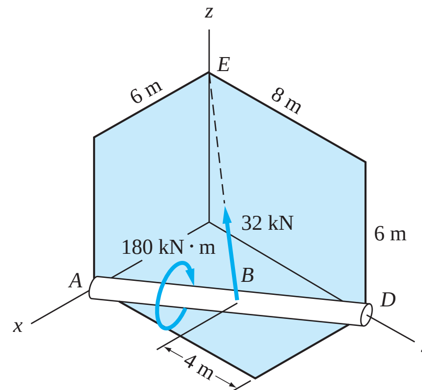


Fig. P2.95

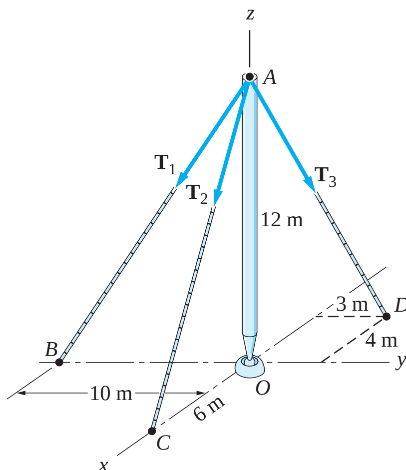


Fig. P2.96

2.96 Las tres tensiones en los cables $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ actúan en la parte superior del asta de bandera. Si la fuerza resultante de las tres tensiones es $\mathbf{R} = -400\mathbf{k}$ N, encuentre las magnitudes de las tensiones en los cables.

2.97 La fuerza que actúa en *A* es $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ kN. Si el momento de esta fuerza respecto al eje *y* es $8\mathbf{j}$ kN · m, determine la distancia *b* y el momento de **F** respecto al punto *O*.

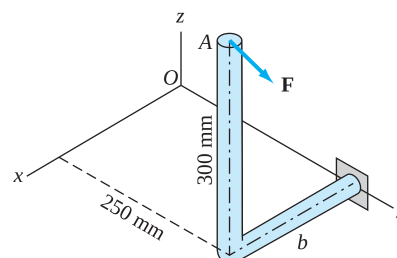


Fig. P2.97

2.98 La magnitud del momento de la fuerza **P** respecto al eje *CD* es 50 lb · pulg. Encuentre la magnitud de **P**.

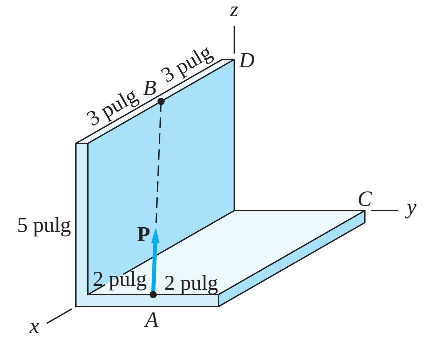


Fig. P2.98

2.99 Los tres pares en (a) son equivalentes al par que se muestra en (b), donde **F** = 160**i** + 120**j** N. Determine la distancia *b*.

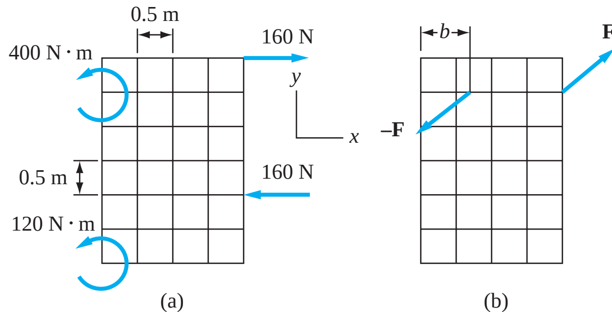


Fig. P2.99

2.100 Las magnitudes de la fuerza **P** y del par **C** son 500 lb y 1200 lb · pie, respectivamente. Calcule el momento combinado de **P** y **C** respecto (a) al origen *O* y (b) al eje *OF*.

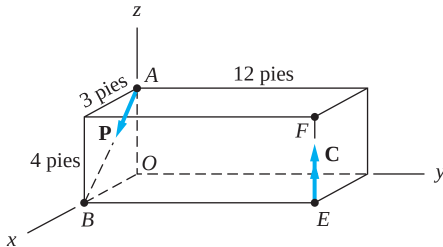


Fig. P2.100

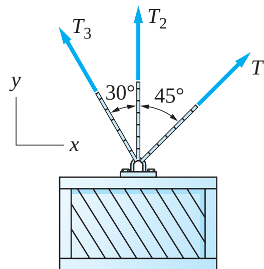


Fig. P2.101

2.101 La fuerza resultante de las tres tensiones en los cables que soportan la caja es **R** = 500**j** lb. Encuentre T_1 y T_3, si T_2 = 300 lb.

2.102 Un sistema de fuerzas consiste en la fuerza **F** = 200**i** + 100**j** + 250**k** lb, que actúa en el origen de un sistema coordenado rectangular y un par **C** = −400**i** + 300**j** + 200**k** lb · pulg. (a) Demuestre que **F** y **C** se pueden reducir a una sola fuerza. (b) Encuentre las coordenadas del punto en el plano *xy* donde el momento combinado de **F** y **C** es cero.

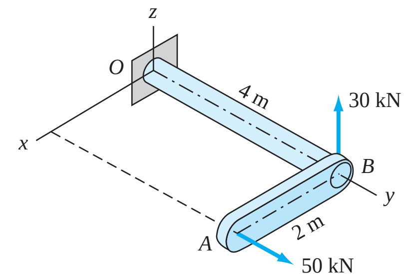


Fig. P2.103

2.103 Remplace las dos fuerzas mostradas por un sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en *O*.

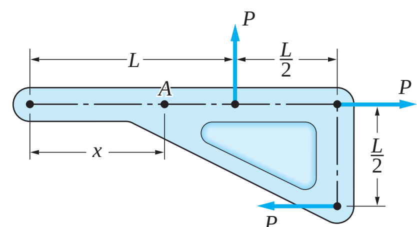


Fig. P2.104

2.104 Las tres fuerzas de magnitud **P** se pueden remplazar por una sola fuerza equivalente **R** actuando en el punto *A*. Determine la distancia *x* y la magnitud y dirección de **R**.

2.105 Si las dos fuerzas mostradas se pueden remplazar por una fuerza equivalente actuando en *O* (ningún par), determine *P*.

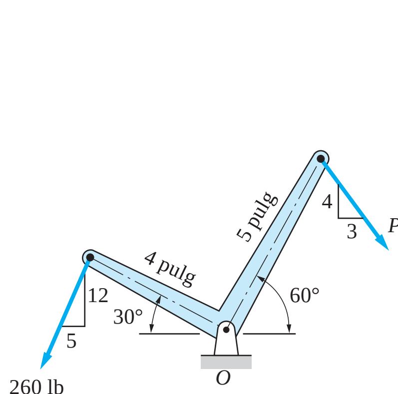


Fig. P2.105

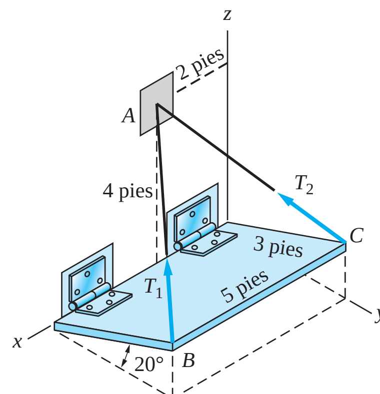


Fig. P2.106

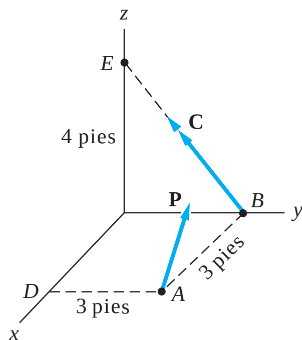


Fig. P2.107

2.106 La puerta batiente se mantiene en la posición indicada mediante dos cables. Las tensiones en los cables son $T_1 = 30$ lb y $T_2 = 90$ lb. Determine la magnitud de fuerza única que tendrá el mismo efecto sobre la puerta que las tensiones en los cables.

2.107 El sistema de fuerzas consiste de la fuerza $\mathbf{P} = -300\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 150\mathbf{k}$ lb y del par **C**. Determine la magnitud de **C** si el momento de este sistema de fuerzas respecto al eje *DE* es 800 lb · pie.

2.108 El sistema de fuerzas ilustrado se puede remplazar con un solo par equivalente $\mathbf{C}^R$. Determine $\mathbf{C}^R$.

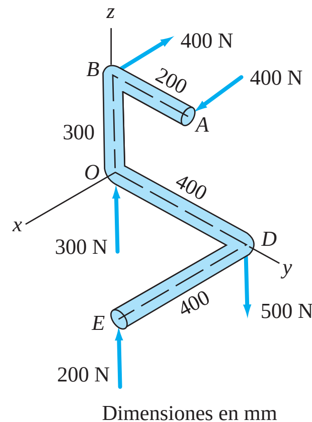


Fig. P2.108

3



Resultantes de sistemas de fuerzas



Los vientos fuertes resultan en cargas significativas sobre edificios de altura considerable. Si se conoce la distribución de la presión, la fuerza resultante del viento y la ubicación del centro de presión correspondiente se pueden calcular aplicando los principios de la estática, consulte el problema P3.52. Visions of America/Joe Sohm/Digital Vision/Getty Images

3.1 Introducción

A fin de investigar los efectos de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo, con frecuencia es conveniente reducir el sistema de fuerzas a su representación equivalente más simple. Algunas de estas simplificaciones se analizaron en el capítulo anterior. Por ejemplo, aprendió que un sistema de fuerzas concurrentes se puede remplazar por una sola fuerza y que un sistema de pares se puede sustituir por un solo par.

En la sección siguiente se explica cómo un sistema de fuerzas arbitrario se puede reducir a una fuerza y un par. En las secciones subsiguientes se estudian las aplicaciones del sistema fuerza-par para la determinación de las resultantes de sistemas de fuerzas.

3.2 Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par

En esta sección se muestra cómo un sistema de fuerzas se puede reducir a un sistema equivalente consistente en una fuerza actuando en un punto arbitrario, más un par.

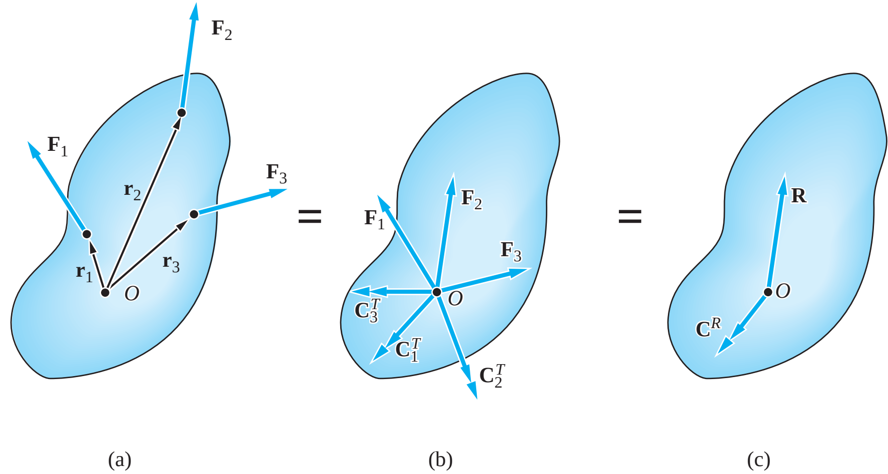


Fig. 3.1

Considere el sistema de fuerzas que se muestra en la figura 3.1(a), que consiste de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . Los vectores de posición $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, . . . de los puntos donde actúan las fuerzas se miden desde un punto base elegido de manera arbitraria O. Este sistema de fuerzas se puede reducir a un sistema equivalente fuerza-par, con la fuerza actuando en O, mediante el siguiente procedimiento:

- Desplace cada fuerza al punto O. Como se explicó en la sección 2.8, la fuerza $\mathbf{F}_1$ se puede desplazar a O si se introduce el par de transferencia $\mathbf{C}_1^T = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ (el momento de $\mathbf{F}_1$ respecto a O). Las fuerzas $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . se pueden desplazar de la misma manera, siendo sus pares de transferencia $\mathbf{C}_2^T = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$, $\mathbf{C}_3^T = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3$, . . . Después de desplazar todas las fuerzas, se termina con el sistema de fuerzas indicado en la figura 3.1(b), que es equivalente al sistema original. (Los signos de igual entre las figuras significan equivalencia.)
- Debido a que las fuerzas ahora son concurrentes en el punto O, se pueden sumar para producir la fuerza resultante $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots = \Sigma\mathbf{F} \tag{3.1}$$

Los pares de transferencia también se pueden sumar, siendo su producto el par-vector resultante $\mathbf{C}^R$:

$$\mathbf{C}^R = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \cdots = \Sigma\mathbf{M}_O \tag{3.2}$$

El sistema fuerza-par resultante ilustrado en la figura 3.1(c), con $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$ mostradas actuando en el punto O. Sin embargo, se debe observar que $\mathbf{R}$ es un vector deslizante (su línea de acción debe pasar por O), en tanto que $\mathbf{C}^R$ es un vector libre. Si bien $\mathbf{C}_1^T$ es perpendicular a $\mathbf{F}_1$, etc., como se enfatizó en la sección 2.8, $\mathbf{C}^R$ por lo general no es perpendicular a $\mathbf{R}$.

Utilizando las ecuaciones (3.1) y (3.2), cualquier sistema de fuerzas se puede reducir a un sistema equivalente fuerza-par, con la fuerza actuando en un punto de referencia de su elección. La fuerza resultante **R** es simplemente la suma vectorial de todas las fuerzas, por tanto, no se afecta por la ubicación del punto de referencia. No obstante, el par-vector resultante $\mathbf{C}^R$, que es la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al punto de referencia,* no depende de la elección del punto de referencia.

Si se elige el punto de referencia O como el origen de un sistema coordenado rectangular, las dos ecuaciones vectoriales en las ecuaciones (3.1) y (3.2) son equivalentes a las seis ecuaciones escalares siguientes:

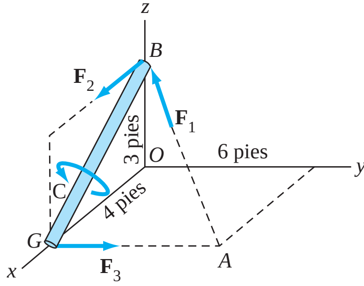
$$\begin{aligned} R_x &= \Sigma F_x \quad & R_y &= \Sigma F_y \quad & R_z &= \Sigma F_z \\ C_x^R &= \Sigma M_x \quad & C_y^R &= \Sigma M_y \quad & C_z^R &= \Sigma M_z \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si las fuerzas del sistema original se encuentran en un plano, digamos, el plano xy, las tres ecuaciones escalares siguientes son necesarias para determinar el sistema fuerza-par.

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad C^R = \Sigma M_O \tag{3.4}$$

El par-vector $\mathbf{C}^R$ siempre se encontrará en la dirección z, debido a que el plano del par es el xy. Como la fuerza resultante **R** se encuentra en el plano xy, **R** y $\mathbf{C}^R$ serán mutuamente perpendiculares. La última observación es importante, ya que implica que un sistema de fuerzas coplanares se puede reducir aún más a una sola fuerza o a un solo par. Este tema se analiza con más detalle en la sección siguiente.

*Si el sistema de fuerzas original contiene pares, sus momentos se deben incluir en la suma.



Problema de ejemplo **3.1**

El sistema de fuerzas que actúa sobre un miembro estructural consiste del par C y de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$. Determine el sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en el punto G. Utilice $C = 200$ lb · pie, $F_1 = 100$ lb, $F_2 = 90$ lb y $F_3 = 120$ lb.

Solución

Debido a la naturaleza tridimensional de este problema, para resolverlo se utilizará álgebra vectorial. El primer paso es expresar las tres fuerzas y el par en forma vectorial:

$$\mathbf{F}_1 = 100\lambda_{AB} = 100\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 100\left(\frac{-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + 3^2}}\right)$$

$$= -51.22\mathbf{i} - 76.82\mathbf{j} + 38.41\mathbf{k} \text{ lb}$$

$$\mathbf{F}_2 = 90\mathbf{i} \text{ lb}$$

$$\mathbf{F}_3 = 120\mathbf{j} \text{ lb}$$

$$\mathbf{C} = 200\lambda_{BG} = 200\frac{\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BG}|} = 200\left(\frac{4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right)$$

$$= 160\mathbf{i} - 120\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Cuando se desplazan las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ al punto G, son concurrentes con $\mathbf{F}_3$. Sumando las tres fuerzas, se obtiene la fuerza resultante

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

$$= (-51.22\mathbf{i} - 76.82\mathbf{j} + 38.41\mathbf{k}) + 90\mathbf{i} + 120\mathbf{j}$$

$$= 38.78\mathbf{i} + 43.18\mathbf{j} + 38.41\mathbf{k} \text{ lb}$$ *Respuesta*

El par de transferencia que se origina al mover $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ es el momento respecto a G de

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (-51.22\mathbf{i} - 76.82\mathbf{j} + 38.41\mathbf{k}) + 90\mathbf{i}$$

$$= 38.78\mathbf{i} - 76.82\mathbf{j} + 38.41\mathbf{k} \text{ lb}$$

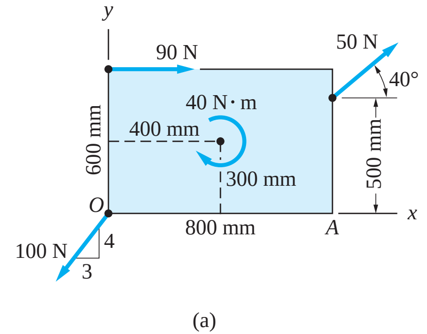
El par resultante es la suma del par de transferencia y el par $\mathbf{C}$, lo que resulta en

$$\mathbf{C}^R = \mathbf{r}_{GB} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \mathbf{C}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ 38.78 & -76.82 & 38.41 \end{vmatrix} + 160\mathbf{i} - 120\mathbf{k}$$

$$= 275\mathbf{i} + 153.6\mathbf{j} + 70.9\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pie}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 3.2



(a)

El sistema de fuerzas coplanares en la figura (a) consiste de tres fuerzas y un par. Determine el sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en el punto O.

Solución

Este problema se resolverá con álgebra escalar; sin embargo, el álgebra vectorial sería casi igual de conveniente.

Las componentes de la fuerza resultante **R** son

$$R_x = \Sigma F_x \quad \overset{+}{\longrightarrow} \quad R_x = 50\cos 40^\circ + 90 - \frac{3}{5}(100) = 68.30 \text{ N}$$

$$R_y = \Sigma F_y \quad +\!\uparrow \quad R_y = 50\,\text{sen}\,40^\circ - \frac{4}{5}(100) = -47.86 \text{ N}$$

Por lo que la fuerza resultante es

$$\mathbf{R} = 68.3\mathbf{i} - 47.9\mathbf{j} \text{ N}$$ *Respuesta*

La magnitud de **R** es

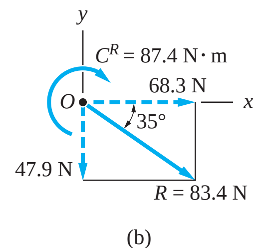
$$R = \sqrt{(68.30)^2 + (-47.86)^2} = 83.4 \text{ N}$$

y el ángulo que **R** forma con el eje x es

$$\theta = \tan^{-1}\frac{47.86}{68.30} = 35.0^\circ$$

La fuerza **R** actuando en el punto O se muestra en la figura (b).

La magnitud del par resultante es igual a la magnitud del momento total respecto al punto O del sistema de fuerzas original. Con referencia a la figura (a), se tiene



(b)

$$C^R = \Sigma M_O \quad \circlearrowleft^{+} \quad C^R = 50\,\text{sen}\,40^\circ(0.800) - 50\cos 40^\circ(0.500)$$
$$- 90(0.600) - 40$$
$$= -87.44 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Por tanto,

$$C^R = 87.4 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{en sentido de las manecillas del reloj}$$ *Respuesta*

El sistema resultante fuerza-par se muestra en la figura (b).

Problemas

3.1 Determine cuáles de los sistemas de fuerzas en (b) a (f) son equivalentes al sistema fuerza-par en (a).

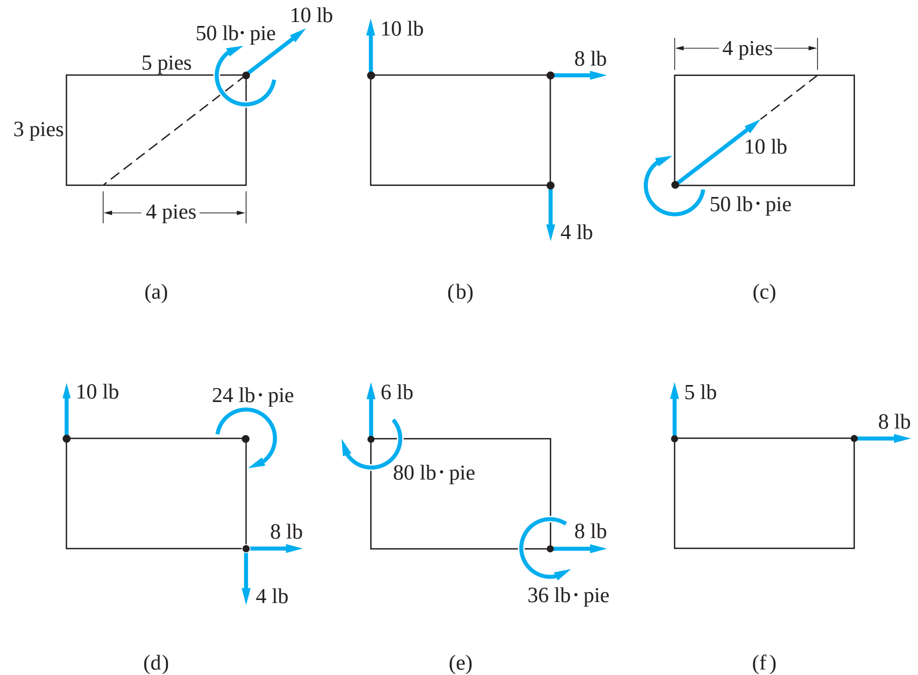


Fig. P3.1

3.2 Dos fuerzas y un par se aplican a la viga para tratar de levantarla. Remplace este sistema de fuerzas por un sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en (a) el punto *A* y (b) el punto *B*.

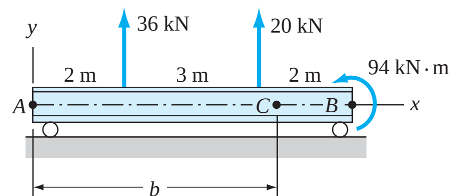
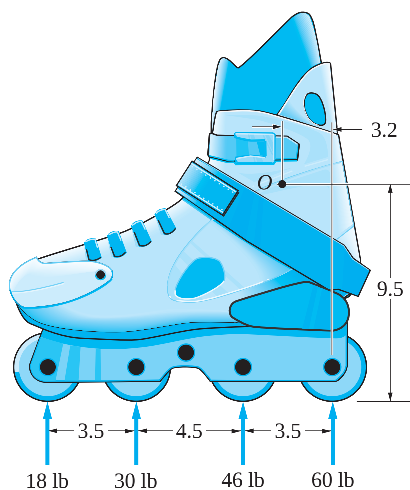


Fig. P3.2, P3.3

3.3 Las dos fuerzas y un par que actúan sobre la viga son equivalentes a una sola fuerza actuando en *C*. Determine la distancia *d* que ubica el punto *C*.



Dimensiones en pulgadas

Fig. P3.4

3.4 Las cuatro fuerzas mostradas actúan sobre los rodillos de un patín en línea. Determine el sistema fuerza-par, con la fuerza actuando en *O* (la junta [articulación] del tobillo del patinador).

3.5 Remplace las tres fuerzas por un sistema equivalente fuerza-par, con la fuerza actuando en *O*.

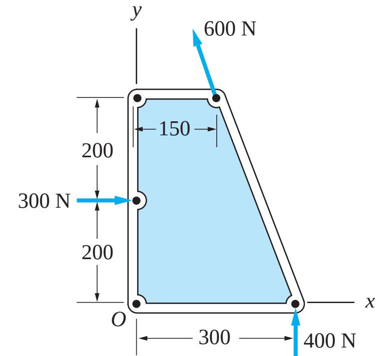


Fig. P3.5

3.6 El sistema de fuerzas que actúa en la parte de una máquina es equivalente a la única fuerza $\mathbf{R} = 95\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ lb actuando en *O*. Determine la fuerza **P** y la distancia *b*.

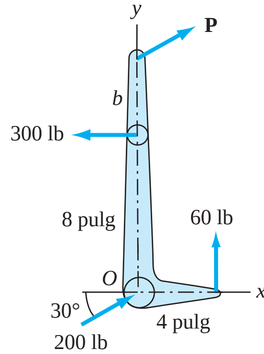


Fig. P3.6

3.7 Las tres fuerzas son perpendiculares a la placa triangular. Encuentre el sistema equivalente fuerza-par, con la fuerza actuando en *O*.

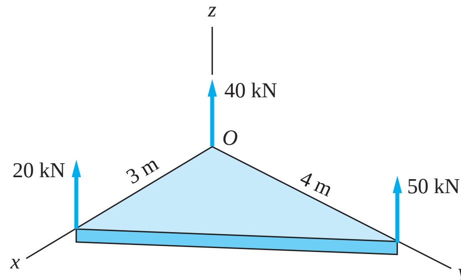


Fig. P3.7

3.8 Remplace las tres fuerzas que actúan sobre la placa de un cuarto de círculo con un sistema equivalente fuerza-par con la fuerza en el punto *D*. Utilice $P = 400$ lb y $\theta = 40°$.

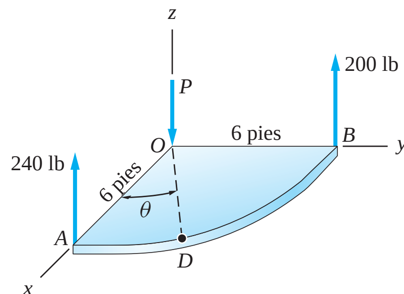


Fig. P3.8, P3.9

3.9 Cuando las fuerzas que actúan sobre la placa de un cuarto de círculo se remplazan por un sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en el punto *D*, el par resultante es cero. Determine *P* y el ángulo θ.

3.10 Represente cada uno de los sistemas de fuerzas con un sistema fuerza-par que tenga la fuerza actuando en el punto *A*. ¿Cuáles sistemas son equivalentes entre sí?

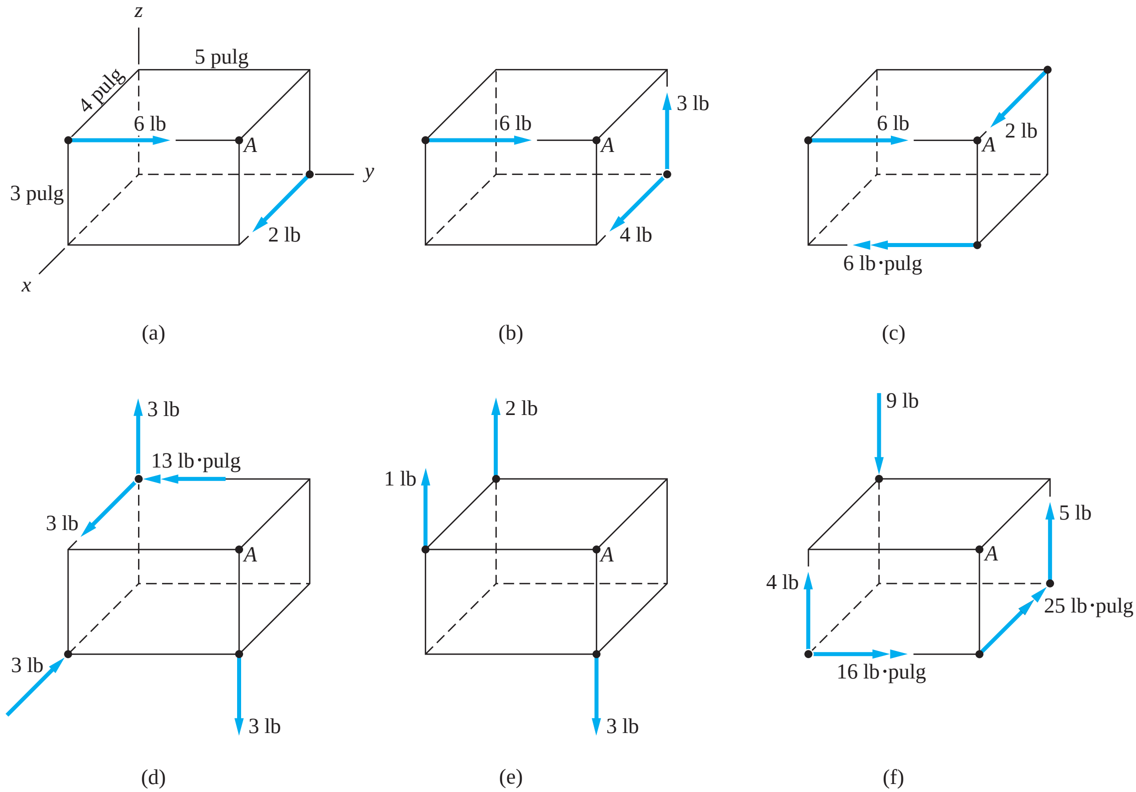


Fig. P3.10

3.11 Un trabajador aplica las fuerzas $\mathbf{P} = -10\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ lb y $\mathbf{Q} = 10\mathbf{i}$ lb al mango y a la barra de sujeción del taladro eléctrico. Estas fuerzas son equivalentes a la fuerza $\mathbf{R} = 8\mathbf{j}$ lb actuando en la broca del taladro y al par $\mathbf{C}^R = -120\mathrm{j}$ lb · pulg. Determine las dimensiones *a* y *b*.

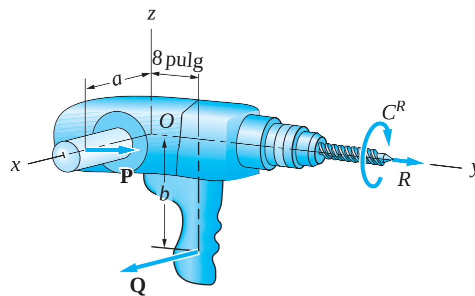


Fig. P3.11

3.12 Dos tensiones en los cables y un par actúan sobre la barra *OAB*. Determine el sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en *O*.

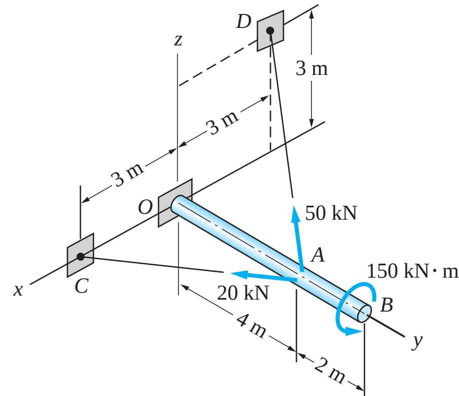


Fig. P3.12

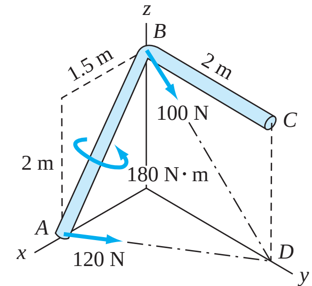


Fig. P3.13

3.13 Remplace las dos fuerzas y el par que actúan sobre la barra doblada *ABC* por un sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en *C*.

3.14 El conjunto eje y polea *ABCD* es impulsado por el par de torsión de 32 lb · pie (par) suministrado por el motor eléctrico en *A*. El conjunto también está sometido a las dos tensiones en las bandas mostradas en cada una de las dos poleas. Determine el sistema fuerza-par en *D* que sea equivalente al par de torsión y a las cuatro tensiones en las bandas.

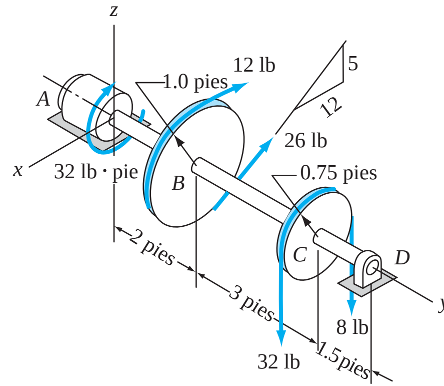
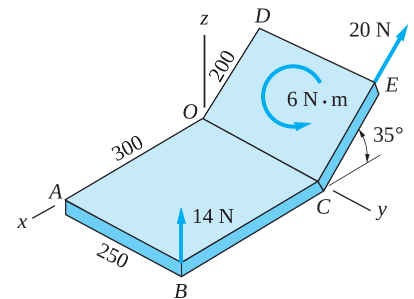


Fig. P3.14



Dimensiones en mm

Fig. P3.15

3.15 Remplace las dos fuerzas y el par por un sistema equivalente fuerza-par, con la fuerza actuando en *A*. Observe que el par de 6 N · m se encuentra en el plano *OCED*.

3.3 *Definición de resultante*

La *resultante de un sistema de fuerzas* se define como el sistema más simple que puede remplazar al sistema original sin cambiar su efecto externo sobre un cuerpo rígido.

La expresión *más simple* se utiliza en el sentido que una fuerza es más simple que dos fuerzas, un par es más simple que dos pares, una fuerza es más simple que una fuerza y un par, etcétera.

La resultante de un sistema de fuerzas por lo general es un sistema fuerza-par $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$. Como se explicó en la sección 2.8, si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$ son mutuamente perpendiculares, se pueden reducir aún más a una sola fuerza. Entonces se deduce que la resultante de un sistema de fuerzas debe ser uno de los resultados siguientes:*

- Una fuerza resultante $\mathbf{R}$ (si $\mathbf{C}^R = \mathbf{0}$ o si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$ son perpendiculares)
- Un par-vector resultante $\mathbf{C}^R$ (si $\mathbf{R} = \mathbf{0}$)
- Un sistema resultante fuerza-par (si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$ no son mutuamente perpendiculares)

Los sistemas de fuerzas que tienen la misma resultante se denominan *estáticamente equivalentes*.

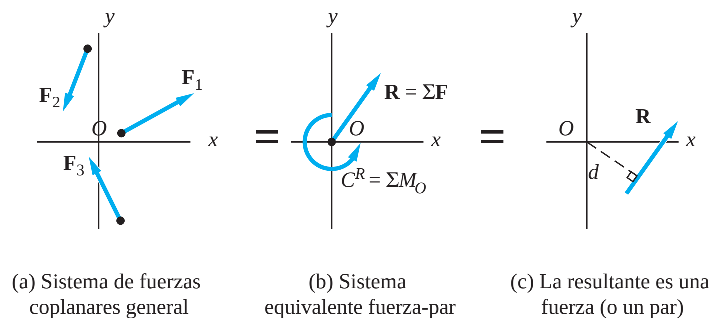
En el resto de este capítulo se analizan los procedimientos para determinar las resultantes de sistemas bi y tridimensionales.

3.4 Resultantes de sistemas de fuerzas coplanares

En esta sección se investigan las resultantes de sistemas de fuerzas en los que todas las fuerzas se encuentran en un solo plano, elegido como el coordenado *xy*. Se inicia con un análisis de las resultantes de sistemas de fuerzas coplanares generales y después se consideran dos casos especiales: sistemas de fuerzas concurrentes y sistemas de fuerzas paralelas.

a. Sistema de fuerzas coplanares general

En la figura 3.2(a) se muestra un sistema de fuerzas coplanares general, con todas las fuerzas en el plano *xy*. El origen *O* se ubica en cualquier punto conveniente en el plano. La reducción de este sistema de fuerzas a su resultante (sistema de fuerzas equivalente más simple) se efectúa mediante el procedimiento siguiente.



(a) Sistema de fuerzas coplanares general

(b) Sistema equivalente fuerza-par

(c) La resultante es una fuerza (o un par)

Fig. 3.2

*Es importante que ponga mucha atención al uso de los términos *resultante, fuerza resultante* $\mathbf{R}$ y *par-vector resultante* $\mathbf{C}^R$.

Remplace el sistema de fuerzas original por el sistema equivalente que consiste de la fuerza resultante $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ (o $R_x = \Sigma F_x$ y $R_y = \Sigma F_y$) actuando en O y del par resultante $C^R = \Sigma M_O$, como se muestra en la figura 3.2(b). Este procedimiento tiene tres resultados posibles:

- $\mathbf{R} = 0$. La resultante es el par C^R.
- $C^R = 0$. La resultante es la fuerza $\mathbf{R}$ actuando en O.
- $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ y $C^R \neq 0$. Como $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$ son perpendiculares entre sí, el sistema se puede reducir a una sola fuerza $\mathbf{R}$ actuando en un punto diferente al O, como se ilustra en la figura 3.2(c). La distancia perpendicular d entre O y la línea de acción de $\mathbf{R}$ se determina por el requerimiento de que los momentos respecto a O de los sistemas de fuerzas en las figuras 3.2(b) y (c) deben ser los mismos; es decir, $\Sigma M_O = Rd$.

En resumen, la resultante del sistema de fuerzas coplanares general que se muestra en la figura 3.2(a) o es una fuerza o es un par. Si $\Sigma\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, entonces la resultante es una fuerza $\mathbf{R}$ determinada por

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad \Sigma M_O = Rd \tag{3.5}$$

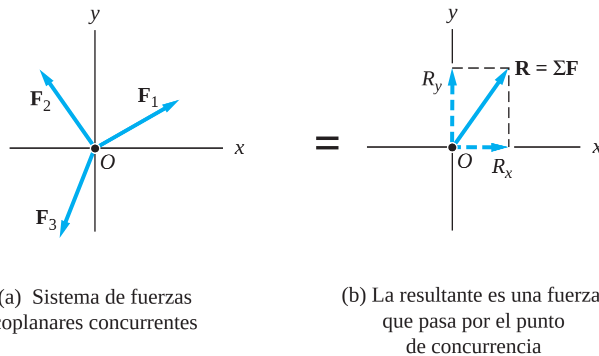
Observe que la ecuación de momentos ubica la línea de acción de $\mathbf{R}$.

Si $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma M_O \neq 0$, entonces, la resultante es el par

$$C^R = \Sigma M_O \tag{3.6}$$

b. Sistema de fuerzas coplanares concurrentes

La resultante de un sistema de fuerzas coplanares concurrentes es la fuerza $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ ($R_x = \Sigma F_x$, $R_y = \Sigma F_y$) que actúa por el punto de concurrencia O, como se indica en la figura 3.3. Esta conclusión se deduce de la ecuación (3.5): como $\Sigma M_O = 0$ para una sistema de fuerzas que es concurrente en O, la ecuación de momentos $\Sigma M_O = Rd$ da $d = 0$.



(a) Sistema de fuerzas coplanares concurrentes

(b) La resultante es una fuerza que pasa por el punto de concurrencia

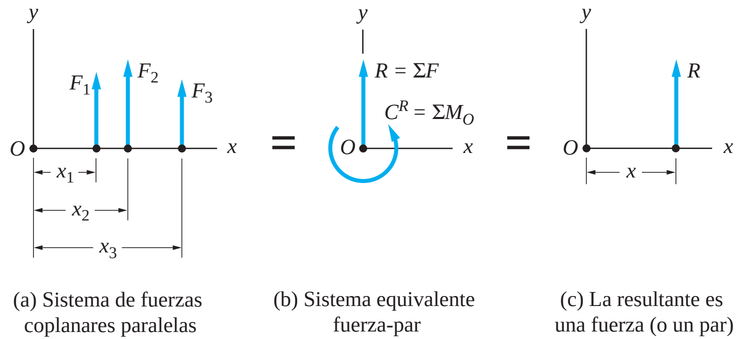
Fig. 3.3

c. Sistema de fuerzas coplanares paralelas

En la figura 3.4(a) se muestra un sistema de fuerzas coplanares, donde F_1, F_2, F_3, . . . son paralelas al eje y. El sistema equivalente fuerza-par en el punto O se muestra en la figura 3.4(b), donde

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = \Sigma F$$

$$C^R = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \cdots = \Sigma M_O$$



(a) Sistema de fuerzas coplanares paralelas

(b) Sistema equivalente fuerza-par

(c) La resultante es una fuerza (o un par)

Fig. 3.4

Si $\Sigma F \neq 0$, la resultante es una fuerza R ubicada a la distancia x desde O, como se indica en la figura 3.4(c). El valor de x se obtiene igualando los momentos respecto a O en las figuras 3.4(b) y (c):

$$\Sigma M_O = Rx \quad (3.7)$$

Si, por otro lado, $\Sigma F = 0$ y $\Sigma M_O \neq 0$, entonces la resultante es el par $C^R = \Sigma M_O$.

Problema de ejemplo 3.3

Los valores de $R_x = \Sigma F_x$, $R_y = \Sigma F_y$ y ΣM_O para cinco sistemas de fuerzas que se encuentran en el plano *xy* se indican en la tabla siguiente. El punto *O* es el origen del sistema coordenado y los momentos positivos son en sentido contrario de las manecillas del reloj. Determine la resultante para cada sistema de fuerzas y muéstrela en un bosquejo del sistema coordenado.

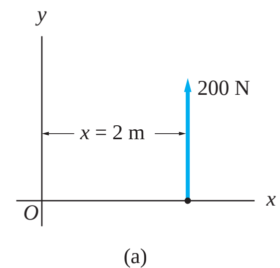
Parte	R_x	R_y	ΣM_O
1	0	200 N	400 N · m
2	0	200 N	−400 N · m
3	300 lb	400 lb	600 lb · pie
4	400 N	−600 N	−900 N · m
5	0	0	−200 lb · pie

Solución

Parte 1

$$R_x = 0 \qquad R_y = 200 \text{ N} \qquad \Sigma M_O = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La resultante es una fuerza de 200 N que es paralela al eje *y*, como se muestra en la figura (a). Designando *x* como la distancia desde el punto *O* hasta la línea de acción de la resultante, como se muestra en la figura (a) y utilizando la ecuación (3.7), se tiene



(a)

$$\Sigma M_O = Rx \quad (+) \quad 400 = 200x$$

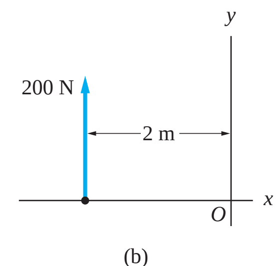
lo que da

$$x = 2 \text{ m}$$

Parte 2

$$R_x = 0 \qquad R_y = 200 \text{ N} \qquad \Sigma M_O = -400 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La resultante es la misma fuerza de 200 N que en la parte 1, pero aquí la ecuación de momentos da



(b)

$$\Sigma M_O = Rx \quad (+) \quad -400 = 200x$$

o

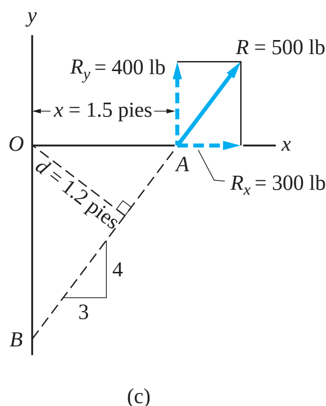
$$x = -2 \text{ m}$$

El signo negativo indica que *x* se encuentra a la izquierda del punto *O*, como se muestra en la figura (b).

Parte 3

$$R_x = 300 \text{ lb} \qquad R_y = 400 \text{ lb} \qquad \Sigma M_O = 600 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

La resultante es la fuerza $\mathbf{R} = 300\mathbf{i} + 400\mathbf{j}$ lb. Su magnitud es $\sqrt{(300)^2 + (400)^2} =$ 500 lb. La ecuación de momentos de las ecuaciones (3.5) se debe utilizar para deter-



(c)

minar la línea de acción de **R**. Designando d como la distancia perpendicular desde el punto O hasta la línea de acción de **R**, como se muestra en la figura (c), se tiene

$$\Sigma M_O = Rd \quad \circlearrowleft + \quad 600 = 500d$$

lo que da

$$d = 1.2 \text{ pies}$$

Los puntos donde **R** interseca los ejes coordenados entonces se pueden determinar por trigonometría o aplicando el principio de los momentos, como sigue.

Con R colocada en A, como en la figura (c):

$$\Sigma M_O = R_y x$$

$$\circlearrowleft + \quad 600 = 400x$$

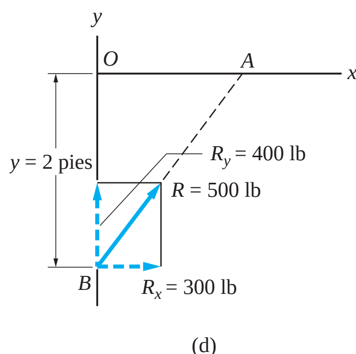
$$x = 1.5 \text{ pies}$$

Con R colocada en B, como en la figura (d)

$$\Sigma M_O = R_x y$$

$$\circlearrowleft + \quad 600 = 300y$$

$$y = 2 \text{ pies}$$



(d)

Parte 4

$$R_x = 400 \text{ N} \qquad R_y = -600 \text{ N} \qquad \Sigma M_O = -900 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La resultante es la fuerza **R** $= 400\mathbf{i} - 600\mathbf{j}$ N; su magnitud es **R** $= \sqrt{(400)^2 + (600)^2} = 721.1$ N. Designando d como la distancia perpendicular desde el punto O hasta la línea de acción de **R**, como se muestra en la figura (e), se tiene

$$\Sigma M_O = Rd \quad \circlearrowleft + \quad -900 = -721.1d$$

lo que da

$$d = 1.248 \text{ m}$$

y
6
4
R = 721.1 N
d = 1.248 m
O
x

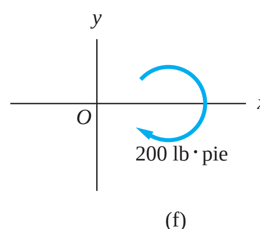
(e)

Observe que la línea de acción de **R** se debe colocar a la derecha del origen, de manera que su momento respecto al punto O tenga el mismo sentido que ΣM_O, es decir, en sentido de las manecillas del reloj.

Parte 5

$$R_x = 0 \qquad R_y = 0 \qquad \Sigma M_O = -200 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

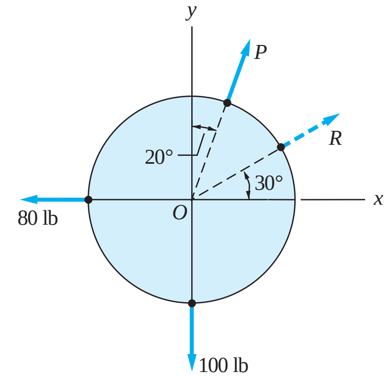
Como la suma de las fuerzas es cero, la resultante de este sistema de fuerzas es un par de 200 lb · pie en sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura (f).



(f)

Problema de ejemplo 3.4

La fuerza **R** es la resultante de las otras tres fuerzas indicadas. Determine **P** y **R**.



Solución

Las tres fuerzas aplicadas representan un sistema de fuerzas coplanares concurrentes. Por tanto, las componentes de la fuerza resultante están determinadas por dos ecuaciones escalares: $R_x = \Sigma F_x$ y $R_y = \Sigma F_y$. Dado que las direcciones de todas las fuerzas se conocen, en este problema hay dos incógnitas, las magnitudes P y R. El método más directo para determinar estas dos incógnitas es resolver las dos ecuaciones escalares siguientes (comparar el número de incógnitas con el número de ecuaciones disponibles a menudo es una ayuda valiosa en la solución de problemas):

$$R_x = \Sigma F_x \qquad \overset{+}{\longrightarrow} \qquad R\cos 30^\circ = P \operatorname{sen} 20^\circ - 80 \qquad (1)$$

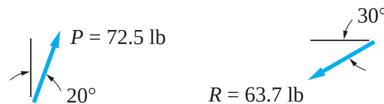
$$R_y = \Sigma F_y \qquad +\!\uparrow \qquad R \operatorname{sen} 30^\circ = P\cos 20^\circ - 100 \qquad (2)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) da

$$P = 72.5 \text{ lb} \qquad \text{y} \qquad R = -63.7 \text{ lb}$$

El valor positivo de P indica que **P** está dirigida como se muestra en la figura. El signo negativo asociado con R significa que **R** actúa en la dirección opuesta a la indicada en la figura.

Por tanto, las fuerzas **P** y **R** son



Respuesta

Por supuesto, las líneas de acción de **P** y **R** pasan por O, el punto de concurrencia.

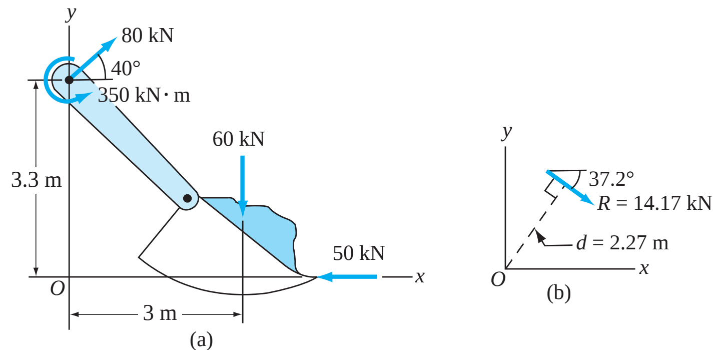
Problema de ejemplo 3.5

Determine la resultante del sistema de fuerzas coplanares que se muestra en la figura (a) que actúa sobre el brazo de una excavadora. Presente su respuesta en un bosquejo del sistema coordenado.

Solución

En un sistema de fuerzas coplanares la resultante es una fuerza o bien un par. Si la resultante es una fuerza, entonces las ecuaciones (3.5) proporcionan tres ecuaciones escalares: $R_x = \Sigma F_x$, $R_y = \Sigma F_y$ y $\Sigma M_O = Rd$.

Se observa que hay dos cantidades desconocidas en el sistema de fuerzas original. Por tanto, si la resultante es una fuerza, las tres incógnitas en este problema



serán R_x, R_y y d, que se podrían determinar a partir de las tres ecuaciones escalares. Con referencia a la figura (a), las tres ecuaciones son

$$R_x = \Sigma F_x \quad \xrightarrow{+} \quad R_x = 80 \cos 40^\circ - 50 = 11.284 \text{ kN}$$

Esta ecuación es suficiente para indicar que la resultante es una fuerza, no un par; si la resultante fuera un par, ΣF_x sería cero.

$$R_y = \Sigma F_y \quad +\!\uparrow \quad R_y = 80 \operatorname{sen} 40^\circ - 60 = -8.577 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_O = Rd \quad \circlearrowleft\!+ \quad \Sigma M_O = 350 - (80 \cos 40^\circ)(3.3) - 60(3) = -32.24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por tanto, la resultante **R** es

11.284 kN
θ
8.577 kN
R = 14.174 kN

$$\theta = \tan^{-1} \frac{8.577}{11.284} = 37.2^\circ$$

Como ΣM_O es negativa (es decir, en sentido de las manecillas del reloj), la resultante **R** también debe proporcionar un momento en sentido de las manecillas del reloj respecto a O, como se muestra en la figura (b). Por tanto, se obtiene

$$\Sigma M_O = Rd \quad \circlearrowright\!+ \quad 32.24 = 14.174d$$

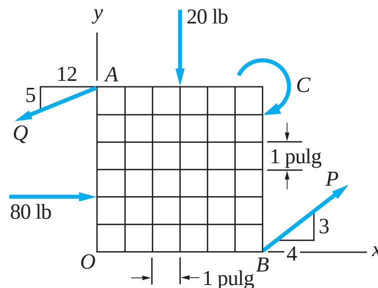
lo que da

$$d = 2.27 \text{ m}$$

El resultado final se muestra en la figura (b).

Problema de ejemplo 3.6

El sistema de fuerzas indicado consiste en el par C y cuatro fuerzas. Si la resultante de este sistema es un par de 500 lb · pulg en sentido contrario al horario, determine P, Q y C.



Solución

Este problema contiene tres incógnitas: P, Q y C. Como el sistema de fuerzas es el caso coplanar general, se dispone de tres ecuaciones para determinar la resultante. Dado que la resultante es un par, las primeras dos de las ecuaciones (3.5) toman la forma

$$R_x = \Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad -\frac{12}{13}Q + \frac{4}{5}P + 80 = 0 \tag{a}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad -\frac{5}{13}Q + \frac{3}{5}P - 20 = 0 \tag{b}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (a) y (b) da

$$P = 200 \text{ lb} \quad \text{y} \quad Q = 260 \text{ lb}$$ *Respuesta*

La tercera ecuación es la ecuación (3.6), $C^R = \Sigma M_O$. Dado que un par es un vector libre, el centro de momento puede ser cualquier punto. Dado que $C^R = 500$ lb · pulg, en sentido contrario al horario y eligiendo el punto A como el centro de momento, se tiene

$$C^R = \Sigma M_A \quad \circlearrowleft + \quad 500 = -20(3) - C + 80(4) + \frac{3}{5}P(6) + \frac{4}{5}P(6)$$

Sustituyendo $P = 200$ lb y resolviendo se obtiene

$$C = 1440 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$ *Respuesta*

Como los valores para P, Q y C son positivos, cada fuerza actúa en la dirección indicada en la figura.

Problemas

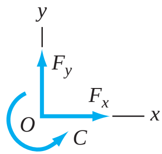


Fig. P3.16

3.16 Determine la resultante de la fuerza **R** y su línea de acción para los siguientes sistemas de fuerzas pares:

(a) $F_x = 300$ lb, $F_y = 0$, y $C = -900$ lb · pulg.
(b) $F_x = 200$ N, $F_y = -200$ N, y $C = 800$ N · m
(c) $F_x = -600$ kN, $F_y = -400$ kN, y $C = 0$
(d) $F_x = -600$ lb, $F_y = 800$ lb, y $C = -24\,000$ lb · pie

3.17 Determine la resultante de las tres fuerzas que actúan sobre la placa de unión de una armadura.

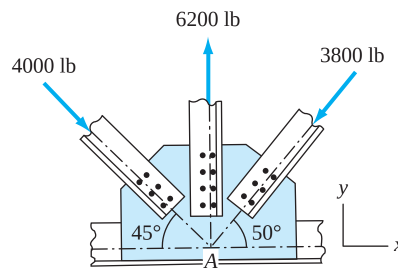


Fig. P3.17

3.18 La resultante de las tres fuerzas concurrentes que actúan sobre la armella es la fuerza **R** = 800**j** lb. Determine la magnitud de la fuerza **P** y el ángulo θ que especifica la dirección de la fuerza de 900 lb.

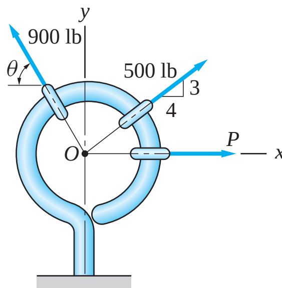


Fig. P3.18

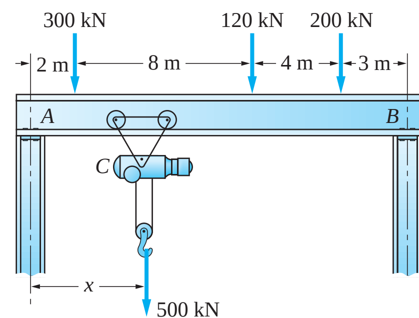


Fig. P3.19

3.19 La grúa viajera eléctrica *C* se desliza a lo largo de una vía sobre la viga horizontal *AB*. Además de la fuerza vertical de 500 kN soportada por la grúa, la viga también soporta las tres fuerzas verticales indicadas. (a) Si $x = 5$ m, determine la resultante de las cuatro fuerzas soportadas por la viga. (b) Determine la distancia *x* para la cual la resultante de las cuatro fuerzas actuaría en el centro del claro *AB*.

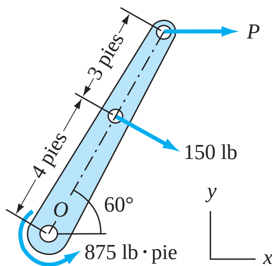


Fig. P3.20

3.20 Si la resultante del par y de las dos fuerzas indicadas es una fuerza **R** que actúa por el punto *O*, determine *P* y **R**.

3.21 Determine cuáles sistemas de fuerzas en (b) a (f) son equivalentes a la fuerza de 21 kN en (a).

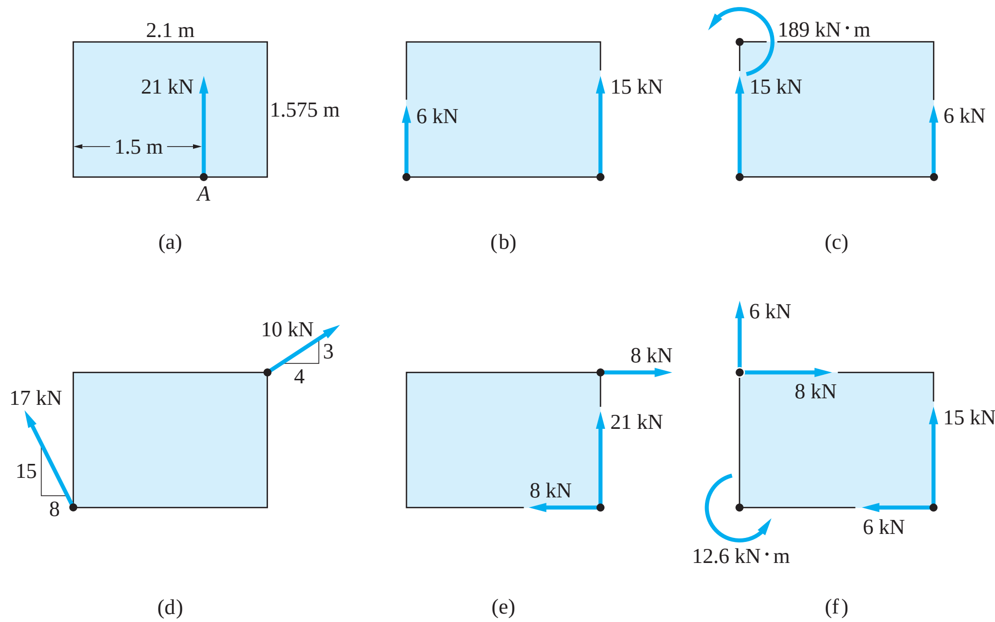


Fig. P3.21

3.22 Determine la resultante de las tres fuerzas si (a) $\theta = 30°$ y (b) $\theta = 45°$.

3.23 Determine la resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre la viga.

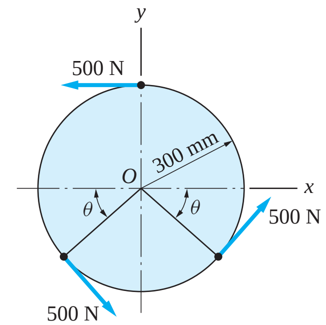


Fig. P3.22

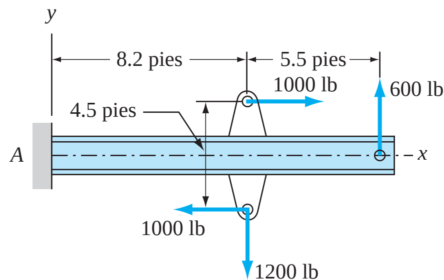


Fig. P3.23

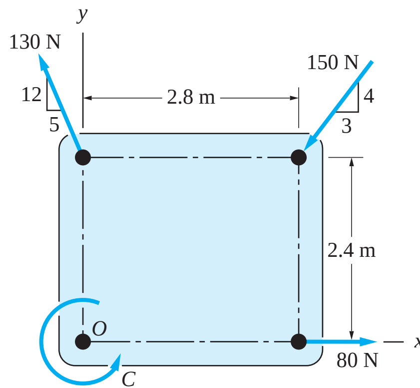


Fig. P3.24

3.24 Determine la resultante de las tres fuerzas y del par C y muéstrela en un bosquejo del sistema coordenado si (a) $C = 0$ y (b) $C = 90$ N · m.

3.25 La resultante de las tres fuerzas es una fuerza **R** que pasa por el punto B. Determine **R** y F.

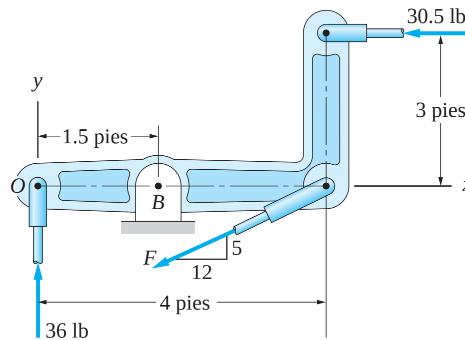


Fig. P3.25

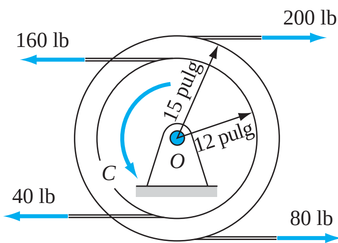


Fig. P3.26

3.26 La resultante de las cuatro tensiones en las bandas y del par C es una fuerza R que actúa por el punto O. Determine C y R.

3.27 La resultante de las tres fuerzas indicadas es un par en sentido contrario de las manecillas del reloj de magnitud 150 lb · pie. Calcule las magnitudes de las fuerzas.

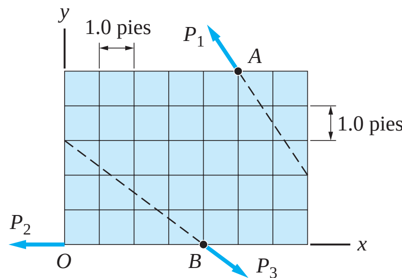


Fig. P3.27

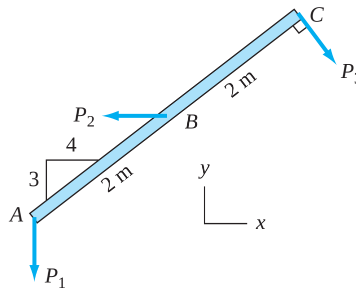


Fig. P3.28

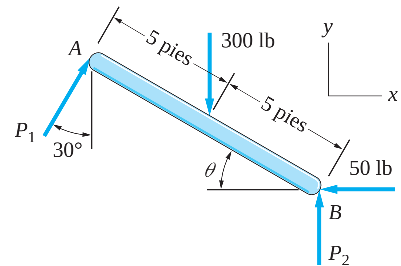


Fig. P3.29

3.28 La resultante de las tres fuerzas es la fuerza $\mathbf{R} = -170\mathbf{j}$ kN que actúa por el punto B. Determine P_1, P_2 y P_3.

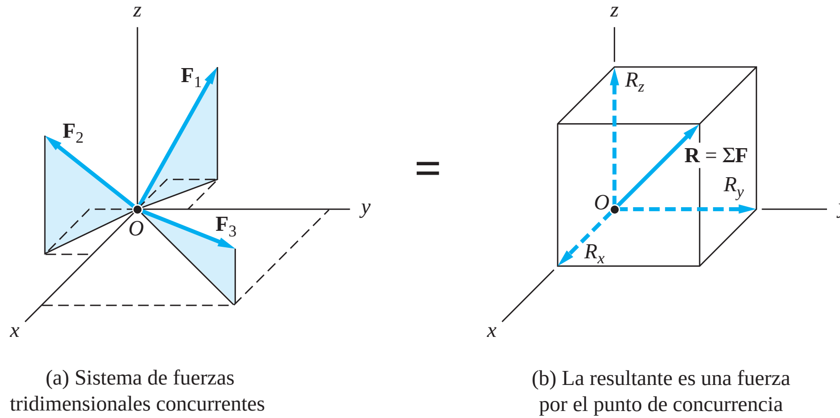
***3.29** La barra AB, que está inclinada a un ángulo θ con la horizontal, está sometida a las cuatro fuerzas indicadas. Si estas fuerzas no tienen resultante (ni una fuerza ni un par), determine P_1, P_2 y θ.

3.5 Resultantes de sistemas tridimensionales

En general, un sistema de fuerzas tridimensionales no se puede simplificar más que a un sistema fuerza-par. Las excepciones son los sistemas en los que las fuerzas son concurrentes o paralelas. En esta sección se analizan dos casos especiales, junto con una forma especial del sistema fuerza-par denominado *llave*.

a. Sistema de fuerzas tridimensionales concurrentes

En la figura 3.5(a) se muestra un sistema de fuerzas tridimensionales concurrentes. Igual que en el caso de fuerzas coplanares concurrentes, este sistema se puede reducir a la fuerza resultante $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ ($R_x = \Sigma F_x$, $R_y = \Sigma F_y$, $R_z = \Sigma F_z$) que actúa por el punto de concurrencia O, como se indica en la figura 3.5(b).



(a) Sistema de fuerzas tridimensionales concurrentes

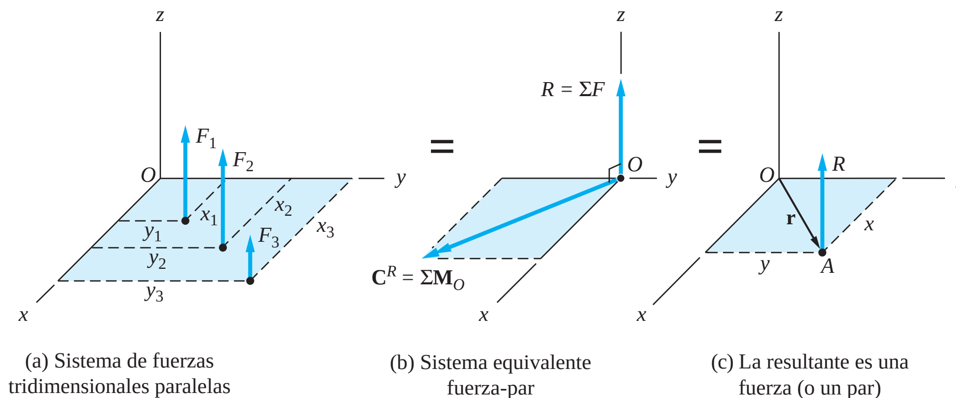
(b) La resultante es una fuerza por el punto de concurrencia

Fig. 3.5

b. Sistema de fuerzas tridimensionales paralelas

Considere el sistema de fuerzas en la figura 3.6(a), donde las fuerzas F_1, F_2, F_3, . . . son paralelas al eje z. Para encontrar la resultante, se inicia remplazando las fuerzas por un sistema equivalente fuerza-vector, con la fuerza actuando en el origen O, como se muestra en la figura 3.6(b). La magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{R}$, que también es paralela al eje z y del par-vector resultante C^R están dadas por

$$R = \Sigma F \tag{3.8}$$



(a) Sistema de fuerzas tridimensionales paralelas

(b) Sistema equivalente fuerza-par

(c) La resultante es una fuerza (o un par)

Fig. 3.6

y

$$\mathbf{C}^R = \Sigma \mathbf{M}_O \tag{3.9}$$

donde ΣM_O es la suma de los momentos de F_1, F_2, F_3, . . . respecto a O. El par-vector resultante $\mathbf{C}^R$ se encuentra en el plano xy ($\mathbf{C}^R$ no tiene componente z debido a que las fuerzas paralelas a un eje no tienen momento respecto a ese eje).

Como $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema de fuerzas en la figura 3.6(b) se puede simplificar aún más. Si $\Sigma F = 0$, entonces la resultante es el par $\mathbf{C}^R = \Sigma M_O$. Si $\Sigma F \neq 0$, la resultante es la fuerza $\mathbf{R}$ que actúa por el punto único A en el plano xy, como se muestra en la figura 3.6(c). El vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ que ubica este punto se obtiene igualando los momentos respecto al punto O del sistema fuerza-par en la figura 3.6(b) con la fuerza R en la figura 3.6(c):

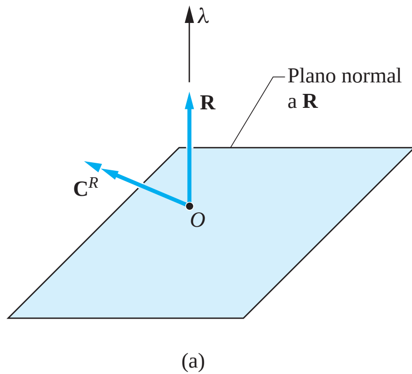
$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R} \tag{3.10}$$

Las componentes escalares de esta ecuación vectorial son

$$\Sigma M_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \cdots = Ry$$
$$\Sigma M_y = -F_1 x_1 - F_2 x_2 - F_3 x_3 - \cdots = -Rx$$

donde ΣM_x y ΣM_y son los momentos de las fuerzas originales respecto a los ejes x y y, respectivamente. Por tanto, las coordenadas x y y son

$$x = -\frac{\Sigma M_y}{R} \qquad y = \frac{\Sigma M_x}{R} \tag{3.11}$$



c. *Sistema de fuerzas tridimensionales general: la llave de torsión*

En la sección 3.2 se demostró que un sistema de fuerzas dado siempre se puede reducir a un sistema fuerza-par que consiste en una fuerza resultante $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$, que actúa en un punto arbitrario O y en un par-vector resultante $\mathbf{C}^R = \Sigma M_O$, como se muestra en la figura 3.7(a). Si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$ son mutuamente perpendiculares, se pueden reducir a una sola fuerza $\mathbf{R}$, actuando por un punto único (esta propiedad se utilizó

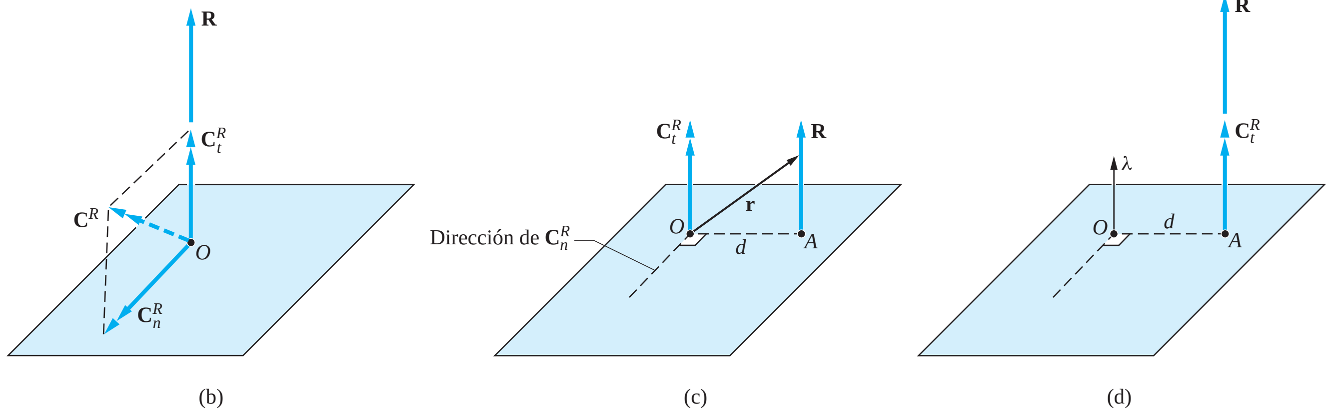


Fig. 3.7

en los casos especiales de sistemas de fuerzas coplanares y paralelas). En el caso general, **R** y $\mathbf{C}^R$ no serán perpendiculares entre sí y por tanto no se podrán reducir a una sola fuerza. Sin embargo, un sistema de fuerzas general siempre se puede representar por una fuerza y un par-vector *paralelo*, mediante el procedimiento descrito en seguida.

- Se descompone $\mathbf{C}^R$ en las componentes ortogonales $\mathbf{C}_t^R$ y $\mathbf{C}_n^R$, que son paralela y perpendicular a **R**, respectivamente. El resultado se muestra en la figura 3.7(b). La componente paralela se puede calcular con la ecuación (2.11):

$$\mathbf{C}_t^R = (\mathbf{C}^R \cdot \boldsymbol{\lambda})\lambda \tag{3.12}$$

  donde **λ** es el vector unitario en la dirección de **R**. Entonces la componente normal se determina con

$$\mathbf{C}_n^R = \mathbf{C}^R - \mathbf{C}_t^R \tag{3.13}$$

- Como $\mathbf{C}_n^R$ y **R** son mutuamente perpendiculares, se pueden remplazar por una sola fuerza **R** actuando en el punto *A*, como se ilustra en la figura 3.7(c). La línea de acción de esta fuerza se determina por el requerimiento de que su momento respecto a *O* debe ser igual a $\mathbf{C}_n^R$. En otras palabras,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{C}_n^R \tag{3.14}$$

  donde **r** es el vector trazado desde *O* hasta cualquier punto en la nueva línea de acción de **R**. La forma escalar de la ecuación (3.14) es $Rd = C_n^R$, donde *d* es la distancia entre *O* y *A*, como se indica en la figura 3.7(c). Esta ecuación da

$$d = \frac{C_n^R}{R} \tag{3.15}$$

  Observe que la línea *OA* es perpendicular a $\mathbf{C}_n^R$.
- Se desplaza $\mathbf{C}_t^R$ al punto *A*, como se muestra en la figura 3.7(d) (se puede hacer esto ya que un par es un vector libre). El resultado es un sistema fuerza-par colineal, denominado *llave de torsión*. La dirección de la llave de torsión, también conocida como *eje de la llave de torsión*, se especifica por el vector **λ**.

Un ejemplo físico de una llave es la operación de un destornillador. Se ejerce una fuerza a lo largo del eje del destornillador para mantener su punta contra un tornillo, mientras se aplica un par respecto al mismo eje para girar el tornillo. Como la fuerza y el par-vector son paralelos, constituyen una llave de torsión.

Problema de ejemplo 3.7

Los valores de ΣF_z, ΣM_x y ΣM_y para los tres sistemas de fuerzas que son paralelos al eje z son los siguientes:

Parte	ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y
1	50 kN	60 kN · m	−125 kN · m
2	−600 lb	0	−1200 lb · pie
3	0	600 lb · pulg	−800 lb · pulg

Determine la resultante de cada sistema de fuerzas y muéstrela en un bosquejo del sistema coordenado.

Solución

Parte 1

$$\Sigma F_z = 50 \text{ kN} \qquad \Sigma M_x = 60 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \Sigma M_y = -125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

La resultante es la fuerza $\mathbf{R} = 50\mathbf{k}$ kN. Con $\Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma M_x\mathbf{i} + \Sigma M_y\mathbf{j}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. La ecuación (3.10) se puede utilizar para determinar la línea de acción de $\mathbf{R}$:

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

$$60\mathbf{i} - 125\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = 50y\mathbf{i} - 50x\mathbf{j}$$

Igualando componentes similares se obtienen las ecuaciones escalares siguientes:

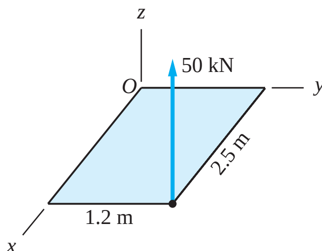
$$60 = 50y \quad \text{y} \quad -125 = -50x$$

lo que da $x = 2.5$ m y $y = 1.2$ m. El bosquejo de la resultante se muestra en la figura (a).

Si se utilizan las ecuaciones (3.11) se obtienen resultados idénticos para x y y:

$$x = -\frac{\Sigma M_y}{R} = -\frac{-125}{50} = 2.5 \text{ m}$$

$$y = \frac{\Sigma M_x}{R} = \frac{60}{50} = 1.2 \text{ m}$$



(a)

Parte 2

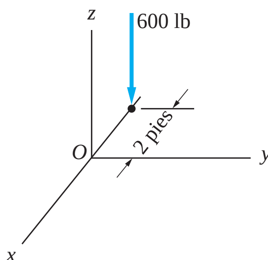
$$\Sigma F_z = -600 \text{ lb} \qquad \Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = -1200 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

La resultante es la fuerza $\mathbf{R} = -600\mathbf{k}$ lb. En este caso, la ecuación (3.10) da

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

$$-1200\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & -600 \end{vmatrix} = -600y\mathbf{i} + 600x\mathbf{j}$$

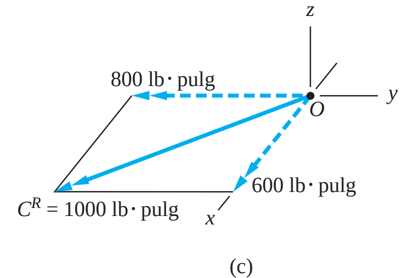
Igualando componentes similares se obtiene $x = -2$ pies y $y = 0$. La resultante se muestra en la figura (b).



(b)

Parte 3

$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_x = 600 \text{ lb} \cdot \text{pulg} \qquad \Sigma M_y = -800 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

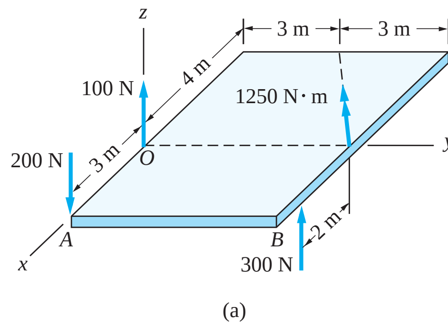


(c)

Debido a que la suma de las fuerzas es cero y la de los momentos no es cero, la resultante es el par-vector $\mathbf{C}^R = \Sigma M_x \mathbf{i} + \Sigma M_y \mathbf{j} = 600\mathbf{i} - 800\mathbf{j}$ lb · pulg, indicado en la figura (c). La magnitud de este par-vector es 1000 lb · pulg.

Problema de ejemplo 3.8

El sistema de fuerzas paralelas en la figura (a) consiste de las tres fuerzas indicadas y del par de 1250 N · m. 1. Determine la resultante y muéstrela en un bosquejo del sistema coordenado. 2. Determine la resultante si se invierte la dirección de la fuerza de 100 N.



(a)

Solución

Parte 1

La resultante del sistema de fuerzas que se muestra en la figura (a) será una fuerza o bien un par. Se inicia sumando las fuerzas.

$$\overset{+}{\uparrow} \quad R = \Sigma F_z = 100 - 200 + 300 = 200 \text{ N}$$

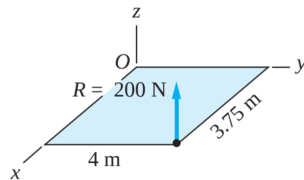
Por tanto, la resultante es la fuerza $\mathbf{R} = 200\mathbf{k}$ N.

Para encontrar la línea de acción de **R** se debe utilizar una ecuación de momentos. Utilizando el origen O como el centro de momentos y suponiendo que **R** interseca el plano xy en el punto $(x, y, 0)$, la ecuación (3.10) toma la forma

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

$$3\mathbf{i} \times (-200\mathbf{k}) + [(2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \times 300\mathbf{k}]$$

$$-\left(\frac{4}{5}\right) 1250\mathbf{i} - \left(\frac{3}{5}\right) 1250\mathbf{j} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times 200\mathbf{k}$$



(b)

Desarrollando el producto cruz y simplificando, se obtiene

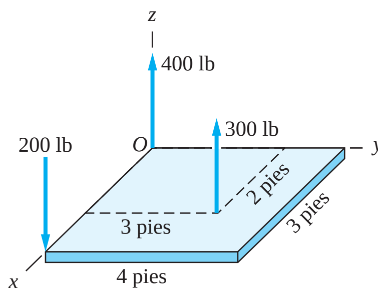
$$800\mathbf{i} - 750\mathbf{j} = 200y\mathbf{i} - 200x\mathbf{j}$$

Igualando componentes similares se obtiene $x = 3.75$ m y $y = 4$ m. La resultante se muestra en la figura (b).

Parte 2

Si se invierte la dirección de la fuerza de 100 N, la suma de las fuerzas será cero, lo que significa que la resultante no es una fuerza. Para determinar el par resultante, se debe calcular el momento respecto a cualquier punto. Se elige el origen *O* como el centro de momentos. Dado que al invertir la dirección de la fuerza de 100 N no tiene efecto sobre el momento respecto a *O*, se concluye que el momento es el mismo que el encontrado en la solución de la parte 1. Por tanto, la resultante es el par-vector $\mathbf{C}^R = \Sigma\mathbf{M}_O = 800\mathbf{i} - 750\mathbf{j}$ N · m.

Problema de ejemplo 3.9



(a)

La placa se somete a cuatro fuerzas paralelas, tres de ellas se muestran en la figura (a). La cuarta fuerza **P** y su línea de acción se desconocen. La resultante de este sistema de fuerzas es el par-vector $\mathbf{C}^R = -1100\mathbf{i} + 1500\mathbf{j}$ lb · pie. Determine **P** y su línea de acción.

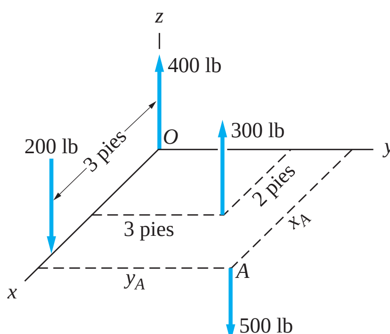
Solución

Como la resultante es un par, la suma de las fuerzas debe ser cero:

$$+\uparrow \quad R = \Sigma F_z = P + 300 + 400 - 200 = 0$$

de donde $P = -500$ lb. Por tanto, la fuerza **P** es

$$\mathbf{P} = -500\mathbf{k} \text{ lb}$$ *Respuesta*



(b)

Como se muestra en la figura (b), se designa *A* como el punto donde **P** interseca el plano *xy*. Para determinar la ubicación de *A*, se iguala la suma de los momentos de las fuerzas originales respecto a cualquier punto al momento de la resultante respecto a cualquier punto (en este caso, el momento de la resultante respecto a cada punto es simplemente $\mathbf{C}^R$). Eligiendo el punto *O* como el centro de momentos y observando que $x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j}$ es el vector del punto *O* al punto *A*, la ecuación momentos es

$$\mathbf{C}^R = \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

$$-1100\mathbf{i} + 1500\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_A & y_A & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix}$$

Desarrollando los determinantes anteriores e igualando componentes similares da

$$-1100 = 900 - 500y_A$$
$$1500 = 600 - 600 + 500x_A$$

de donde

$$x_A = 3 \text{ pies} \quad \text{y} \quad y_A = 4 \text{ pies}$$ *Respuesta*

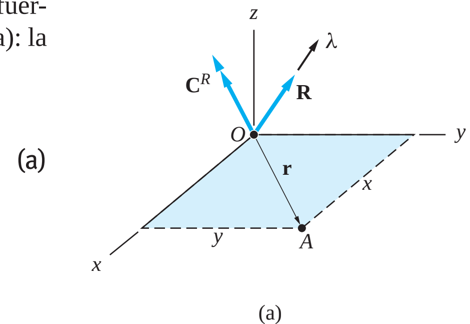
Problema de ejemplo 3.10

Determine la llave que sea equivalente al sistema de fuerzas descrito en el problema de ejemplo 3.1. Encuentre las coordenadas del punto donde el eje de la llave cruza el plano *xy*.

Solución

Como se explicó en la solución para el problema de ejemplo 3.1, el sistema de fuerzas original se puede reducir al sistema fuerza-par que se muestra en la figura (a): la fuerza **R**, que actúa en el origen *O* y el par $\mathbf{C}^R$, donde

$$\mathbf{R} = 38.8\mathbf{i} + 43.2\mathbf{j} + 38.4\mathbf{k} \text{ lb}$$
$$\mathbf{C}^R = 390\mathbf{i} + 116\mathbf{j} + 360\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pie}$$ (a)



(a)

La magnitud de **R** es

$$R = \sqrt{(38.8)^2 + (43.2)^2 + (38.4)^2} = 69.6 \text{ lb}$$

Se inicia determinando el eje de la llave, definido por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ en la dirección de **R**:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{38.8\mathbf{i} + 43.2\mathbf{j} + 38.4\mathbf{k}}{69.6}$$
$$= 0.557\mathbf{i} + 0.621\mathbf{j} + 0.552\mathbf{k}$$

La componente de $\mathbf{C}^R$ en la dirección de $\boldsymbol{\lambda}$ ahora se puede obtener con la ecuación (3.12): $\mathbf{C}_t^R = (\mathbf{C}^R \cdot \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\lambda}$. La magnitud de este vector es

$$C_t^R = \mathbf{C}^R \cdot \boldsymbol{\lambda}$$
$$= (390\mathbf{i} + 116\mathbf{j} + 360\mathbf{k}) \cdot (0.557\mathbf{i} + 0.621\mathbf{j} + 0.552\mathbf{k})$$
$$= 488 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

lo que da

$$\mathbf{C}_t^R = C_t^R\boldsymbol{\lambda} = 488(0.557\mathbf{i} + 0.621\mathbf{j} + 0.552\mathbf{k})$$
$$= 272\mathbf{i} + 303\mathbf{j} + 269\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Por tanto, la llave consiste en el sistema fuerza-par

$$\mathbf{R} = 38.8\mathbf{i} + 43.2\mathbf{j} + 38.4\mathbf{k} \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\mathbf{C}_t^R = 272\mathbf{i} + 303\mathbf{j} + 269\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textit{Respuesta}$$

Para encontrar las coordenadas del punto donde el eje de la llave interseca el plano xy, se debe encontrar $\mathbf{C}_n^R$, la componente de $\mathbf{C}^R$ que es normal a $\boldsymbol{\lambda}$. De la ecuación (3.13), se obtiene

$$\mathbf{C}_n^R = \mathbf{C}^R - \mathbf{C}_t^R = (390\mathbf{i} + 116\mathbf{j} + 360\mathbf{k}) - (272\mathbf{i} + 303\mathbf{j} + 269\mathbf{k})$$

$$= 118\mathbf{i} - 187\mathbf{j} + 91\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Con referencia a la figura (a), designando $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ como el vector del origen O a A, el punto donde la llave interseca el plano xy. Utilizando la ecuación (3.14), se obtiene

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{C}_n^R$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ 38.8 & 43.2 & 38.4 \end{vmatrix} = 118\mathbf{i} - 187\mathbf{j} + 91\mathbf{k}$$

Después de desarrollar el determinante, se obtiene

$$38.4y\mathbf{i} - 38.4x\mathbf{j} + (43.2x - 38.8y)\mathbf{k} = 118\mathbf{i} - 187\mathbf{j} + 91\mathbf{k}$$

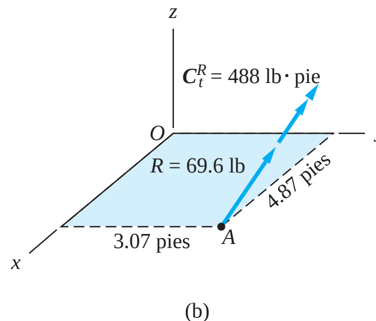
Igualando los coeficientes de **i** y **j** da

$$38.4y = 118 \qquad y = 3.07 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$-38.4x = -187 \qquad x = 4.87 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

La tercera ecuación, obtenida igualando los coeficientes de **k**, no es independiente de las dos ecuaciones anteriores, como se puede verificar con facilidad.

La llave resultante se ilustra en la figura (b), donde se muestran las magnitudes de la fuerza y del par-vector.



(b)

Problemas

3.30 Los valores de ΣF_z, ΣM_x y ΣM_y para los tres sistemas de fuerzas que son paralelas al eje z son

Caso	ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y
a	−50 lb	−250 lb · pie	200 lb · pie
b	50 kN	0	−250 kN · m
c	40 N	320 N · m	−400 N · m

Determine la resultante de cada sistema de fuerzas y muéstrela en un bosquejo del sistema coordenado.

3.31 Establezca si la resultante de cada sistema de fuerzas indicado es una fuerza, un par o una llave. *No determine la resultante*.

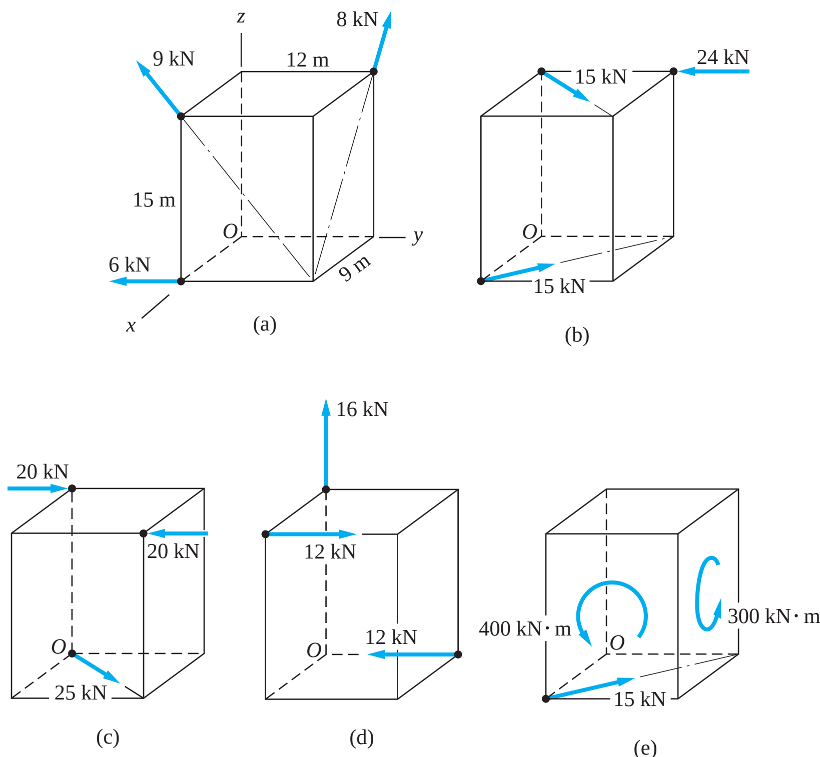


Fig. P3.31

3.32 Determine la resultante de las tres tensiones en los cables que actúan sobre la barra horizontal si $T_1 = 900$ lb, $T_2 = 500$ lb y $T_3 = 300$ lb.

3.33 La resultante de las tres tensiones en los cables actúa a lo largo de la dirección y. Determine T_1 y T_3 si $T_2 = 980$ lb.

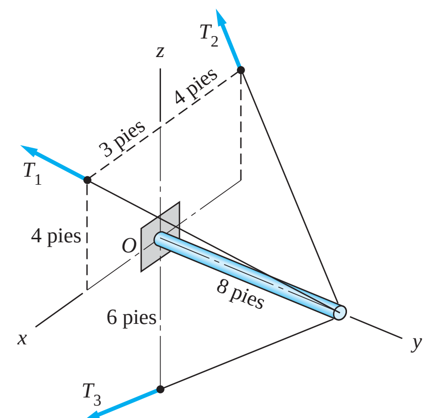


Fig. P3.32, P3.33

3.34 La resultante de las tres fuerzas indicadas es la fuerza $\mathbf{R} = 200\mathbf{k}$ lb. Determine P_1, P_2 y P_3.

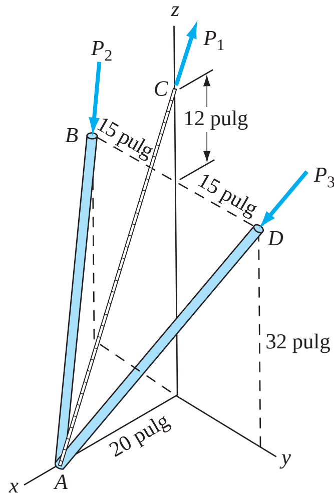


Fig. P3.34

3.35 La resultante de las cuatro fuerzas que actúan sobre la ménsula en escuadra es un par $\mathbf{C}^R$. Determine $\mathbf{C}^R$ y la fuerza $\mathbf{P}$.

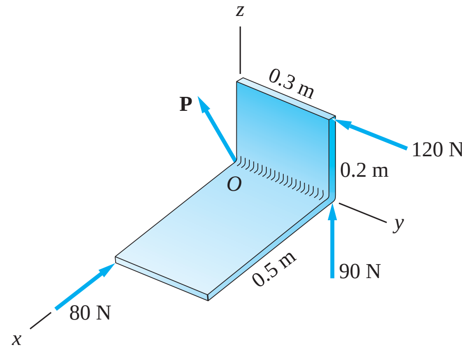


Fig. P3.35

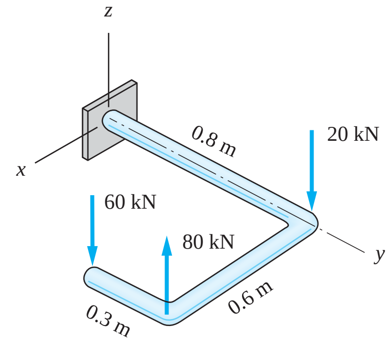


Fig. P3.36

3.36 Determine la resultante de las tres fuerzas indicadas.

3.37 Encuentre la resultante de las tres fuerzas que actúan sobre la placa cuadrada.

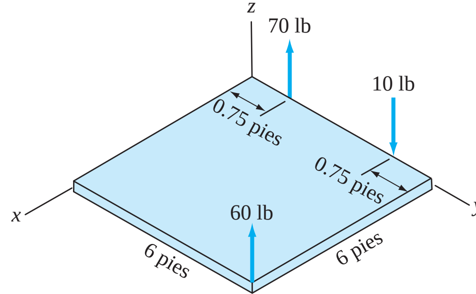


Fig. P3.37

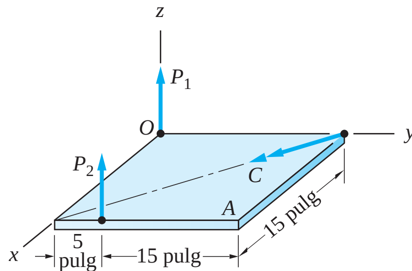


Fig. P3.38, P3.39

3.38 La resultante de las fuerzas P_1, P_2 y del par C es la fuerza $\mathbf{R} = 12\mathbf{k}$ lb que actúa en el punto A ($\mathbf{R}$ no se muestra en la figura). Determine P_1, P_2 y C.

3.39 Encuentre la resultante de las dos fuerzas y del par indicados, dado que $P_1 = 20$ lb, $P_2 = 30$ lb y $C = 100$ lb · pulg.

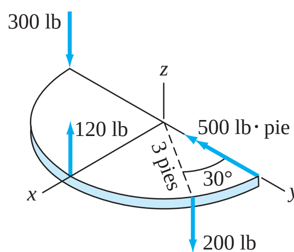


Fig. P3.40

3.40 Determine la resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre la placa semicircular.

3.41 La lámpara A de alumbrado público está unida al extremo de la barra horizontal ABO. La lámpara, que pesa 100 N, está sometida a una carga de viento de 20 N que actúa en la dirección y negativa. Las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ representan las tensiones en los dos cables que están unidos en el punto B. La resultante de las cuatro fuerzas indicadas es una fuerza $\mathbf{R}$ que actúa en el punto O. Determine las tensiones P y Q y la fuerza $\mathbf{R}$.

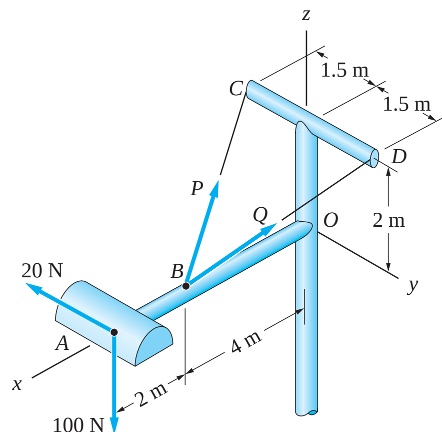


Fig. P3.41

3.42 La torre de transmisión *OA* se está izando a su posición por los cables *AB* y *AC*. La resultante de las tensiones en los cables *P* y *Q*, junto con el peso de 2400 lb de la torre, es una fuerza **R** que actúa en el punto *O*. Determine *P*, *Q* y **R**.

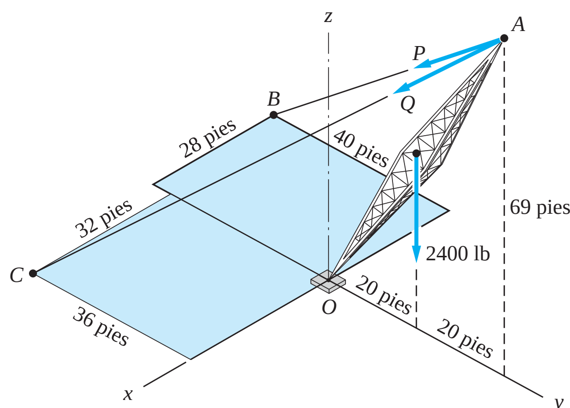


Fig. P3.42

3.43 El sistema fuerza-par actuando en *O* es equivalente a la llave que actúa en *A*. Si $\mathbf{R} = 600\mathbf{i} + 1400\mathbf{j} + 700\mathbf{k}$ lb y $|\mathbf{C}| = 1200$ lb · pie, determine $\mathbf{C}^R$.

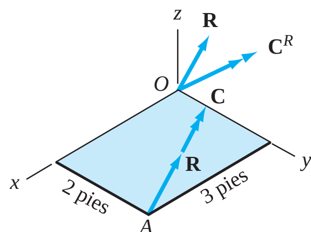


Fig. P3.43

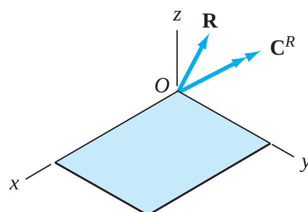


Fig. P3.44

3.44 El sistema fuerza-par que consiste en la fuerza $\mathbf{R} = 250\mathbf{i} + 360\mathbf{j} - 400\mathbf{k}$ N y en el par-vector $\mathbf{C}^R = 1200\mathbf{i} + 750\mathbf{j} + 560\mathbf{k}$ N · m. Determine la llave equivalente y encuentre las coordenadas del punto donde el eje de la llave cruza el plano *xy*.

3.45 (a) Remplace el sistema de fuerzas indicado por un sistema equivalente fuerza-par con la fuerza actuando en el punto *O*. (b) Determine la llave equivalente y encuentre las coordenadas del punto donde el eje de la llave cruza el plano *xy*.

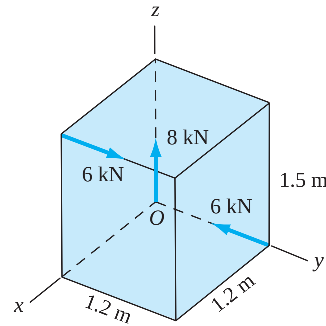


Fig. P3.45

3.6 Introducción a las cargas normales distribuidas

Todas las fuerzas consideradas hasta este punto se han supuesto ser concentradas. Aquí se consideran las cargas distribuidas que están dirigidas normales a la superficie sobre la que actúan, como la *presión*. Dos ejemplos de cargas normales distribuidas son la presión del viento actuando sobre un costado de un edificio y la presión del agua sobre una presa. Los métodos para determinar las resultantes de las cargas normales distribuidas son muy similares a los utilizados para cargas concentradas. La única diferencia notable es que se utiliza integración en vez de adición.

a. Cargas de superficie

Considere la carga que se muestra en la figura 3.8, que es paralela al eje *z* y está distribuida sobre la región plana $\mathscr{A}$ que se encuentra en el plano *xy*.* La distribución de la carga está especificada por la función $p(x, y)$, denominada *intensidad de carga*.

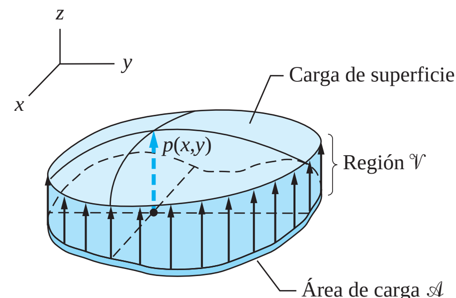


Fig. 3.8

*El caso más general de una carga distribuida sobre una superficie curva se analiza en el capítulo 8.

Las unidades de la intensidad de carga son N/m^2, lb/pie^2, etc. La región plana $\mathscr{A}$ se conoce como *área de carga* y la superficie formada por el trazo de la intensidad de carga se denomina *superficie de carga*. La región que se encuentra entre el área de carga $\mathscr{A}$ y la superficie de carga se designa $\mathscr{V}$.

Como se muestra en la figura 3.9(a), dA representa un elemento de área diferencial (infinitesimal) de $\mathscr{A}$. La fuerza aplicada a dA es $dR = p\, dA$. La carga de superficie distribuida entonces se puede representar matemáticamente como un número infinito de fuerzas dR que son paralelas al eje z. Por tanto, la resultante se puede determinar empleando los métodos explicados antes para fuerzas paralelas. Sin embargo, debido a que el sistema de fuerzas aquí consiste de un número infinito de fuerzas diferenciales, las sumatorias se deben remplazar por una integración sobre el área de carga $\mathscr{A}$.

La fuerza resultante se obtiene con $R = \Sigma F_z$, que toma la forma

$$R = \int_{\mathscr{A}} dR = \int_{\mathscr{A}} p\, dA \qquad (3.16)$$

donde el intervalo de integración es el área de carga $\mathscr{A}$.

Las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ que ubican la línea de acción de R, indicadas en la figura 3.9(b), se determinan con las ecuaciones (3.11): $\bar{x} = -\Sigma M_y/R$ y $\bar{y} = \Sigma M_x/R$. Después de remplazar ΣM_x por $\int_{\mathscr{A}} py\, dA$ y ΣM_y por $\int_{\mathscr{A}} px\, dA$, estas ecuaciones se convierten en

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathscr{A}} px\, dA}{\int_{\mathscr{A}} p\, dA} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\int_{\mathscr{A}} py\, dA}{\int_{\mathscr{A}} p\, dA} \qquad (3.17)$$

Ahora considere las ecuaciones (3.16) y (3.17) desde un punto de vista geométrico. Por inspección de la figura 3.9 se observa que $dR = p\, dA$ representa un volumen diferencial de la región $\mathscr{V}$ en la figura 3.8. Este volumen se denota como dV en la figura 3.9(a). Por tanto, la fuerza resultante R en la ecuación (3.16) se puede escribir como:

$$R = \int_{\mathscr{V}} dV = V \qquad (3.18)$$

donde V es el volumen total de la región $\mathscr{V}$.

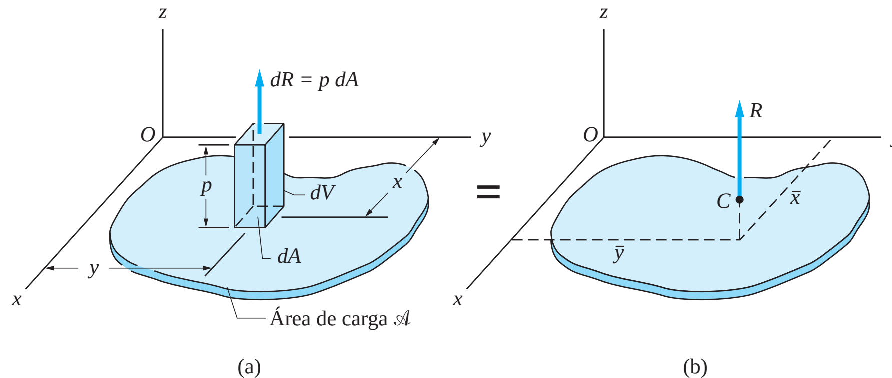


Fig. 3.9

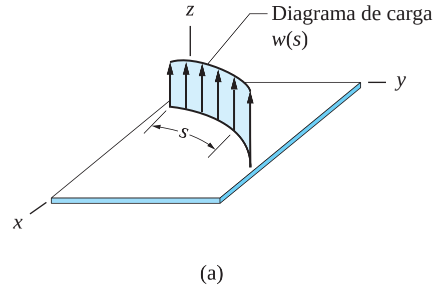
Remplazando $p\,dA$ por dV en la ecuación (3.17), se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{V}} x\,dV}{\int_{\mathcal{V}} dV} = \frac{\int_{\mathcal{V}} x\,dV}{V}$$
$$\bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{V}} y\,dV}{\int_{\mathcal{V}} dV} = \frac{\int_{\mathcal{V}} y\,dV}{V} \tag{3.19}$$

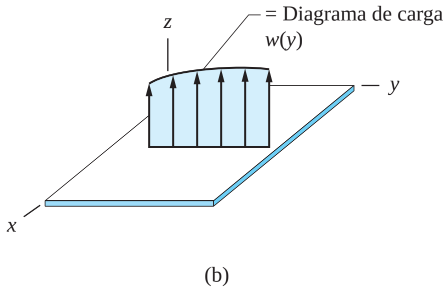
Como se explicará en el capítulo 8, las ecuaciones (3.19) definen las coordenadas de un punto conocido como *centroide* del volumen que ocupa la región $\mathcal{V}$. Este punto está identificado por C en la figura 3.9(b). La coordenada z del centroide no es de interés aquí ya que $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son suficientes para definir la línea de acción de la fuerza resultante.

La determinación de la fuerza resultante de una carga normal distribuida sobre un área plana se puede entonces resumir como sigue:

- La magnitud de la fuerza resultante es igual al volumen de la región entre el área de carga y la superficie de carga.
- La línea de acción de la fuerza resultante pasa por el centroide del volumen limitado por el área de carga y la superficie de carga.



(a)



(b)

Fig. 3.10

b. *Cargas lineales*

Cuando el ancho del área de carga es despreciable comparado con su longitud, una carga distribuida se puede representar como una carga lineal. Las cargas distribuidas a lo largo de una curva plana y a lo largo de una línea recta se muestran en las figuras 3.10(a) y (b), respectivamente. Las cargas lineales se caracterizan por la *intensidad de carga* w, una función de la distancia medida a lo largo de la línea de distribución. El trazo de w se denomina *diagrama de carga*. Las unidades de w son N/m, lb/pie, etc. En esta sección, sólo se consideran cargas en línea recta. Las cargas distribuidas a lo largo de curvas planas se analizarán en el capítulo 8.

Como se muestra en la figura 3.11(a). Una carga en línea recta es equivalente a un número infinito de fuerzas diferenciales, cada una de magnitud $dR = w\,dx$. Como estas fuerzas son paralelas, su resultante es $\mathbf{R} = \Sigma F_z$, o

$$R = \int_{x=0}^{L} dR = \int_{0}^{L} w\,dx \tag{3.20}$$

dirigida paralela al eje z, como se indica en la figura 3.11(b).

La línea de acción de R se puede determinar igualando los momentos respecto al punto O para los dos sistemas en las figuras 3.11(a) y (b):

$$\circlearrowleft + \quad \Sigma M_O = \int_{x=0}^{L} x\,dR = \int_{0}^{L} wx\,dx = R\bar{x}$$

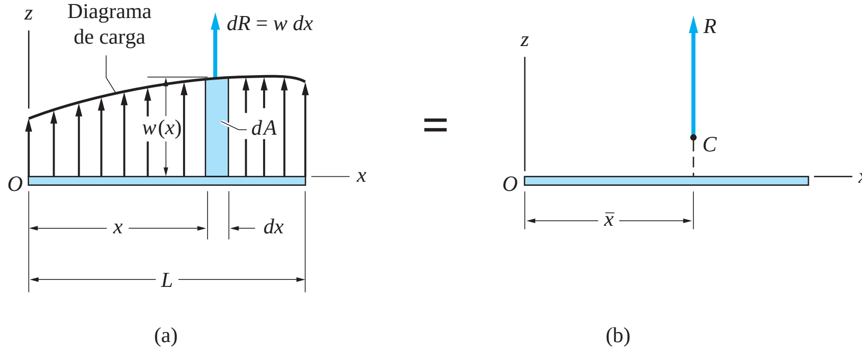


Fig. 3.11

Sustituyendo la expresión para R dada en la ecuación (3.20) y despejando $\bar{x}$, se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L wx\,dx}{\int_0^L w\,dx} \tag{3.21}$$

Con referencia a la figura 3.11(a), se observa que $dR = w\,dx$ es igual al área diferencial dA abajo del diagrama de carga. Por tanto, la ecuación (3.20) representa el área total A debajo de ese diagrama. Sustituyendo $w\,dx = dA$, la ecuación (3.21) se puede escribir como

$$\bar{x} = \frac{\int_{x=0}^L x\,dA}{\int_{x=0}^L dA} = \frac{\int_{x=0}^L x\,dA}{A} \tag{3.22}$$

En el capítulo 8 se demuestra que $\bar{x}$ ubica el *centroide* del área abajo del diagrama de carga, identificado por C en la figura 3.11(b) (la coordenada z del centroide no es de interés en este caso). Por tanto, se puede concluir lo siguiente para cargas en línea recta:

- La magnitud de la fuerza resultante es igual al área abajo del diagrama de carga.
- La línea de acción de la fuerza resultante pasa por el centroide del área abajo del diagrama de carga.

c. Cálculo de resultantes

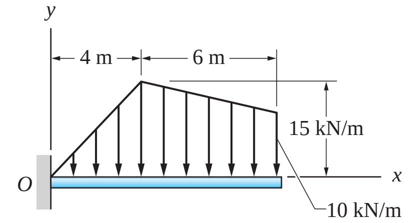
Al examinar las ecuaciones (3.16) a (3.22), se observa que el cálculo de la resultante de cargas distribuidas en esencia es un problema de integración. El análisis de las técnicas de integración asociadas se pospone hasta el capítulo 8. Sin embargo, si la

superficie de carga o el diagrama de carga tiene una forma simple, entonces se pueden consultar tablas de centroides, como la tabla 3.1, para determinar la resultante, como se ilustra en los problemas de ejemplo.

A. Volúmenes	B. Áreas
Sólido rectangular $\bar{x} = \frac{1}{2}b$ $\quad \bar{y} = \frac{1}{2}L$ $\quad \bar{z} = \frac{1}{2}h$ $V = bLh$	Rectángulo $\bar{x} = \frac{1}{2}b$ $\quad \bar{y} = \frac{1}{2}h$ $A = bh$
Sólido triangular recto $\bar{x} = \frac{1}{2}b$ $\quad \bar{y} = \frac{2}{3}L$ $\quad \bar{z} = \frac{1}{3}h$ $V = \frac{1}{2}\, bhL$	Triángulo recto $\bar{x} = \frac{2}{3}b$ $\quad \bar{y} = \frac{1}{3}h$ $A = \frac{1}{2}\, bh$

Tabla 3.1 Centroides de algunas formas geométricas comunes (el capítulo 8 contiene tablas adicionales).

Problema de ejemplo **3.11**

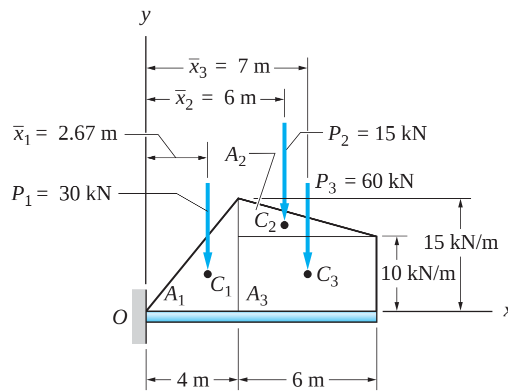


(a)

Determine la resultante de la carga lineal que actúa sobre la viga que se muestra en la figura (a).

Solución

Se observa que el diagrama de carga no corresponde a alguna de las formas comunes que se indican en la tabla 3.1. No obstante, como se muestra en la figura (b), el diagrama de carga se puede representar como la suma de las tres cargas lineales correspondientes a los dos triángulos, A_1 y A_2, y al rectángulo A_3. La resultante de cada una de estas tres cargas lineales es igual al área del diagrama de carga correspondiente. La línea de acción de cada resultante pasa por el centroide del diagrama, la ubicación del cual se puede determinar consultando la tabla 3.1.



(b)

Designando P_1, P_2 y P_3 como las resultantes de las cargas lineales representadas por las áreas A_1, A_2 y A_3, respectivamente, se tiene

$$P_1 = \frac{1}{2}(4)(15) = 30 \text{ kN}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(6)(5) = 15 \text{ kN}$$

$$P_3 = 6(10) = 60 \text{ kN}$$

La línea de acción de cada una de estas fuerzas pasa por el centroide del diagrama de carga correspondiente, designados C_1, C_2 y C_3 en la figura (b). Las coordenadas x de los centroides se obtienen consultando la tabla 3.1:

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{3}(4) = 2.67 \text{ m}$$

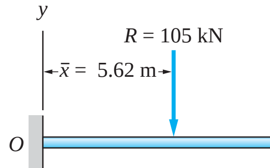
$$\bar{x}_2 = 4 + \frac{1}{3}(6) = 6 \text{ m}$$

$$\bar{x}_3 = 4 + \frac{1}{2}(6) = 7 \text{ m}$$

Entonces se deduce que la magnitud de la resultante de la carga lineal en la figura (a) está dada por

$$+\downarrow \quad R = P_1 + P_2 + P_3 = 30 + 15 + 60 = 105 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

Para determinar $\bar{x}$, la distancia horizontal desde el punto O hasta la línea de acción de R, se utiliza la ecuación de momentos:



(c)

$$\Sigma M_O = R\bar{x} \quad \circlearrowleft + \quad 30(2.67) + 15(6) + 60(7) = 105\bar{x}$$

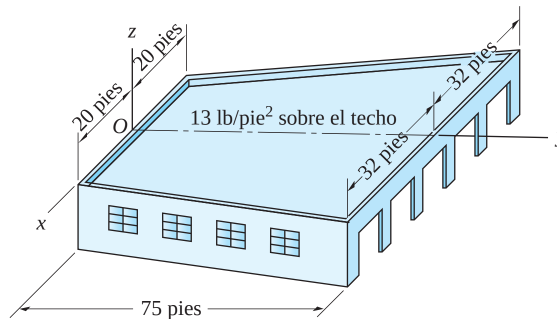
lo que da

$$\bar{x} = 5.62 \text{ m} \qquad \textit{Respuesta}$$

La resultante se muestra en la figura (c).

Problema de ejemplo 3.12

Después de una lluvia intensa, el techo plano del edificio mostrado en la figura (a) está cubierto por 2.5 pulg de agua de lluvia. El peso específico del agua es 62.4 lb/pie^3, por lo que el agua a una profundidad de 2.5 pulg causa una presión uniforme de $62.4(2.5/12) = 13$ lb/pie^2. Determine la fuerza resultante que ejerce el agua sobre el techo.



(a)

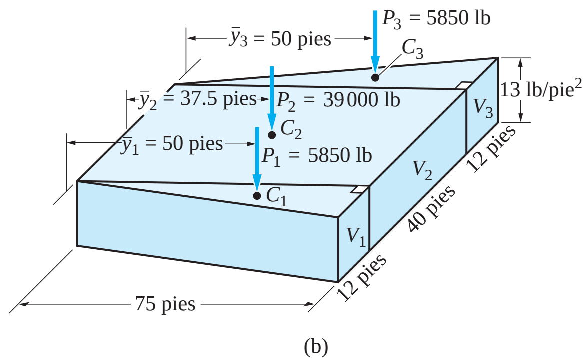
Solución

El diagrama de carga en la figura (b) se puede dividir en tres formas sólidas: dos sólidos triangulares rectos de volúmenes V_1 y V_3 y un sólido rectangular de volumen V_2. La fuerza resultante correspondiente a cada una de estas formas es igual al volumen de la forma. Designando P_1, P_2 y P_3 como las resultantes, se tiene

$$P_1 = V_1 = 13\left[\frac{1}{2}(12)(75)\right] = 5850 \text{ lb}$$

$$P_2 = V_2 = 13[(40)(75)] = 39\,000 \text{ lb}$$

$$P_3 = V_3 = P_1 = 5850 \text{ lb}$$



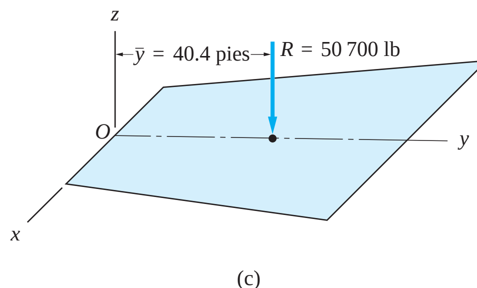
(b)

Las líneas de acción de estas fuerzas pasan por los centroides de los volúmenes correspondientes. Los puntos donde estas fuerzas intersecan el techo del edificio están identificadas C_1, C_2 y C_3 en la figura (b).

La magnitud de la fuerza resultante está dada por

$$+\downarrow \quad R = P_1 + P_2 + P_3$$
$$= 5850 + 39\,000 + 5850 = 50\,700 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Como el área de carga (el techo del edificio) es simétrico respecto al eje y y la presión es uniforme, la resultante se encontrará a lo largo del eje y. Por tanto, sólo se necesita calcular la distancia $\bar{y}$ indicada en la figura (c).



(c)

Consultando la tabla 3.1, las coordenadas de C_1, C_2 y C_3 en la figura (b) son

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_3 = \frac{2}{3}(75) = 50 \text{ pies}$$
$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2}(75) = 37.5 \text{ pies}$$

Ahora se puede determinar $\bar{y}$ utilizando la ecuación de momentos

$$\Sigma M_x = -R\bar{y} \qquad -5850\,(50) - 39\,000\,(37.5) - 5850\,(50) = -50\,700\,\bar{y}$$

lo que da

$$\bar{y} = 40.4 \text{ pies} \qquad \textit{Respuesta}$$

La resultante se muestra en la figura (c).

Problemas

3.46 Durante una tormenta, el viento ejerce una presión constante de 2.3 lb/pie^2, normal a la superficie de la señal de alto. Determine la fuerza resultante debida al viento.

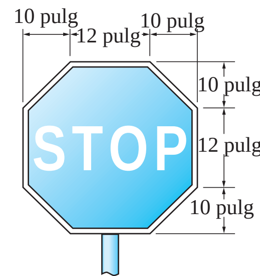


Fig. P3.46

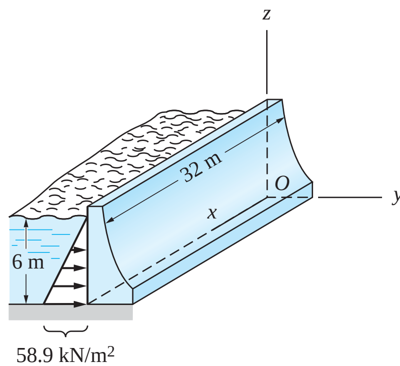


Fig. P3.47

3.47 La presión del agua actuando sobre la cara vertical de la presa de concreto varía linealmente con la profundidad del agua como se muestra. Determine la fuerza resultante causada por el agua.

3.48 Determine la resultante de la carga lineal que actúa sobre la viga *ABC*.

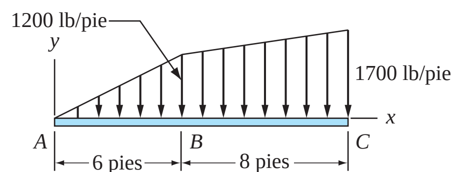


Fig. P3.48

3.49 Determine la resultante de la carga lineal que actúa sobre la viga.

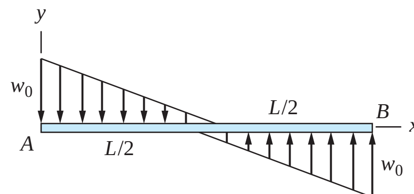


Fig. P3.49

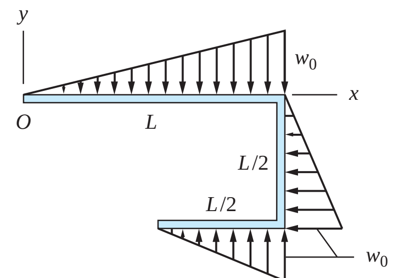


Fig. P3.50

3.50 Determine la resultante de las cargas lineales que actúan sobre el marco y la coordenada *x* del punto donde la resultante interseca el eje *x*.

3.51 Encuentre la resultante de la carga distribuida que actúa sobre la placa plana.

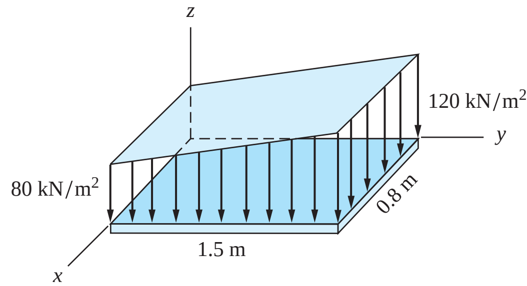


Fig. P3.51

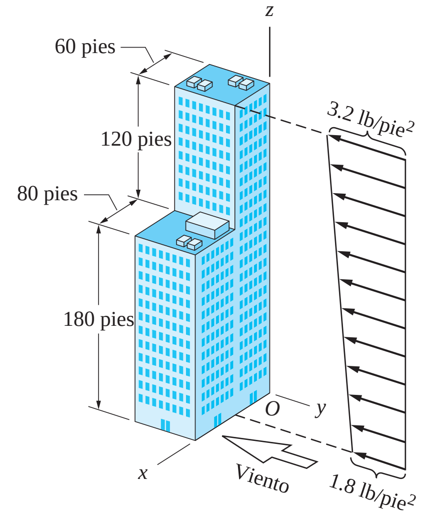


Fig. P3.52

3.52 En cierto momento durante un huracán, la presión del viento actuando sobre el costado de un edificio de gran altura varía linealmente como se muestra. Determine la fuerza resultante causada por el viento.

3.53 En la figura se muestra la presión del agua actuando sobre las caras de una presa que tiene 20 pies de longitud. Determine la fuerza resultante de la presión del agua actuando sobre la presa.

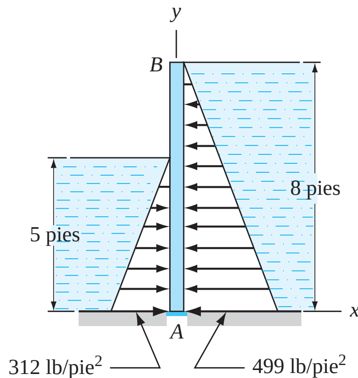


Fig. P3.53

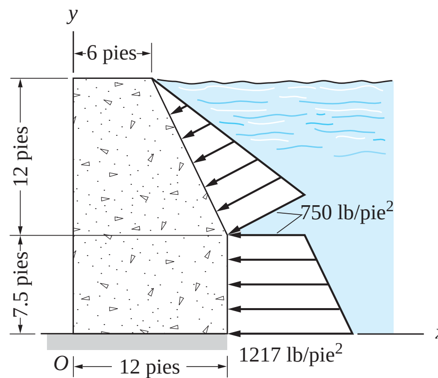


Fig. P3.54

3.54 La presión del agua que actúa sobre una presa de mampostería varía como se muestra. Si la presa tiene una longitud de 20 pies, determine la fuerza resultante de la presión del agua que actúa sobre la presa.

3.55 El muelle de concreto está sometido a la presión del suelo que causa las cargas de las líneas indicadas. Determine la resultante de las cargas y encuentre la coordenada y del punto donde la resultante cruza el eje y.

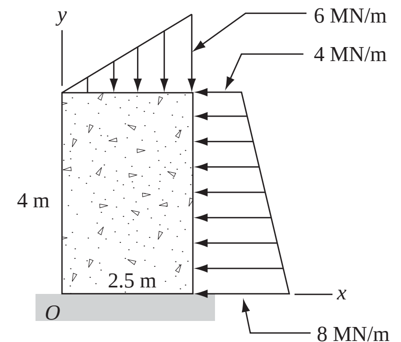


Fig. P3.55

Repaso de ecuaciones

Fuerza-par resultante

Las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . se pueden reducir a la fuerza $\mathbf{R}$ que actúa en un punto arbitrario A y al par $\mathbf{C}^R$.

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}_i \qquad \mathbf{C}^R = \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$\mathbf{r}_i$ = vector desde A hasta cualquier punto en la línea de acción de $\mathbf{F}_i$

Resultante de un sistema de fuerzas

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}_i \text{ si } \mathbf{R} \neq 0$$
$$\mathbf{C}^R = \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \text{ si } \mathbf{R} = 0$$

Llave de torsión

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}_i \qquad \mathbf{C}_t^R = (\mathbf{C}^R \cdot \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\lambda}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ = vector unitario en la dirección de $\mathbf{R}$

Resultante de una carga normal distribuida

$$R = \int_{\mathcal{A}} p \, dA \qquad \bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{A}} px \, dA}{R} \qquad \bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{A}} py \, dA}{R}$$

R = volumen abajo del diagrama de carga
$\bar{x}, \bar{y}$ = coordenadas centroidales del volumen abajo del diagrama de carga

Resultante de una carga lineal distribuida

$$R = \int_{\mathcal{L}} w \, dx \qquad \bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{L}} wx \, dx}{R}$$

R = área abajo del diagrama de carga
$\bar{x}$ = coordenada centroidal del área abajo del diagrama de carga

Problemas de repaso

3.56 Encuentre la resultante de las tres fuerzas que actúan sobre la armella.

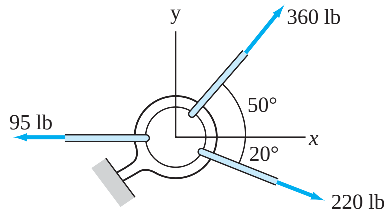


Fig. P3.56

3.57 La resultante del sistema de fuerzas indicado es un par de 50 lb · pie en sentido contrario de las manecillas del reloj. Encuentre *P*, *Q* y *C*.

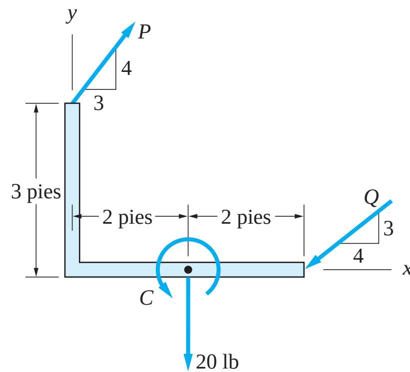


Fig. P3.57

3.58 Determine la resultante de las tres fuerzas que actúan sobre la placa. Además, encuentre las coordenadas del punto donde la resultante cruza el plano *xy*.

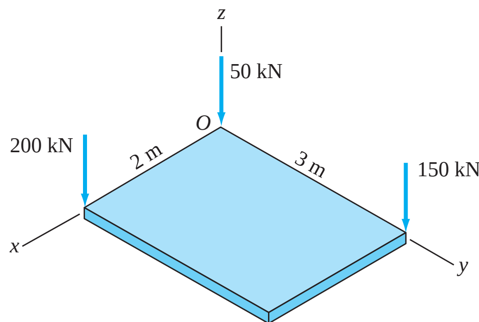


Fig. P3.58

3.59 Las cinco fuerzas actúan en el extremo *A* de la barra. Determine T_1, T_2 y T_3 si la resultante de este sistema de fuerzas es cero.

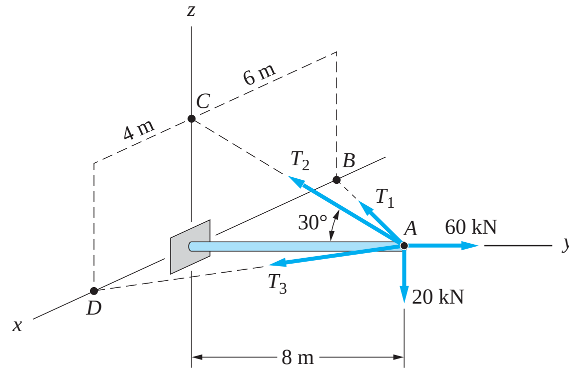


Fig. 3.59

3.60 Una parte de la placa cuadrada está saturada por la carga uniformemente distribuida $p = 20$ lb/pie^2. Encuentre las coordenadas del punto en el plano xy por el que pasa la resultante.

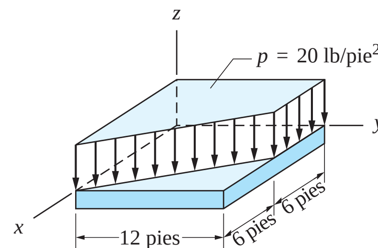


Fig. P3.60

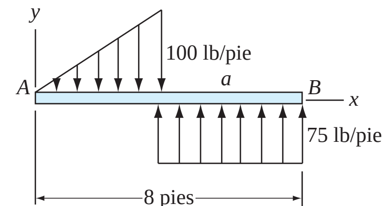


Fig. P3.61

3.61 La resultante de las cargas lineales que actúan sobre la viga AB es un par $\mathbf{C}^R$. Determine la distancia a y el par C^R.

3.62 (a) Remplace el sistema de fuerzas indicado por un sistema fuerza-par con la fuerza actuando en el punto O. (b) Determine la llave que sea equivalente a este sistema de fuerzas. Encuentre las coordenadas del punto donde el eje de la llave cruza el plano xy.

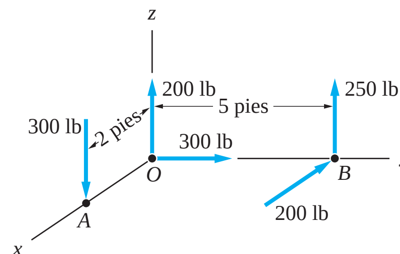


Fig. P3.62

3.63 El centro de gravedad de la placa cuadrada de 30 lb está en G. La placa se puede subir lentamente sin girar si la resultante de las tres tensiones en los cables

es una fuerza de 30 lb que pasa por G. Si $T_1 = 6$ lb y $T_2 = 14$ lb, encuentre T_3 y las coordenadas x y y de su punto de sujeción.

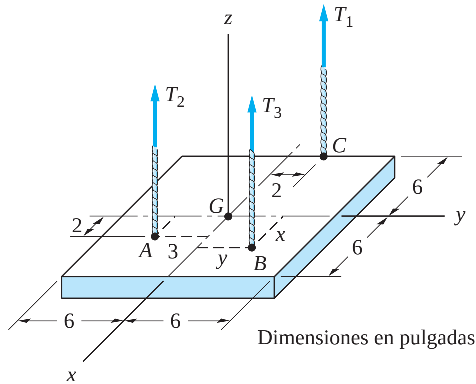


Fig. P3.63

3.64 La resultante del sistema fuerza-par que actúa sobre el marco es una fuerza **R** actuando en el punto A. Determine las fuerzas P y **R**.

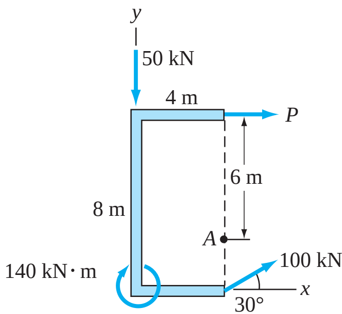


Fig. P3.64

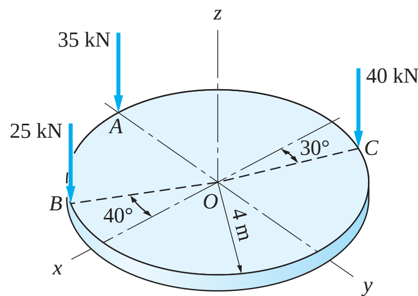


Fig. P3.65

3.65 Encuentre las coordenadas x y y del punto donde la resultante de las tres fuerzas cruza el plano.

3.66 Remplace el sistema de fuerzas que actúa sobre el tubo por un sistema fuerza-par con la fuerza actuando en el punto D.

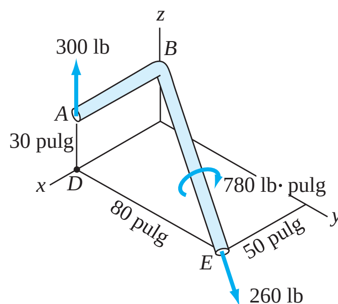


Fig. P3.66

3.67 Remplace el sistema de fuerzas coplanares que actúa sobre la pieza colada por un sistema equivalente fuerza-par, con la fuerza actuando en (a) el punto O y (b) el punto A.

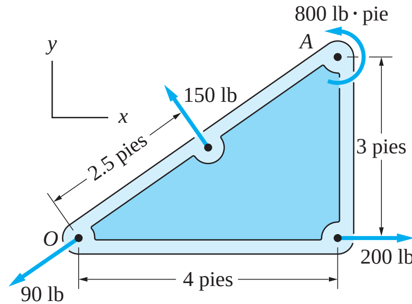


Fig. P3.67

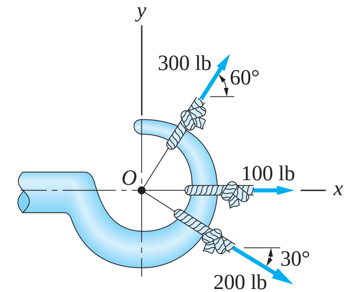


Fig. P3.68

3.68 Determine la magnitud de la resultante de las tres fuerzas concurrentes que actúan sobre el gancho.

3.69 Determine la llave de torsión que sea equivalente al sistema fuerza-par indicado y encuentre las coordenadas del punto donde el eje de la llave de torsión cruza el plano xz.

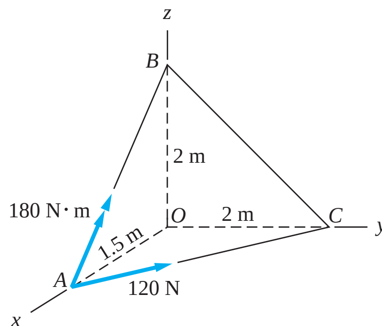


Fig. P3.69

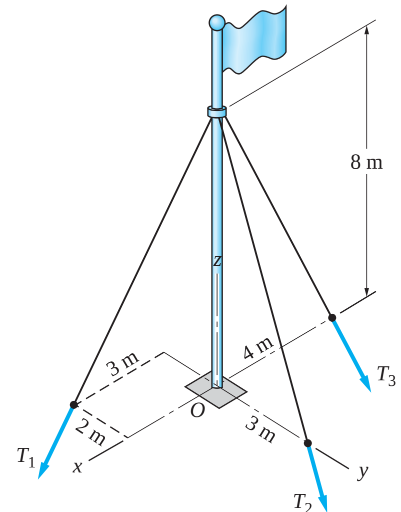
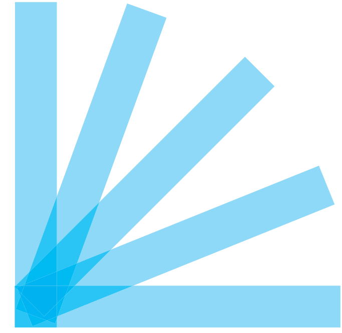


Fig. P3.70

3.70 La resultante de las tres tensiones en los cables sobre el asta de bandera es la fuerza $\mathbf{R} = R\mathbf{k}$. Encuentre T_1, T_2 y R si $T_3 = 500$ N.



4 Análisis del equilibrio coplanar



Los principios de la estática con frecuencia nos permiten determinar cantidades que no se pueden medir de manera directa. Por ejemplo, al medir las cargas en los ejes de un camión de volteo con su caja en las posiciones arriba y abajo permite calcular el peso del chasís y la caja. Esto se ilustra en el problema P4.59. Lester Lefkowitz/The Image Bank/Getty Images

4.1 Introducción

Los primeros tres capítulos de este libro se dedicaron a exponer los elementos del álgebra vectorial, enfatizando el estudio de fuerzas y pares. El conocimiento del álgebra vectorial es un prerrequisito para el estudio de la estática y de muchas otras áreas de la mecánica para ingenieros.

Con este capítulo se inicia la aplicación de los métodos vectoriales para el análisis de equilibrio de problemas de ingeniería. Se introduce el diagrama de cuerpo libre, el cual es tal vez el concepto físico más importante que se analiza en este libro. Se muestra cómo se utiliza el diagrama de cuerpo libre para obtener ecuaciones que relacionan las fuerzas que actúan sobe un cuerpo en equilibrio.

Por ahora sólo pondremos nuestra atención en el análisis de cuerpos que se mantienen en equilibrio por sistemas de fuerzas coplanares. El tema se divide en tres partes: análisis de cuerpos simples, análisis de cuerpos compuestos (denominados *marcos* y *máquinas* en algunos libros) y análisis de armaduras planas.

4.2 Definición de equilibrio

Se dice que un cuerpo está en equilibrio si la resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo se anula. Equilibrio significa que tanto la fuerza resultante como el par resultante son iguales a cero.

Cuando un sistema de fuerzas actúa sobre un cuerpo que inicialmente está en reposo, la ausencia de una resultante significa que el cuerpo no tiene tendencia a moverse. El análisis de problemas de este tipo es el enfoque de la estática: la dinámica tiene que ver con la respuesta de cuerpos a sistemas de fuerzas que no están en equilibrio.

En el capítulo 3 se demostró que un sistema de fuerzas coplanares siempre se puede representar como una fuerza resultante **R** que pasa por un punto arbitrario *O* y un par $\mathbf{C}^R$ que se encuentra en el plano de las fuerzas. Suponiendo que las fuerzas se encuentran en el plano *xy*, **R** y $\mathbf{C}^R$ se pueden determinar con $R_x = \Sigma F_x$, $R_y = \Sigma F_y$ y $C^R = \Sigma M_O$. Por tanto, las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \tag{4.1}$$

Las sumatorias en las ecuaciones (4.1), por supuesto, incluyen *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, tanto las fuerzas aplicadas como las reacciones (las fuerzas proporcionadas por los soportes).

PARTE A: *Análisis de cuerpos simples*

4.3 Diagrama de cuerpo libre de un cuerpo

El primer paso en el análisis de equilibrio es identificar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Esto se logra por medio de un *diagrama de cuerpo libre*.

El *diagrama de cuerpo libre* (DCL) de un cuerpo es un bosquejo del cuerpo en el que se muestran todas las fuerzas que actúan sobre él. El término *libre* implica que se han retirado todos los soportes y remplazado por las fuerzas (reacciones) que éstos ejercen sobre el cuerpo.

La importancia de dominar la técnica de los DCL no se puede enfatizar demasiado. Los diagramas de cuerpo libre son fundamentales para todas las disciplinas de la ingeniería que se relacionan con los efectos que tienen las fuerzas sobre cuerpos. La elaboración de un DCL es el paso clave que traduce un problema físico en una forma que se pueda analizar de forma matemática.

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo se pueden dividir en dos categorías generales: *fuerzas reactivas* (o, simplemente, *reacciones*) y *fuerzas aplicadas*. Las reacciones son las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo por los soportes a los que está unido. Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que no son proporcionadas por los soportes se denominan *fuerzas aplicadas*. Por supuesto, *todas* las fuerzas, tanto reactivas como aplicadas, se deben mostrar en los diagramas de cuerpo libre.

El siguiente es el procedimiento general para elaborar un diagrama de cuerpo libre.

1. Se elabora un bosquejo del cuerpo suponiendo que se han retirado todos los soportes (superficies de contacto, cables de soporte, etcétera).
2. Todas las fuerzas aplicadas se trazan e identifican en el bosquejo. El peso del cuerpo se considera como una fuerza aplicada que actúa en el centro de gravedad. Como se muestra en el capítulo 8, el *centro de gravedad* de un cuerpo homogéneo coincide con el *centroide* de su volumen.
3. Se trazan e identifican en el bosquejo las reacciones en los soportes. Si el sentido de la reacción no se conoce, se debe suponer. La solución determinará el sentido correcto: un resultado positivo indica que el sentido supuesto es correcto, en tanto que un resultado negativo significa que el sentido correcto es opuesto al supuesto.
4. Todos los ángulos y las dimensiones relevantes se muestran en el bosquejo.

Cuando se haya completado este procedimiento, se tendrá un dibujo (es decir, un diagrama de cuerpo) que contiene toda la información necesaria para escribir las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo.

El paso más difícil que se debe dominar en la elaboración de los DCL es la determinación de las reacciones en los soportes. En la tabla 4.1 se muestran las reacciones ejercidas por varios soportes coplanares; también se incluye el número de incógnitas que se introducen en un DCL al remover cada soporte. Para tener éxito al trazar DCL, se debe estar bien familiarizado con el contenido de la tabla 4.1. También es útil comprender el razonamiento físico que determina las reacciones en cada soporte, que se describe a continuación.

(a) *Cable flexible (peso despreciable)*. Un cable flexible ejerce un tirón, o fuerza de tensión, en la dirección del cable. Si se desprecia el peso del cable, éste forma una línea recta. Si se conoce su dirección, al remover el cable se introduce una incógnita en un diagrama de cuerpo libre: la magnitud de la fuerza ejercida por el cable.
(b) *Superficie sin fricción*: *punto único de contacto*. Cuando un cuerpo está en contacto con una superficie sin fricción sólo en un punto, la reacción es una fuerza que es perpendicular a la superficie, actuando en el punto de contacto. A esta reacción con frecuencia se le refiere simplemente como *fuerza normal*. Caminar sobre una acera helada es peligroso debido a que es difícil generar una fuerza en cualquier dirección excepto perpendicular a la acera.) Por tanto, al remover una superficie de este tipo se introduce una incógnita en un diagrama de cuerpo libre: la magnitud de la fuerza normal. Si el contacto entre el cuerpo y la superficie ocurre en un área finita, en vez de en un punto, la línea de acción de la fuerza normal resultante también será una incógnita.
(c) *Soporte de rodillo*. Un soporte de rodillo es equivalente a una superficie sin fricción: sólo puede ejercer una fuerza que es perpendicular a la superficie de soporte. La magnitud de la fuerza es entonces la única incógnita que se introduce en un diagrama de cuerpo libre cuando se remueve el soporte.
(d) *Superficie con fricción*: *punto único de contacto*. Una superficie con fricción puede ejercer una fuerza que actúa a un ángulo con la superficie. Las incógnitas se pueden considerar como la magnitud y dirección de la fuerza. Sin

Soporte	Reacción(es)	Descripción de la(s) reacción(es)	Número de incógnitas
(a) θ Cable flexible de peso despreciable	T θ	Tensión de magnitud desconocida T en la dirección del cable	Una
(b) θ Superficie sin fricción (punto único de contacto)	N θ	Fuerza de magnitud desconocida N dirigida normal a la superficie	Una
(c) θ θ Soporte de rodillo	N θ	Fuerza de magnitud desconocida N normal a la superficie que soporta el rodillo	Una
(d) θ Superficie con fricción (punto único de contacto)	F N θ	Fuerza de magnitud desconocida N normal a la superficie y fuerza de fricción de magnitud desconocida F paralela a la superficie	Dos
(e) y x Soporte de pasador	R_x R_y	Fuerza desconocida **R**	Dos
(f) y x Empotramiento (de voladizo)	C R_x R_y	Fuerza desconocida **R** y un par de magnitud desconocida C	Tres

Tabla 4.1 Reacciones de soportes coplanares

embargo, suele ser ventajoso representar las incógnitas como N y F, las componentes que son perpendiculares y paralelas a la superficie, respectivamente. La componente N se denomina *fuerza normal* y F se conoce como *fuerza de fricción*. Si hay un área de contacto, la línea de acción de N también será una incógnita.

(e) *Soporte de pasador*. Un pasador es un cilindro que es ligeramente menor que el agujero en que se inserta, como se muestra en la figura 4.1(a). Ignorando la fricción, el pasador sólo puede ejercer una fuerza que es normal a la superficie de contacto, indicada como **R** en la figura 4.1(b). Un soporte de pasador entonces introduce dos incógnitas: la magnitud de **R** y el ángulo α que especifica la dirección de **R** (α se desconoce ya que el punto donde el pasador hace contacto con la superficie del agujero no se conoce). Es muy común que las dos incógnitas se elijan ser componentes perpendiculares de **R**, como R_x y R_y indicadas en la figura 4.1(c).

(f) *Empotramiento (de voladizo)*. Un empotramiento, también conocido como *soporte de voladizo*, evita todo el movimiento del cuerpo en el empotramiento. La traslación (movimiento horizontal o vertical) se evita por una fuerza y un par impide la rotación. Por tanto, un empotramiento introduce tres incógnitas en un diagrama de cuerpo libre: la magnitud y dirección de la fuerza reactiva **R** (estas incógnitas comúnmente se eligen que sean dos componentes de **R**, como R_x y R_y) y la magnitud de C del par reactivo.

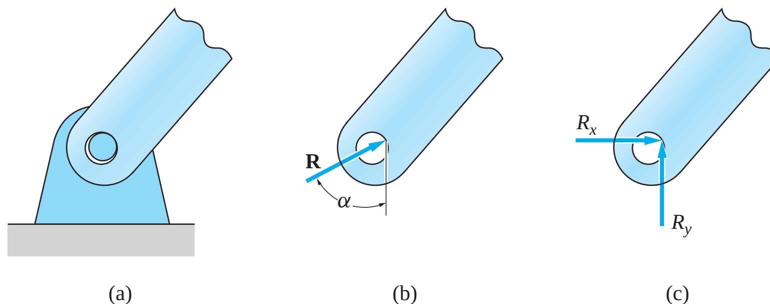


Fig. 4.1

Al trazar diagramas de cuerpo libre se deben tomar en cuenta los puntos siguientes.

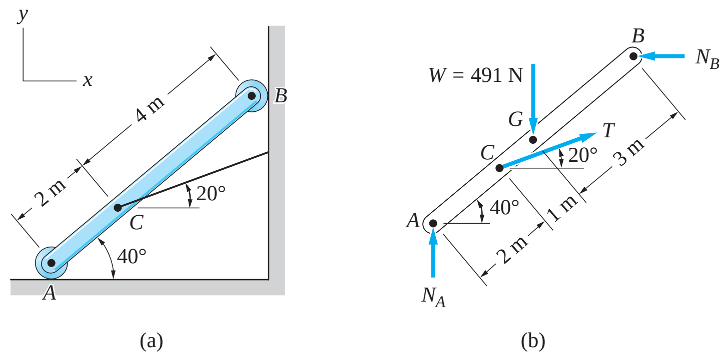
1. Trabaje con limpieza. Como las ecuaciones de equilibrio se deducirán directamente del diagrama de cuerpo libre, es esencial que el diagrama sea legible.
2. Identifique con claridad todas las fuerzas, ángulos y distancias con valores (si se conocen) o símbolos (si los valores no se conocen).
3. Las reacciones de los soportes deben ser consistentes con la información presentada en la tabla 4.1.
4. Muestre sólo las fuerzas que son externas al cuerpo (esto incluye las reacciones en los soportes y el peso). Las fuerzas internas ocurren en pares iguales y opuestos y por tanto no aparecerán en los diagramas de cuerpo libre.

Problema de ejemplo 4.1

La barra homogénea *AB* de 6 m de longitud en la figura (a) está soportada en el plano vertical por rodillos en *A* y *B* y por un cable en *C*. La masa de la barra es 50 kg. Trace el DCL de la barra *AB*. Determine el número de incógnitas en el DCL.

Solución

El DCL de la barra *AB* se muestra en la figura (b). El primer paso en la elaboración de este diagrama es hacer un bosquejo de la barra, suponiendo que se han removido los soportes. Luego se agregan las fuerzas siguientes al bosquejo.



W: El peso de la barra

El peso W se muestra como una fuerza vertical que actúa en G, el centro de gravedad de la barra. Como la barra es homogénea, G está ubicada en el centro de la barra. La magnitud del peso es $W = mg = (50)(9.81) = 491$ N.

N_A: La reacción normal en A

Al remover el soporte de rodillo en A se debe mostrar la fuerza que este soporte puede ejercer sobre la barra. De la tabla 4.1, se observa que un soporte de rodillo puede ejercer una sola fuerza que es normal a la superficie de soporte. Por tanto, en el DCL se muestra la reacción en A como una fuerza vertical y su magnitud se designa como N_A.

N_B: La reacción normal en B

Siguiendo un argumento similar al anterior para N_A, se concluye que al remover el soporte de rodillo en B significa que se debe mostrar una fuerza horizontal en ese punto. En el DCL esta reacción se designa como N_B.

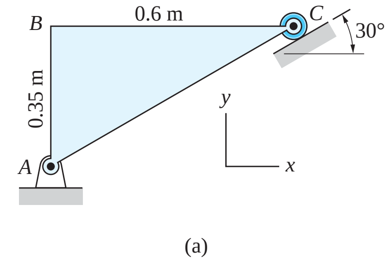
T: La tensión en el cable en C

De la tabla 4.1, la fuerza ejercida por un cable es una fuerza de tensión que actúa en la dirección del cable. Por tanto, la fuerza ejercida sobre la barra por el cable se muestra como una fuerza de magnitud T, actuando a 20° con la horizontal.

Se observa que hay tres incógnitas en el DCL: las magnitudes de las tres reacciones (N_A, N_B y T).

Problema de ejemplo 4.2

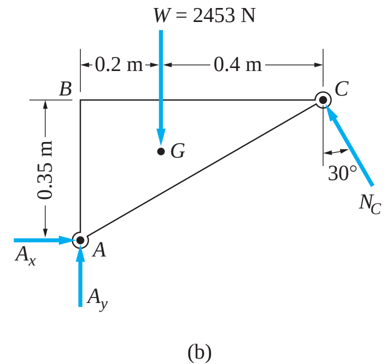
La placa triangular homogénea de 250 kg en la figura (a) está soportada por un pasador en A y un rodillo en C. Trace el DCL de la placa y determine el número de incógnitas.



(a)

Solución

El DCL de la placa se muestra en la figura (b). Los soportes de pasador y rodillo se han removido y remplazado por las fuerzas reactivas. Las fuerzas que actúan sobre la placa se describen a continuación.



(b)

W: El peso de la placa

El peso de la placa es $W = mg = (250)(9.81) = 2453$ N. Actúa en el centroide G del triángulo ABC, la ubicación del cual se determinó de la tabla 3.1. Sólo la ubicación horizontal de G se muestra en la figura, ya que es suficiente para determinar la línea de acción de W.

A_x y A_y: Las componentes de la reacción en el soporte en A

De la tabla 4.1 se observa que una reacción de pasador se puede mostrar como dos componentes A_x y A_y, las cuales son equivalentes a una fuerza desconocida que actúa a un ángulo desconocido. Se muestra A_x actuando hacia la derecha y A_y actuando hacia arriba. Estas direcciones se eligieron arbitrariamente; la solución de las ecuaciones de equilibrio determinará el sentido correcto para cada fuerza. Por tanto, el diagrama de cuerpo libre estaría correcto incluso si A_x o A_y se hubieran elegido actuando en direcciones opuestas a las mostradas en la figura (b).

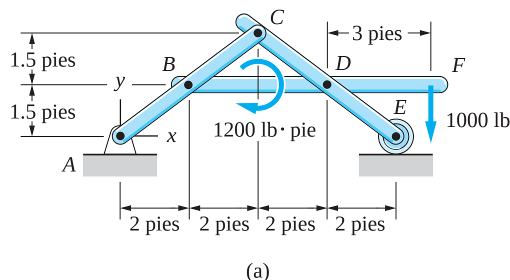
N_C: La reacción normal en C

De la tabla 4.1, la fuerza ejercida por un soporte de rodillo, es normal a la superficie inclinada. Por tanto, en el DCL se muestra la fuerza N_C en C, inclinada a 30° con la vertical.

El DCL contiene tres incógnitas: A_x, A_y y N_C.

Problema de ejemplo 4.3

Un marco rígido se construye uniendo tres barras con pasadores en B, C y D, como se muestra en la figura (a). El marco está cargado por la fuerza de 1000 lb y el par de 1200 lb · pie. Los soportes consisten en un pasador en A y en un soporte de rodi-

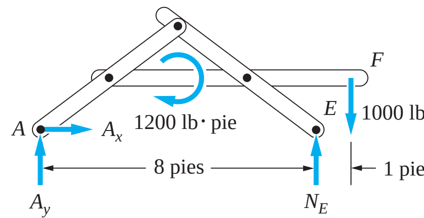


(a)

llo en *E*. Trace el DCL del marco, ignorando los pesos de los miembros. ¿Cuántas incógnitas hay en el DCL?

Solución

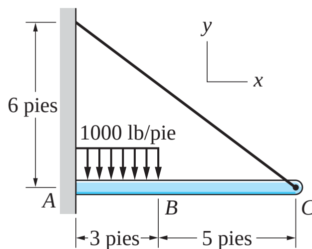
El DCL de todo el marco se muestra en la figura (b). Además de la fuerza y del par aplicados, en el diagrama se muestra la reacción en el pasador en *A* (A_x y A_y) y la fuerza normal en el rodillo *E* (N_E).



(b)

Es importante considerar que las fuerzas en los pasadores *B*, *C* y *D* no aparecen en el DCL del marco. Estas fuerzas en los pasadores, así como las fuerzas dentro de las propias barras, son internas al marco (recuerde que en los DCL sólo se muestran las fuerzas externas).

Se observa que hay tres incógnitas en el DCL: A_x, A_y y N_E.

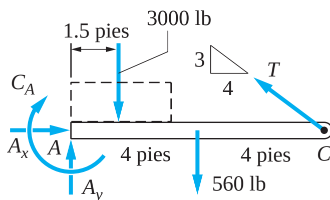


(a)

Problema de ejemplo 4.4

La viga *ABC*, empotrada en el muro en *A* y soportada por un cable en *C*, soporta una carga distribuida sobre una parte de su longitud, como se muestra en la figura (a). El peso de la viga es 70 lb/pie. Trace el DCL de la viga.

Solución



(b)

El DCL de la viga se muestra en la figura (b). Debido a que el soporte de una viga empotrada o en voladizo puede ejercer una fuerza y un par, las reacciones en el muro se muestran como las componentes de la fuerza A_x y A_y y el par C_A. La tensión en el cable está identificada como *T*. En el DCL también se muestra el peso de la viga (70 lb/pie $\times$ 8 pies $=$ 560 lb) y la resultante de la carga distribuida (3000 lb, actuando en el centroide del diagrama de carga).

Observe que el DCL contiene cuatro incógnitas, en tanto que el número de ecuaciones de equilibrio en las ecuaciones (4.1) es tres. Por tanto, no sería posible calcular todas las incógnitas utilizando sólo el análisis de equilibrio. La razón de la indeterminación es que la viga está sobresoportada; estaría en equilibrio aún si el cable en *AC* se removiera o si el empotramiento se remplazara por una conexión de pasador.

Problemas

4.1-4.3 Cada uno de los cuerpos mostrados en las figuras es homogéneo y tiene una masa de 30 kg. Suponga que hay fricción en todas las superficies de contacto. Trace el DCL completamente dimensionado para cada cuerpo y determine el número de incógnitas.

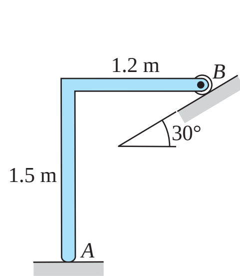


Fig. P4.1

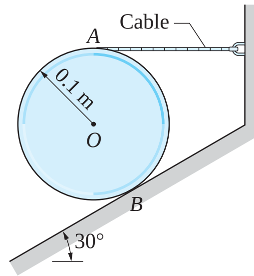


Fig. P4.2

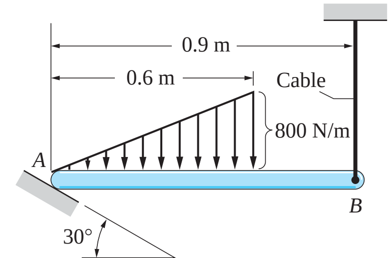


Fig. P4.3

4.4 La barra homogénea pesa 9 lb y está apoyada sobre superficies sin fricción en *A* y *B*. Trace el DCL de la barra y determine el número de incógnitas.

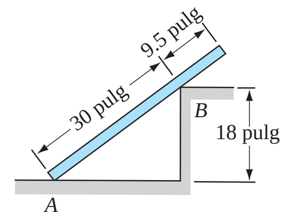


Fig. P4.4

4.5 La viga homogénea *AB* pesa 400 lb. Para cada condición de soporte en (a) a (d), trace el DCL de la viga y determine el número de incógnitas.

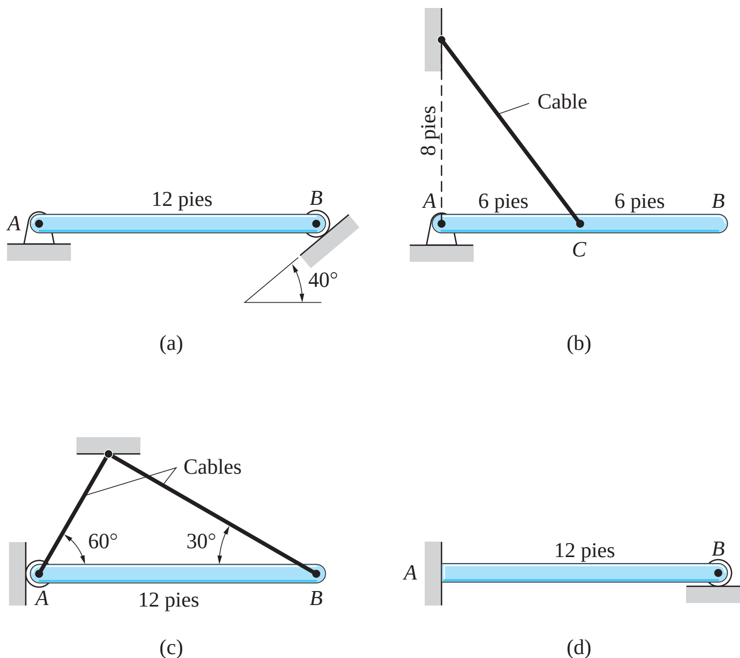


Fig. P4.5

4.6 La placa triangular homogénea tiene una masa de 12 kg. Trace el DCL de la placa para cada conjunto de soportes mostrados en (a) a (d) y determine el número de incógnitas.

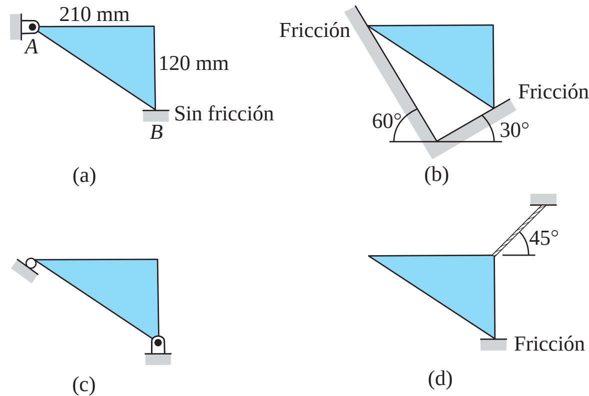


Fig. P4.6

4.7 La ménsula de peso despreciable está soportada por un pasador en A y por una espiga sin fricción en B, la cual puede deslizarse en la ranura de la ménsula. Trace el DCL de la ménsula si (a) $\theta = 45°$ y (b) $\theta = 90°$. ¿Cuáles son las incógnitas?

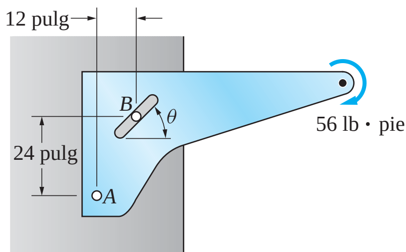


Fig. P4.7

4.8 Para abrir el grifo de agua a alta presión, se debe aplicar una fuerza horizontal de 12 lb a la manija en A. Trace el DCL de la manija, ignorando su peso. Cuente las incógnitas.

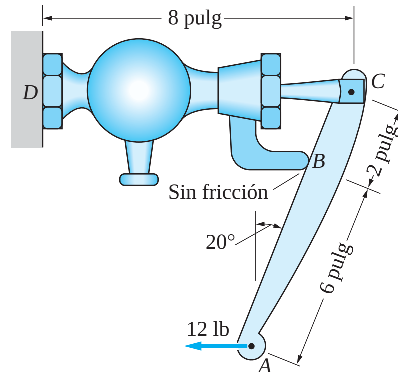


Fig. P4.8, P4.9

4.9 El grifo de agua a alta presión está rígidamente unido al soporte en D. Ignorando los pesos de los miembros, trace el DCL de todo el conjunto y cuente las incógnitas.

4.10 Dibuje el DCL de todo el marco, suponiendo que la fricción y los pesos de los miembros son despreciables. ¿Cuántas incógnitas resultan en este DCL?

4.11 Dibuje el DCL del miembro CE del marco descrito en el problema anterior. ¿Cuántas incógnitas resultan en este DCL?

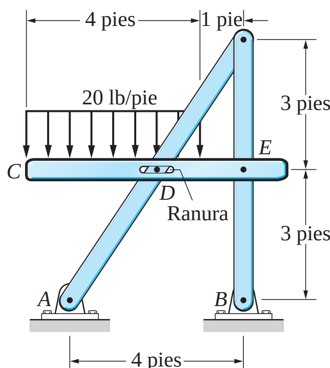


Fig. P4.10, P4.11

4.4 Ecuaciones de equilibrio coplanar

a. Caso general

Como se explicó en la sección 4.2, un cuerpo está en equilibrio ante un sistema de fuerzas coplanares si tanto la fuerza resultante **R** como el par resultante C^R del sistema de fuerzas son cero. Entonces se deduce que para el equilibrio se necesitan satisfacer las tres condiciones siguientes:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \qquad \text{(4.1 repetida)}$$

donde el centro de momentos O y la orientación del sistema coordenado xy se pueden elegir arbitrariamente. Las dos ecuaciones de las fuerzas son equivalentes a $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ y la ecuación de momentos asegura que $C^R = 0$.

Con frecuencia es conveniente utilizar un conjunto de tres ecuaciones independientes diferentes a las de la ecuación (4.1). Las ecuaciones alternas se describen a continuación.

1. **Dos ecuaciones de fuerzas y una ecuación de momentos** Las direcciones x y y en las ecuaciones (4.1) no tienen que ser mutuamente perpendiculares, siempre que no *sean paralelas*. De aquí, las ecuaciones de equilibrio se pueden volver a enunciar como

$$\Sigma F_{x'} = 0 \qquad \Sigma F_{y'} = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \qquad (4.2)$$

donde x' y y' son cualesquiera dos direcciones no paralelas y O es un punto arbitrario.

2. **Dos ecuaciones de momentos y una ecuación de fuerzas** Es posible remplazar una de las ecuaciones de fuerzas en las ecuaciones (4.2) por una ecuación de momentos, obteniendo

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma F_{x'} = 0 \qquad (4.3)$$

Aquí, A y B son cualesquiera dos puntos distintos y x' es cualquier dirección que *no sea perpendicular* a la línea AB. Observe que si $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se satisfacen, la resultante sólo puede ser la fuerza **R** que se encuentra a lo largo de la línea AB, como se muestra en la figura 4.2. La ecuación $\Sigma F_{x'} = 0$ (x' no perpendicular a AB) entonces se puede satisfacer sólo si $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

3. **Tres ecuaciones de momentos** También se pueden remplazar las dos ecuaciones de fuerzas en las ecuaciones (4.2) por dos ecuaciones de momentos. El resultado es

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad (4.4)$$

donde A, B y C son cualesquiera tres puntos distintos *no colineales*, como se indica en la figura 4.2. De nuevo las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se satisfacen sólo si la resultante es una fuerza **R** que se encuentre a lo largo de la línea AB. La tercera ecuación $\Sigma M_C = 0$ (C no se encuentra en la línea AB) entonces garantiza que $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

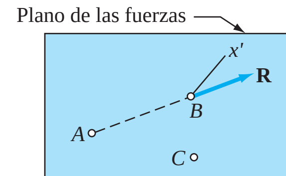


Fig. 4.2

b. Sistema de fuerzas concurrentes

Recuerde que la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes es una fuerza **R** que pasa por el punto de concurrencia, el cual se designó como el punto O. La ecuación de momentos $\Sigma M_O = 0$ ahora se satisface de manera trivial, de manera que el número de ecuaciones de equilibrio independientes se reduce de tres a dos. Utilizando los argumentos de la parte (a), es fácil verificar que las siguientes son elecciones válidas para las ecuaciones de equilibrio independientes, en donde cada conjunto consiste de dos ecuaciones.

1. *Dos ecuaciones de fuerzas.*

$$\Sigma F_{x'} = 0 \qquad \Sigma F_{y'} = 0 \tag{4.5}$$

donde x' y y' son cualesquiera dos direcciones no paralelas en el plano xy.

2. *Dos ecuaciones de momentos.*

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \tag{4.6}$$

donde A y B son cualesquiera dos puntos en el plano xy (excepto el punto O) siempre que A, B y O no se encuentren en una línea recta.

3. *Una ecuación de fuerzas y una ecuación de momentos.*

$$\Sigma F_{x'} = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4.7}$$

donde A es cualquier punto en el plano xy (excepto el punto O) y x' es cualquier dirección que no sea perpendicular a la línea OA.

c. Sistema de fuerzas paralelas

Suponga que todas las fuerzas que se encuentran en el plano xy son paralelas al eje y. La ecuación $\Sigma F_x = 0$ se satisface de manera automática y el número de ecuaciones de equilibrio independientes de nuevo se reduce de tres a dos. Utilizando el razonamiento de la parte (a), se puede demostrar que hay dos elecciones para las ecuaciones de equilibrio independientes, cada una con dos ecuaciones:

1. *Una ecuación de fuerzas y una ecuación de momentos.*

$$\Sigma F_{y'} = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{4.8}$$

donde y' es cualquier dirección en el plano xy, excepto en la dirección x y A es cualquier punto en el plano xy.

2. *Dos ecuaciones de momentos.*

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \tag{4.9}$$

donde A y B son cualesquiera dos puntos en el plano xy, siempre que la línea AB no sea paralela al eje y.

4.5 *Formulación y solución de ecuaciones de equilibrio*

Los tres pasos en el análisis de equilibrio de un cuerpo son:

Paso 1: Trace un diagrama de cuerpo libre (DCL) del cuerpo que muestre todas las fuerzas y pares que actúan sobre el cuerpo.
Paso 2: Escriba las ecuaciones de equilibrio en términos de las fuerzas y los pares que aparecen en el diagrama de cuerpo libre.
Paso 3: Despeje las incógnitas en las ecuaciones de equilibrio.

En esta sección se supone que el diagrama de cuerpo libre correcto ya se dibujó, de manera que podemos concentrarnos en los pasos 2 y 3, es decir, en escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio.

El sistema de fuerzas que mantiene un cuerpo en equilibrio se dice que está *estáticamente determinado* si el número de ecuaciones de equilibrio independientes es igual al número de incógnitas que aparecen en su diagrama de cuerpo libre. Por tanto, los problemas estáticamente determinados se pueden resolver sólo mediante el análisis de equilibrio. Si el número de incógnitas excede al número de ecuaciones de equilibrio independientes, el problema se denomina *estáticamente indeterminado*. La solución de problemas estáticamente indeterminados requiere aplicar principios adicionales que están fuera del alcance de este libro.

Al analizar un sistema de fuerzas que mantiene en equilibrio un cuerpo, primero se debe determinar el número de ecuaciones de equilibrio independientes y contar el número de incógnitas. Si el sistema de fuerzas es estáticamente determinado, estos dos números serán iguales. Entonces es mejor delinear un *método de análisis*, o plan de ataque, que especifique la secuencia en la que se escribirán las ecuaciones y enumerar las incógnitas que aparecerán en cada ecuación. Después de haber determinado un método de análisis viable, entonces se puede proceder con los *detalles matemáticos* de la solución.

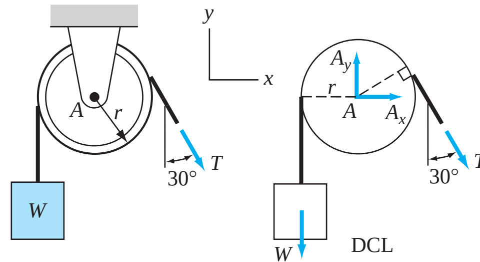
Advertencia: el conjunto de ecuaciones de equilibrio utilizado en el análisis *deben* ser independientes. Si se intenta resolver un conjunto de ecuaciones independientes, en algún punto, producirá una identidad inútil, como $0 = 0$.

En este punto debe observarse que, si bien la solución de un problema estáticamente determinado es única, el conjunto de ecuaciones utilizadas para determinar esa solución no es único. Por ejemplo, existe un número infinito de elecciones para el punto O en la ecuación de equilibrio $\Sigma M_O = 0$.

Con un número infinito de ecuaciones de equilibrio de donde elegir, ¿cómo se puede decidir qué ecuaciones usar para un problema dado? La respuesta es basar la elección en la conveniencia matemática. Si se intenta resolver las ecuaciones a mano, se debe tratar de seleccionar ecuaciones que comprendan el menor número de incógnitas posible, simplificando de esta manera las manipulaciones algebraicas requeridas. Sin embargo, si se tiene acceso a una computadora o a una calculadora programable con capacidad de resolución de ecuaciones, la solución de ecuaciones simultáneas no será laboriosa y por tanto la elección de las ecuaciones no es crítica. No puede dejar de enfatizarse que el conjunto de ecuaciones elegidas deben ser independientes.

Problema de ejemplo 4.5

El peso W está unido en un extremo a una cuerda que pasa sobre una polea que puede girar respecto al pasador en A. El peso se mantiene en reposo por la fuerza T aplicada en el otro extremo de la cuerda. Utilizando el DCL indicado, demuestre que $T = W$ y calcule las reacciones en el pasador en A.



Solución

Método de análisis

Las fuerzas que se muestran en el DCL son el peso W, el tirón T que actúa en el extremo de la cuerda y las fuerzas reactivas aplicadas a la polea por el pasador en A. Debido a que el sistema de fuerzas es coplanar, hay tres ecuaciones de equilibrio independientes. El número de incógnitas también es tres (T, A_x y A_y), lo cual significa que el problema está estáticamente indeterminado.

La ecuación de equilibrio $\Sigma M_A = 0$ es un punto de partida conveniente. Como las reacciones en el pasador tienen momentos nulos respecto a A, la única incógnita en esta ecuación es T. Después de calcular T luego se puede determinar A_x con $\Sigma F_x = 0$ y A_y con $\Sigma F_y = 0$.

Detalles matemáticos

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowright^{+} \quad Tr - Wr = 0$$

$$T = W$$

Lo que se quería demostrar

Este resultado es significativo ya que muestra que la *tensión en una cuerda no cambia cuando ésta pasa sobre una polea que está soportada por un pasador sin fricción*.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad A_x + T \operatorname{sen} 30^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad A_y - W - T \cos 30^\circ = 0$$

Con $T = W$, las dos últimas ecuaciones dan

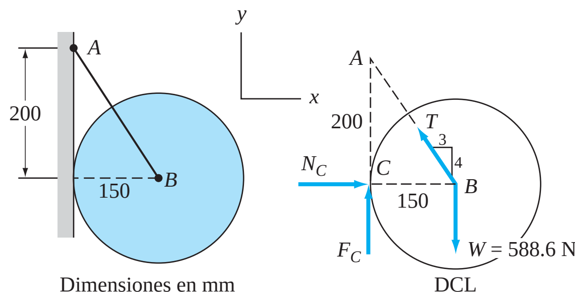
$$A_x = -0.5W \qquad A_y = 1.866W$$

Respuesta

El signo de menos indica que A_x actúa hacia la izquierda; es decir, en la dirección opuesta a la que se indica en el DCL.

Problema de ejemplo 4.6

Un disco homogéneo de 60 kg soportado por la cuerda AB reposa contra un muro vertical rugoso. Utilizando el DCL indicado, determine la fuerza en la cuerda y la reacción en el muro.



Solución

Método de análisis

El DCL contiene el peso $W = 60(9.81) = 588.6$ N, actuando en el centro del disco. Las otras fuerzas indicadas en el DCL son la fuerza T aplicada por la cuerda y las fuerzas reactivas N_C (la reacción normal) y F_C (la fuerza de fricción) aplicada por el muro. El resultado es un sistema de fuerzas coplanares general para el cual hay tres ecuaciones de equilibrio independientes. Como el número de fuerzas desconocidas también es tres, el problema está estáticamente determinado.

Debido a que N_C y T se intersecan en el punto B, la ecuación de momentos $\Sigma M_B = 0$ dará F_C. Luego se pueden utilizar las dos ecuaciones de fuerzas $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para calcular N_C y T.

Detalles matemáticos

$$\Sigma M_B = 0 \quad \text{da} \quad F_C = 0$$ *Respuesta*

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad \frac{4}{5}T - 588.6 = 0$$

$$T = 735.8 \text{ N}$$ *Respuesta*

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad N_C - \frac{3}{5}T = 0 \qquad N_C - \frac{3}{5}(735.8) = 0$$

$$N_C = 441 \text{ N}$$ *Respuesta*

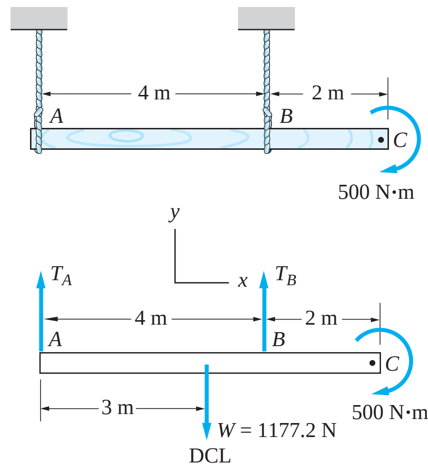
Otro método de análisis

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad 200N_C - 150(588.6) = 0$$

$$N_C = 441 \text{ N}$$

Problema de ejemplo 4.7

Una viga homogénea de madera de 120 kg pende de las cuerdas en A y B. Una llave eléctrica aplica el par de 500 N · m en sentido horario para apretar un perno en C. Utilice el DCL indicado para determinar las tensiones en las cuerdas.



Solución

Método de análisis

El DCL de la viga contiene el peso $W = mg = 120(9.81) = 1177.2$ N que actúa en el centro de la viga, el par de 500 N · m aplicado por la llave de torsión y las tensiones desconocidas T_A y T_B en las cuerdas. Como todas las fuerzas se encuentran en el plano xy y son paralelas al eje y, hay dos ecuaciones de equilibrio independientes. También hay dos incógnitas: T_A y T_B. Por tanto, el problema está estáticamente determinado.

Conviene iniciar el análisis con la ecuación de equilibrio $\Sigma M_A = 0$. Como esta ecuación no contiene T_A, se puede determinar de inmediato T_B. Luego se puede utilizar la ecuación $\Sigma F_y = 0$ para calcular T_A.

Detalles matemáticos

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad 4T_B - 1177.2(3) - 500 = 0$$

$$T_B = 1007.9 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad T_A + T_B - 1177.2 = 0$$

Sustituyendo $T_B = 1007.9$ N y despejando T_A, se obtiene

$$T_A = 169.3 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Otros métodos de análisis

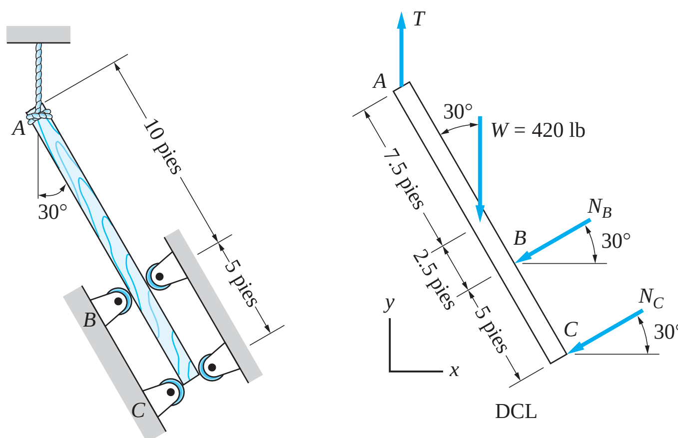
Otra opción igualmente conveniente es calcular T_A utilizando $\Sigma M_B = 0$ como sigue

$$\Sigma M_B = 0 \quad \circlearrowleft^{+} \qquad -4T_A + 1177.2(1.0) - 500 = 0$$

$$T_A = 169.3 \text{ N}$$

Problema de ejemplo 4.8

Un tronco homogéneo de 420 lb está soportado por una cuerda en *A* y rodillos de ajuste holgado en *B* y *C* conforme se alimenta a un aserradero. Calcule la tensión en la cuerda y las reacciones en los rodillos, utilizando el DCL indicado. ¿Cuáles rodillos están en contacto con el tronco?



Solución

Método de análisis

El DCL contiene el peso *W* del tronco y las tres fuerzas desconocidas: la tensión *T* en la cuerda y las reacciones en los rodillos N_B y N_C perpendiculares al tronco. El sentido de cada reacción de rodillo indica que se supuso que los rodillos superiores están en contacto con el tronco.

El sistema de fuerzas en el DCL es el caso coplanar general, para el cual se disponen tres ecuaciones de equilibrio independientes. Como también hay tres incógnitas, el problema está estáticamente determinado.

En general, el análisis de equilibrio requeriría la solución de tres ecuaciones simultáneas, con las tres incógnitas presentes en cada ecuación. Con una planeación adecuada suele ser posible reducir el número de incógnitas que se deben resolver simultáneamente. Con referencia al DCL, se podría iniciar con $\Sigma F_x = 0$, que contendría sólo dos incógnitas: N_B y N_C. Luego se podría buscar otra ecuación que contuviera sólo estas dos incógnitas. Al inspeccionar el DCL se expone que la ecuación $\Sigma M_A = 0$ no contendría *T*, ya que esta fuerza pasa por *A*.

Las ecuaciones ΣF_x y ΣM_A se podrían resolver simultáneamente para obtener N_A y N_B. Por último, ΣF_y se podría utilizar para calcular T.

Detalles matemáticos

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad -N_B \cos 30^\circ - N_C \cos 30^\circ = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad 420(7.5 \operatorname{sen} 30^\circ) + 10N_B + 15N_C = 0 \qquad \text{(b)}$$

La solución de las ecuaciones (a) y (b) es

$$N_B = 315.0 \text{ lb} \quad \text{y} \quad N_C = -315.0 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Los signos indican que el sentido de N_B es como se muestra en el DCL, en tanto que el sentido de N_C es opuesto al indicado. Por tanto, el rodillo superior en B y el rodillo inferior en C están en contacto con el tronco.

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad T - 420 - N_B \operatorname{sen} 30^\circ - N_C \operatorname{sen} 30^\circ = 0$$

Como $N_B = -N_C$, esta ecuación da

$$T = 420 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Otros métodos de análisis

En la solución anterior se utilizaron las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_A = 0$. Existen otros conjuntos de ecuaciones de equilibrio independientes que servirían igualmente bien. Por ejemplo, se podría encontrar T mediante sólo una ecuación: la suma de fuerzas paralelas al tronco es cero. Como N_B y N_C son perpendiculares al tronco, T sería la única incógnita en esta ecuación. La reacción N_C también se podría calcular de manera independiente a partir de las otras incógnitas igualando a cero la suma de los momentos respecto al punto donde T y N_B se intersecan. De manera similar, se podría determinar N_B a partir de una sola ecuación: la suma de momentos respecto al punto donde T y N_C se intersecan es igual a cero.

Es importante considerar que las ecuaciones de equilibrio deben ser independientes. Con referencia al DCL, se podría intentar emplear las tres ecuaciones de momentos $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$ y $\Sigma M_C = 0$. Si bien cada una es una ecuación válida, no son independientes una de otra. ¿Por qué no? ¿Qué pasaría si intenta despejar de estas ecuaciones los valores de N_B, N_C y T?

Problemas

En cada uno de los problemas siguientes se da el diagrama de cuerpo libre. Formule las ecuaciones de equilibrio y calcule las incógnitas que se piden.

4.12 Un cilindro homogéneo de peso W reposa en una esquina recta sin fricción. Determine las fuerzas de contacto N_A y N_B en términos de W y θ.

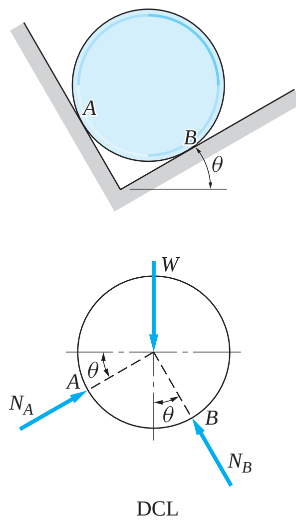


Fig. P4.12

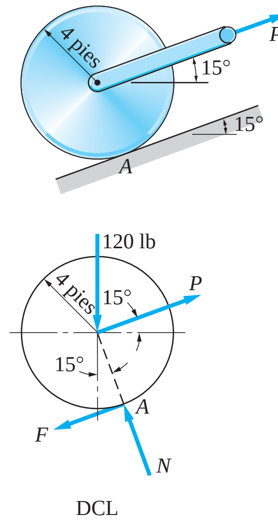


Fig. P4.13

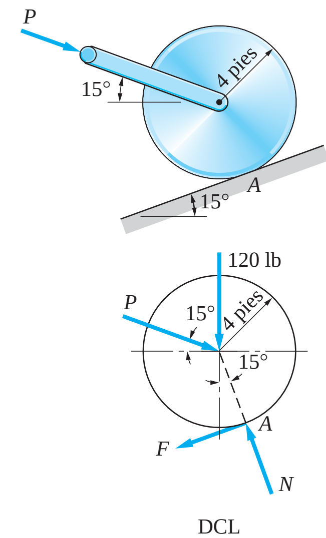


Fig. P4.14

4.13 Calcule la fuerza P que se necesita para mantener en reposo el rodillo de 120 lb sobre el plano inclinado rugoso.

4.14 Resuelva el problema 4.13 si la fuerza P empuja en vez de jalar.

4.15 La barra doblada de 480 kg ABC de sección transversal uniforme está soportada por un pasador en A y un cable vertical en C. Determine las reacciones en el pasador y la fuerza en el cable.

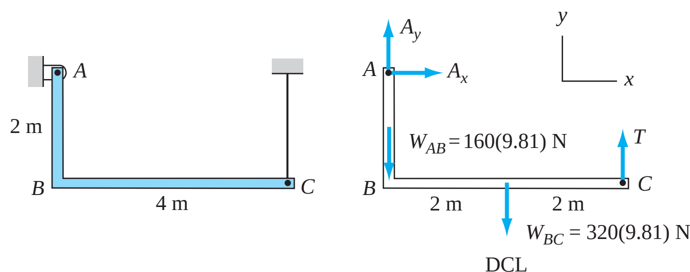
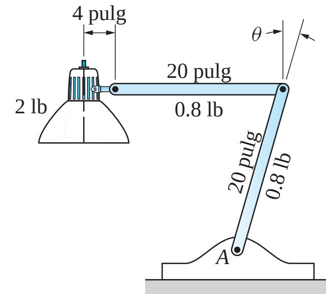


Fig. P4.15

4.16 La lámpara de escritorio consiste en dos brazos uniformes, con un peso de 0.8 lb cada uno y un aditamento de 2 lb para la bombilla. Si $\theta = 16°$, calcule el par C_A que se debe suministrar por la fricción en la unión A.



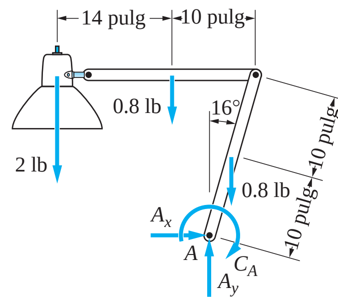


Fig. P4.16

4.17 ¿A qué ángulo θ la lámpara del problema 4.16 estará en equilibrio sin el par C_A?

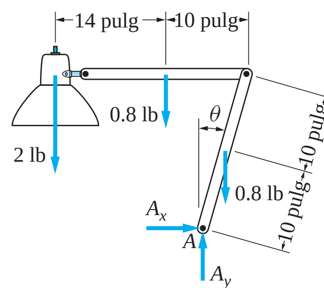


Fig. P4.17

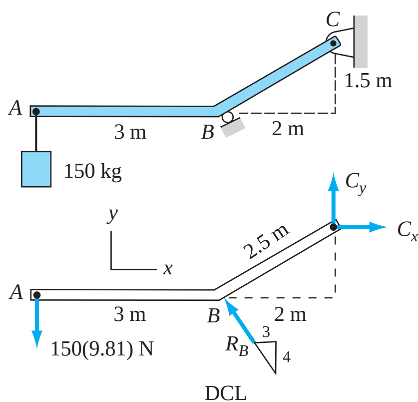


Fig. P4.18

4.18 La viga doblada ABC está unida a un pasador en C y reposa contra un soporte de rodillo en B. Ignorando el peso de la viga, encuentre las reacciones en B y C causadas por la carga de 150 kg.

4.19 Calcule todas las reacciones en la base A del poste del semáforo, si la tensión en el cable BC es (a) $T = 544$ lb y (b) $T = 0$. El peso del poste es despreciable comparado con el peso de 320 lb del semáforo.

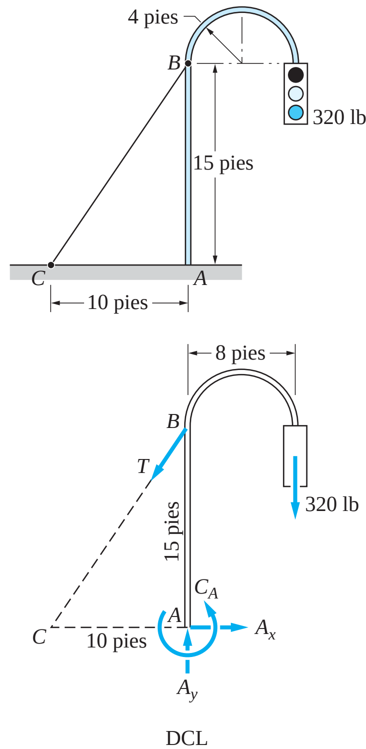


Fig. P4.19

4.20 La persona sostiene la escalera ABC de 35 kg empujando en una dirección perpendicular a la escalera. Si la fuerza máxima que puede ejercer la persona es 400 N, determine el ángulo menor θ con el que puede soportar la escalera.

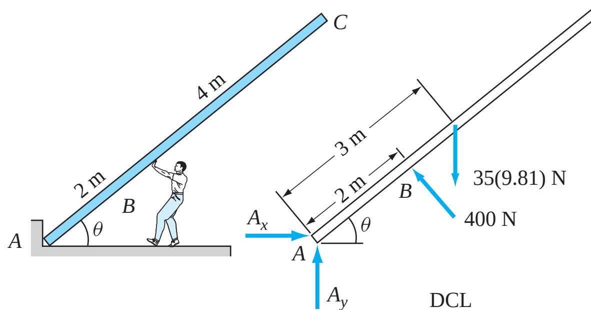


Fig. P4.20

4.21 Un elemento de máquina de peso despreciable está soportado por un pasador en *A* y un rodillo en *C*. Determine las magnitudes de las fuerzas actuando sobre la parte en *A* y *C*.

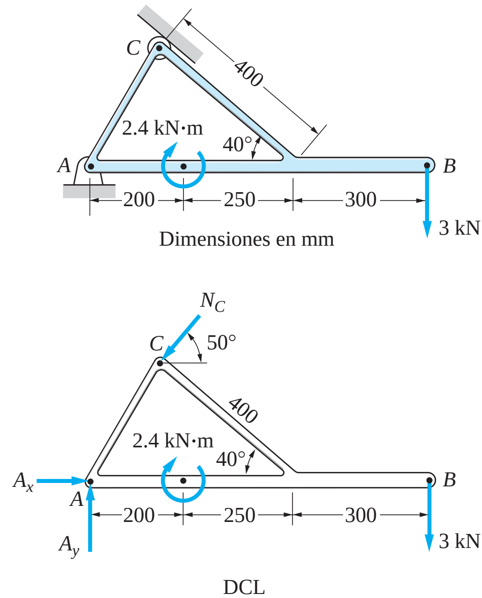


Fig. P4.21

4.22 La plancha uniforme *ABC* pesa 400 N. Está soportada por un pasador en *A* y por un cable que pasa alrededor de la polea *D*. Determine la tensión en el cable y las componentes de la reacción en el pasador en *A*. Observe que la tensión en el cable es constante (consulte el problema 4.5).

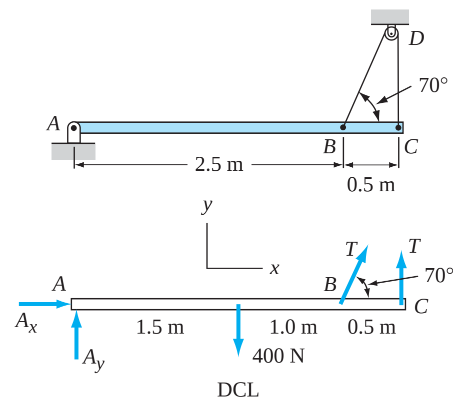


Fig. P4.22

4.23 El centro de gravedad de la persona de 850 N está en *G*. Si la persona jala de la cuerda con una fuerza de 388 N, determine la distancia horizontal *b* entre los pies de la persona y *G*.

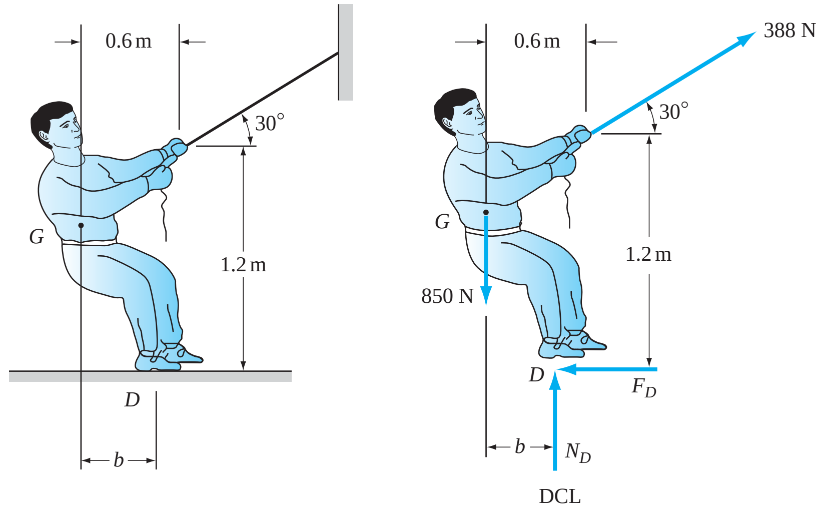


Fig. P4.23

4.24 Un anuncio homogéneo de 200 lb pende de tres cables. Encuentre la tensión en cada cable.

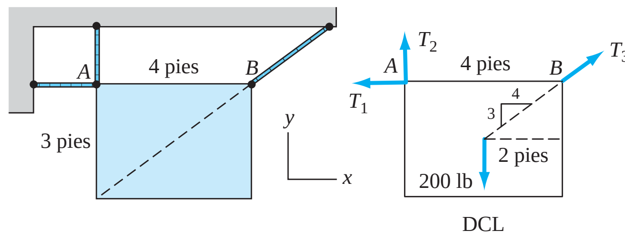


Fig. P4.24

4.25 Cuando el camión está vacío, pesa 6000 lb y su centro de gravedad está en *G*. Determine el peso total *W* de los troncos, si la carga sobre el eje posterior es el doble de la carga en el eje frontal.

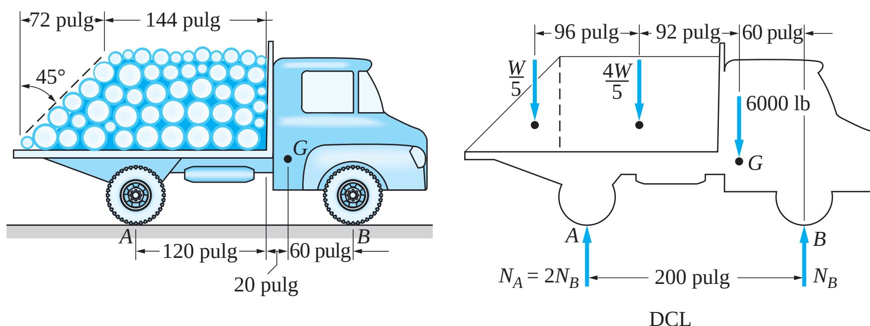


Fig. P4.25

4.6 *Análisis de equilibrio para problemas de cuerpos simples*

Hemos aprendido que los tres pasos del análisis del equilibrio de un cuerpo son

1. Dibujar el diagrama de cuerpo libre (DCL)
2. Escribir las ecuaciones de equilibrio.
3. Despejar las incógnitas de las ecuaciones.

Los pasos individuales se presentaron por separado en las secciones anteriores. El objetivo de esta sección es que adquiera experiencia en todo el proceso del análisis del equilibrio.

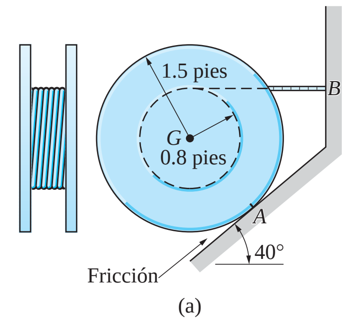
Siempre inicie dibujando el DCL, *no hay excepciones*. El DCL es la clave para el análisis del equilibrio, por lo que se debe dibujar con mucho cuidado. Recomendamos que utilice una regla y una plantilla de círculos. Después de dibujar el DCL, el resto de la solución, que consiste en escribir y resolver ecuaciones de equilibrio, será directo.

Se debe reiterar que si el número de incógnitas en el DCL es igual al número de ecuaciones independientes (problema estáticamente determinado), podrá calcular todas las incógnitas. Por el contrario, si el número de incógnitas excede al número de ecuaciones independientes (problema estáticamente indeterminado), *todas* las incógnitas no se pueden determinar empleando sólo el análisis de equilibrio.

Si bien hay muchos problemas estáticamente indeterminados de importancia práctica, encontrará que casi todos los problemas en este libro están estáticamente determinados. Para resolver un problema estáticamente indeterminado, se deben considerar las deformaciones del cuerpo, así como las ecuaciones de equilibrio. La solución de problemas estáticamente indeterminados se analiza en libros con títulos como *Resistencia de materiales* o *Mecánica de materiales*, que para comprenderlos se requiere de un conocimiento previo de la estática.

Problema de ejemplo 4.9

El carrete de cable telefónico en la figura (a) pesa 300 lb y se mantiene en reposo sobre un plano inclinado a 40° por el cable horizontal. El cable está enrollado alrededor de la masa interior del carrete y unido al soporte en B. Suponga que G, el centro de gravedad del carrete, está ubicado en el centro de éste. Encuentre las fuerzas que actúan sobre él.

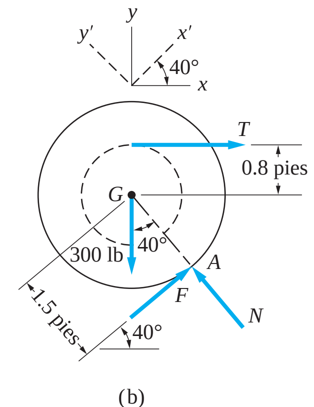


(a)

Solución

Método de análisis

El primer paso es, por supuesto, dibujar el DCL del carrete, el cual se muestra en la figura (b). Además de su peso, el carrete está sometido a la fuerza normal de contacto N y a la fuerza de fricción F (las dos actúan en el punto de contacto A) y a la tensión en el cable T. Observe que las magnitudes T, N y F son las únicas incógnitas y que hay tres ecuaciones de equilibrio independientes (sistema general de fuerzas coplanares). Por tanto, el problema está estáticamente determinado. Se ilustra un método de solución con detalle y luego se analizan varios otros métodos que se podrían utilizar.



(b)

Empezamos con la ecuación

$$\Sigma M_A = 0$$

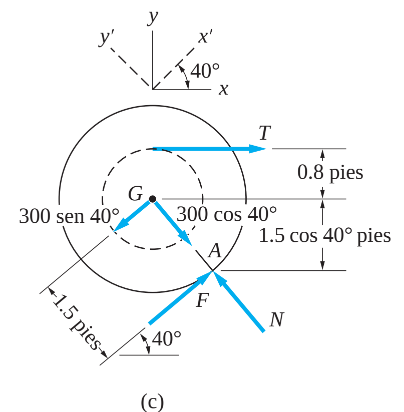
La tensión T se puede calcular empleando esta ecuación debido a que ésta será la única incógnita (N y F no tienen momentos respecto al punto A). La siguiente ecuación es

$$\Sigma M_G = 0$$

Las incógnitas en esta ecuación serán T y F, ya que N no tiene momento respecto a G. Como T ya se determinó, de esta ecuación se puede obtener F. Por último, se utiliza la ecuación

$$\Sigma F_{y'} = 0$$

Las incógnitas en esta ecuación serán T y N (F es perpendicular a la dirección y'). De nuevo, como ya se calculó T, se puede determinar N.



(c)

Detalles matemáticos

Para ayudarlo a seguir los detalles del análisis anterior, el DCL del carrete se volvió a dibujar en la figura (c). Observe que el peso de 300 lb del carrete se remplazó por sus componentes x' y y', además se agregó la distancia vertical entre A y G (1.5 cos 40° pies). El análisis ahora procede como sigue:

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad 300 \operatorname{sen} 40^\circ (1.5) - T(0.8 + 1.5 \cos 40^\circ) = 0$$

$$T = 148.4 \text{ lb}$$ *Respuesta*

$$\Sigma M_G = 0 \quad \circlearrowleft + \quad F(1.5) - T(0.8) = 0$$

$$F = \frac{148.4(0.8)}{1.5} = 79.1 \text{ lb}$$ *Respuesta*

$$\Sigma F_{y'} = 0 \quad \nwarrow + \quad N - 300 \cos 40^\circ - T \operatorname{sen} 40^\circ = 0$$

$$N = 300 \cos 40^\circ + 148.4 \operatorname{sen} 40^\circ = 325.2 \text{ lb}$$ *Respuesta*

Los signos positivos determinados para T, F y N indican que en el DCL se supuso el sentido correcto para cada fuerza.

Como comprobación de esta solución, se puede verificar que las respuestas anteriores satisfagan una cuarta ecuación de equilibrio. Por ejemplo,

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad F\cos 40^\circ - N\,\text{sen}\,40^\circ + T$$
$$= 79.1\cos 40^\circ - 325.2\,\text{sen}\,40^\circ + 148.4 \approx 0 \qquad \textit{Comprobación}$$

Otros métodos de análisis

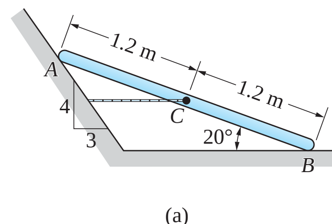
En la tabla siguiente se resumen dos métodos de análisis adicionales, omitiendo los detalles matemáticos.

Ecuación	**Incógnitas**	**Solución**
$\Sigma M_G = 0$	T y F	Resuelva simultáneamente para T y F
$\Sigma F_{x'} = 0$	T y F	
$\Sigma F_{y'} = 0$	T y N	Conocida T, resuelva para N
$\Sigma M_A = 0$	T	Resuelva para T
$\Sigma F_{x'} = 0$	T y F	Conocida T, resuelva para F
$\Sigma F_y = 0$	T, N y F	Conocida T y F, resuelva para N

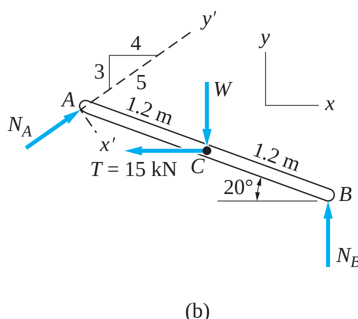
En este problema de ejemplo, se ilustraron sólo tres de los muchos conjuntos de ecuaciones que se pueden utilizar para analizar este problema. Sería benéfico que resumiera uno o más análisis adicionales. Al resumir la solución le permitirá concentrarse en el método de análisis sin involucrarse demasiado en los detalles matemáticos de la solución.

Problema de ejemplo 4.10

Determine la masa de la barra uniforme más pesada que se pueda soportar en la posición mostrada en la figura (a) si la resistencia a la ruptura del cable horizontal unido en C es 15 kN. Ignore la fricción.



(a)



(b)

Solución

Método de análisis

Se inicia dibujando el DCL de la barra como se muestra en la figura (b). El peso W de la barra más pesada que se puede soportar se obtendrá cuando la tensión T se haga

igual a 15 kN. Una barra más pesada resultaría en una tensión mayor que 15 kN en el cable y éste se rompería.

Hay tres incógnitas en el DCL: las fuerzas normales de contacto N_A y N_B y W. Observe que se conocen las direcciones de todas las fuerzas. Por tanto, las incógnitas se pueden determinar utilizando las tres ecuaciones de equilibrio independientes disponibles para un sistema de fuerzas coplanares general. Sin embargo, debido a que sólo nos interesa W, puede que no sea necesario utilizar las tres ecuaciones.

En nuestro análisis, se utilizarán las dos ecuaciones siguientes.

$$\Sigma F_x = 0$$

La fuerza N_A se puede encontrar a partir de esta ecuación (W y N_B no aparecerán ya que son perpendiculares a la dirección x).

$$\Sigma M_B = 0$$

Esta ecuación contendrá las dos incógnitas W y N_A. Como N_A ya se determinó, ahora se puede determinar W.

Detalles matemáticos

Con referencia al DCL en la figura (b), los detalles matemáticos del análisis anterior son los siguientes:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad \frac{4}{5}N_A - 15 = 0$$

$$N_A = 18.75 \text{ kN} \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \circlearrowleft + \quad W(1.2\cos 20^\circ) + 15(1.2\,\text{sen}\,20^\circ) - \frac{3}{5}N_A(2.4\cos 20^\circ)$$

$$-\frac{4}{5}N_A(2.4\,\text{sen}\,20^\circ) = 0 \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo $N_A = 18.75$ kN de la ecuación (a) en la ecuación (b) da $W = 28.0$ kN. Por tanto, la masa de la barra más pesada que se puede soportar sin romper el cable es

$$m = \frac{W}{g} = \frac{28.0 \times 10^3}{9.81} = 2850 \text{ kg} \qquad \textit{Respuesta}$$

Otros métodos de análisis

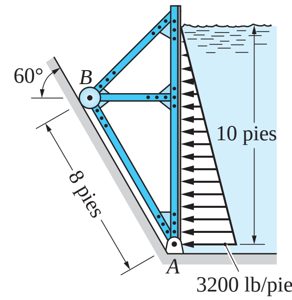
Otro método que se podría utilizar para calcular W se resume en la tabla siguiente.

Ecuación	Incógnitas	Solución
$\Sigma M_A = 0$	N_B y W	Resuelva simultáneamente para N_B y W
$\Sigma F_{x'} = 0$	N_B y W	

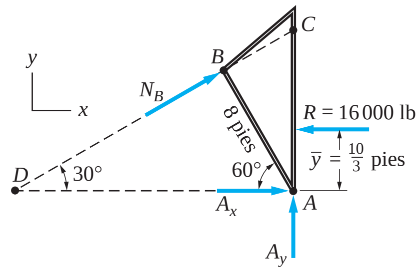
Por supuesto que existen otros conjuntos de ecuaciones que se podrían emplear para calcular W. Incuso es posible determinar W utilizando una sola ecuación de equilibrio: una ecuación de momentos tomados respecto al punto donde N_A y N_B se intersecan.

Problema de ejemplo 4.11

En la figura (a) se muestra la carga distribuida debida a la presión del agua que actúa sobre la cara corriente arriba de la barrera contra inundaciones. Determine las reacciones en los soportes que actúan sobre la barrera en A y B. Ignore el peso de la barrera.



(a)



(b)

Solución

Método de análisis

El DCL de la barrera se muestra en la figura (b), donde N_B es la reacción en B, que actúa perpendicular a la superficie inclinada y A_x y A_y son las componentes de la reacción de pasador en A. Se pueden utilizar cualesquiera tres ecuaciones de equilibrio independientes para determinar estas tres incógnitas. Como se explicó en la sección 3.6, la resultante de una carga distribuida es igual al área abajo del diagrama de carga, actuando en el centroide de esa área. Por tanto, se obtiene

$$R = \frac{1}{2}(10)(3200) = 16\,000 \text{ lb}$$

y de la tabla 3.1, se obtiene

$$\bar{y} = \frac{10}{3} \text{ pies}$$

Como las fuerzas desconocidas A_x y A_y se intersecan en A, un punto de inicio conveniente es

$$\Sigma M_A = 0$$

Esta ecuación determinará N_B. Luego se utiliza

$$\Sigma F_x = 0$$

Como ya se determinó N_B, esta ecuación dará el valor de A_x. La ecuación final es

$$\Sigma F_y = 0$$

Con N_B previamente calculada, A_y se puede encontrar con esta ecuación.

Detalles matemáticos

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad 16\,000\left(\frac{10}{3}\right) - N_B(8) = 0$$

$$N_B = 6670 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad N_B \cos 30^\circ + A_x - 16\,000 = 0$$

$$A_x = 16\,000 - (6670)\cos 30^\circ = 10\,220 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad A_y + N_B \operatorname{sen} 30^\circ = 0$$

$$A_y = -(6670)\operatorname{sen} 30^\circ = -3340 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Los signos indican que N_B y A_x están dirigidos como se muestra en el DCL, en tanto que la dirección correcta de A_y es opuesta a la dirección indicada en el DCL. Por tanto, la fuerza que actúa sobre la barrera en A es

10 220 lb
θ
3340 lb
A

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(10\,220)^2 + (3340)^2} = 10\,750 \text{ lb}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3340}{10\,220}\right) = 18.1^\circ \qquad \textit{Respuesta}$$

y la fuerza en B es

6670 lb
30°

Respuesta

Otros métodos de análisis

Por supuesto que hay muchas otras ecuaciones independientes que se podrían utilizar para resolver este problema. Con referencia al DCL en la figura (b), el conjunto siguiente de ecuaciones tiene la ventaja de determinar cada incógnita de manera independiente de las otras dos.

Ecuación	**Incógnitas**	**Solución**
$\Sigma M_A = 0$	N_B	Resuelva para N_B
$\Sigma M_C = 0$	A_x	Resuelva para A_x
$\Sigma M_D = 0$	A_y	Resuelva para A_y

Problemas

4.26 La barra homogénea *AB* pesa 30 lb. Determine las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre la barra en *A* y *B*. Ignore la fricción.

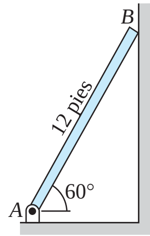


Fig. P4.26

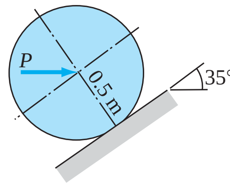


Fig. P4.27

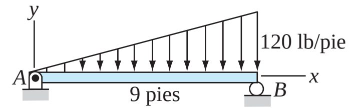


Fig. P4.28

4.27 Determine la fuerza horizontal *P* requerida para mantener al cilindro homogéneo de 30 kg en equilibrio sobre la superficie inclinada rugosa.

4.28 Una viga homogénea *AB* que pesa 600 lb soporta la carga distribuida que se indica. Encuentre las reacciones en los soportes en *A* y *B*.

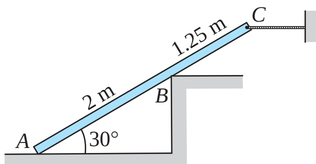


Fig. P4.29

4.29 La barra homogénea *ABC* de 40 kg se mantiene en posición por una cuerda horizontal unida al extremo *C*. Ignorando la fricción, determine la tensión en la cuerda.

4.30 La fuerza horizontal *P* se aplica a la manija del extractor. Determine la tensión resultante *T* en la cadena en términos de *P*.

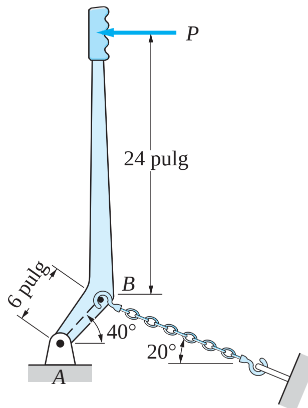


Fig. P4.30

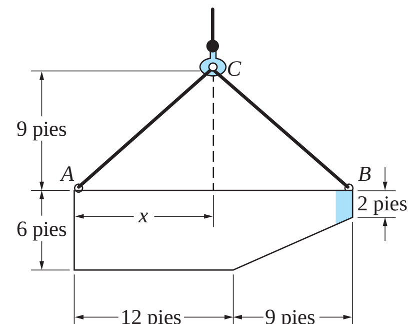


Fig. P4.31

4.31 La placa delgada de acero, que pesa 82 lb/pie^2, se sube lentamente por los cables *AC* y *BC*. Calcule la distancia *x* y encuentre la tensión correspondiente en cada uno de los cables.

4.32 Ignorando la masa de la viga, calcule las reacciones en *A* y *B*.

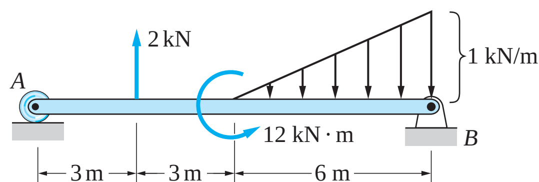


Fig. P4.32

4.33 Un automóvil de 1200 kg se baja lentamente al muelle utilizando la grúa *A* y el malacate *C*. Determine las fuerzas en los cables *BA* y *BC* para la posición indicada.

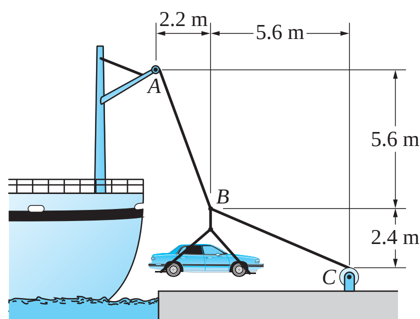


Fig. P4.33

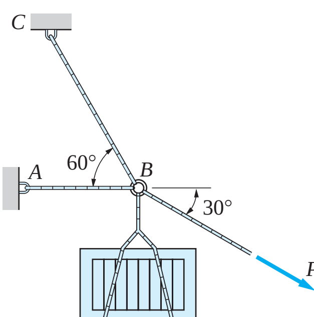


Fig. P4.34, P4.35

4.34 Una caja que pesa 4000 lb está soportada por tres cuerdas concurrentes en *B*. Encuentre las fuerzas en las cuerdas *AB* y *BC* si $P = 460$ lb.

4.35 Encuentre el valor menor de *P* para el cual la caja en el problema 4.34 estará en equilibrio en la posición indicada. (*Sugerencia:* una cuerda sólo puede soportar una fuerza de tensión.)

4.36 Determine la tensión *T* en la cuerda para la cual la polea estará en equilibrio.

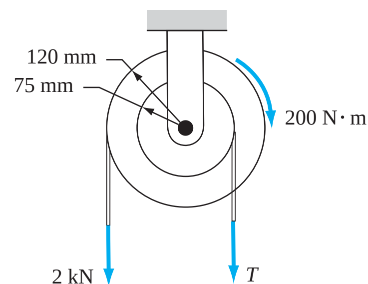


Fig. P4.36

4.37 El disco homogéneo de 60 kg reposa sobre una superficie inclinada sin fricción. (a) Calcule la magnitud de la fuerza horizontal *P*. (b) ¿Podría estar el disco en equilibrio si la superficie inclinada no tuviera fricción?

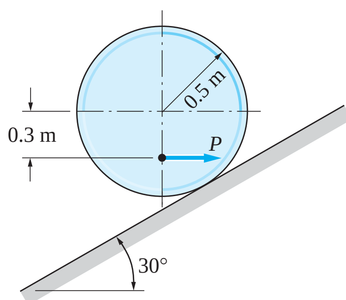


Fig. P4.37, P4.38

4.38 El disco homogéneo de 60 kg se coloca sobre una superficie inclinada sin fricción y se mantiene en equilibrio por la fuerza horizontal *P* y un par *C* (*C* no se muestra en la figura). Determine *P* y *C*.

4.39 La masa de la barra uniforme *AB* es 40 kg. Calcule el par *C* necesario para el equilibrio si (a) $\theta = 0$ y (b) $\theta = 54°$.

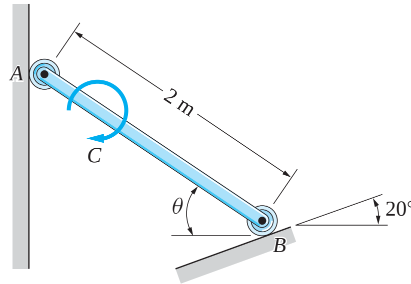


Fig. P4.39

4.40 El dispositivo ilustrado es un mecanismo impulsor Ginebra modificado, una entrada a velocidad constante produce una salida a velocidad variable con periodos de reposo. El par de torsión de entrada es 120 N · m. Para la posición indicada, calcule la fuerza de contacto en *B* y la magnitud de la reacción en *A*. Ignore la fricción y los pesos de los componentes.

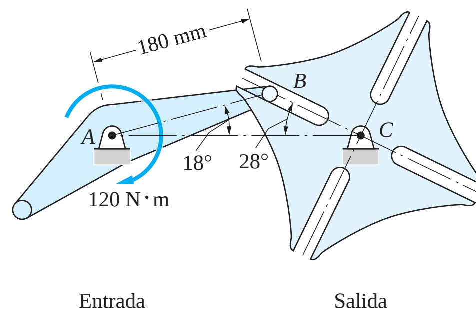


Fig. P4.40

4.41 El centro de gravedad del automóvil de 3000 lb está en *G*. El automóvil se encuentra estacionado sobre un plano inclinado con el freno de mano accionado, que bloquea los neumáticos posteriores. Encuentre: (a) las fuerzas normales (perpendiculares al plano inclinado) que actúan debajo de los pares de neumáticos frontales y posteriores y (b) la fuerza de fricción (paralela a la superficie inclinada) debajo del par posterior de neumáticos.

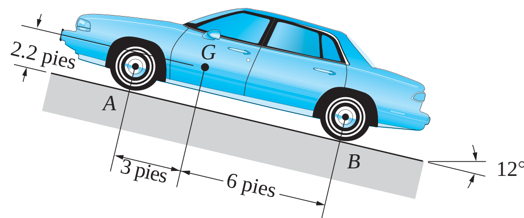


Fig. P4.41

4.42 El bote de 1800 kg pende de dos cables paralelos de igual longitud. La ubicación del centro de gravedad del bote no se conoce. Calcule la fuerza *P* necesaria para mantenerlo en la posición indicada.

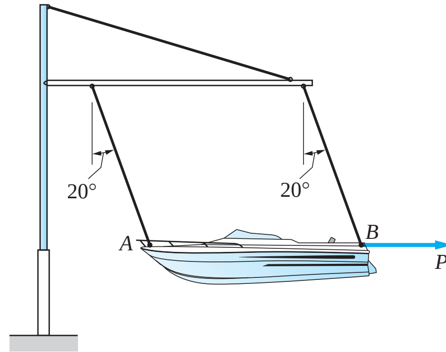


Fig. P4.42

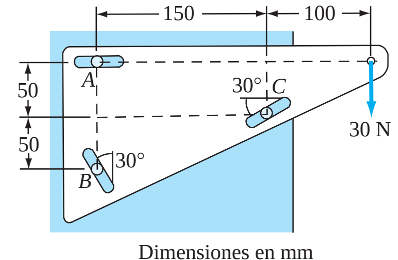


Fig. P4.43

4.43 La ménsula tiene tres ranuras que se acoplan con pasadores que están empotrados en un muro. Ignorando la fricción, determine la fuerza ejercida sobre la ménsula por cada pasador.

4.44 La escalera uniforme de peso W se sube lentamente aplicando una fuerza vertical P a la cuerda en A. Demuestre que P es independiente del ángulo θ.

4.45 La escalera uniforme de 40 lb se sube lentamente jalando la cuerda unida en A. Determine el ángulo mayor θ que puede formar la escalera si la tensión máxima permisible en la cuerda BC es 330 lb.

4.46 Una persona de 90 kg, cuyo centro de gravedad está en G, sube por una escalera uniforme. La longitud de la escalera es 5 m y su masa es 20 kg. La fricción se puede ignorar. (a) Calcule las magnitudes de las reacciones en A y B para $x = 1.5$ m. (b) Encuentre la distancia x para la cual la escalera estará a punto de caer.

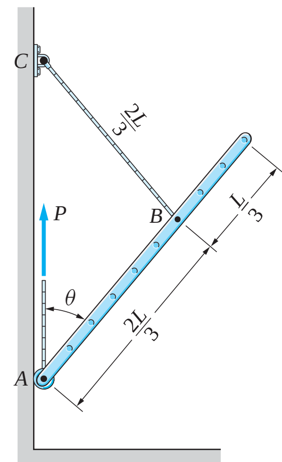


Fig. P4.44, P4.45

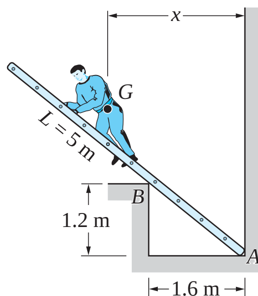


Fig. P4.46

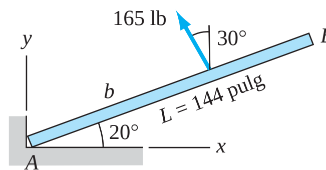


Fig. P4.47

4.47 Una barra homogénea AB de 240 lb está en equilibrio en la posición indicada. Determine la distancia b que ubica la fuerza de 165 lb y calcule la magnitud de la reacción en el soporte en A.

4.48 El mecanismo para tensionar una cinta magnética tiene una masa de 0.4 kg y su centro de gravedad está en G. La tensión T en la cinta se mantiene prefijando la fuerza de tensión en el resorte en B a 14 N. Calcule T y la magnitud de la reacción en el pasador en A.

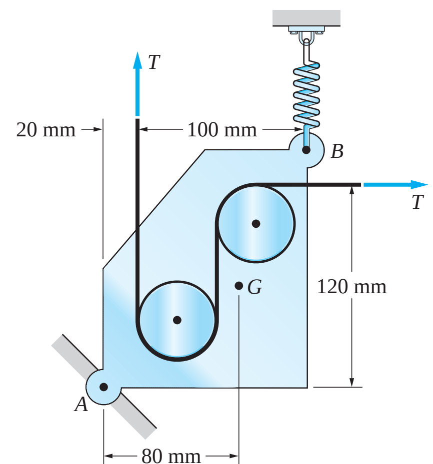


Fig. P4.48

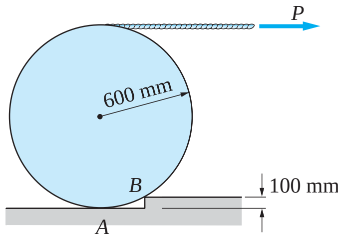


Fig. P4.49

4.49 Un cilindro homogéneo de 300 kg se jala sobre el escalón de 100 mm por la fuerza horizontal *P*. Determine la *P* menor que subirá el cilindro desde la superficie en *A*. Suponga una fricción suficiente en la esquina *B* para evitar su deslizamiento.

4.50 Una polea homogénea de 18 kg está unida a la barra *ABC* con un pasador en *B*. La masa de la barra es despreciable. El cable que pasa por la polea soporta una tensión de 600 N. Determine las magnitudes de las reacciones en los soportes en *A* y *C*.

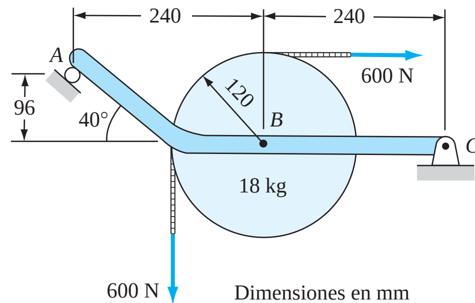


Fig. P4.50

4.51 Cada uno de los sacos con arena apilados sobre la viga uniforme de 250 lb pesa 12 lb. Determine las reacciones en los soportes en *A* y *B*.

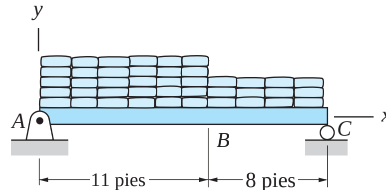


Fig. P4.51

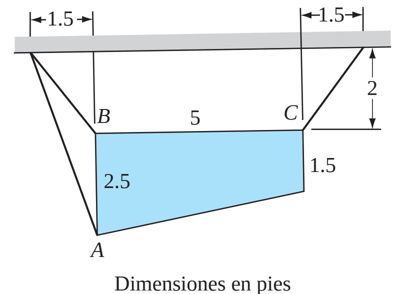


Fig. P4.52

4.52 La placa homogénea de 600 lb pende de tres cables. Determine la fuerza en cada cable.

4.53 La estructura de soporte del anuncio espectacular está unida al suelo por un pasador en *A* y *B* y su pata posterior reposa sobre el suelo en *A*. La fricción se puede ignorar. El punto *G* es el centro de gravedad del anuncio y de la estructura, que en conjunto pesan 2800 lb. Para evitar que se vuelque con vientos fuertes, se coloca un peso de 2370 lb sobre la estructura cerca de *A*, como se indica. (a) Calcule las magnitudes de las reacciones en *A* y *B* si la carga por viento sobre el anuncio es $q = 120$ lb/pie. (b) Encuentre la carga de viento mínima *q* que ocasionaría que la estructura se vuelque.

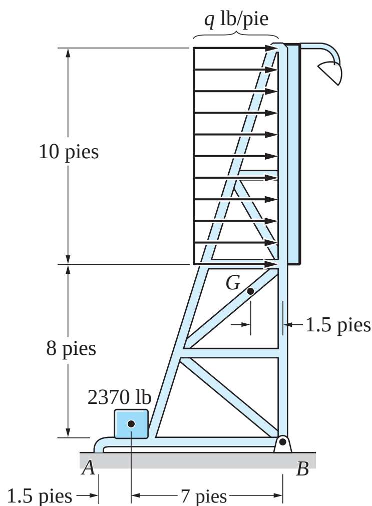


Fig. P4.53

4.54 La compuerta de regulación automática *ABC*, articulada en *B*, se presiona contra el borde del vertedor en *C* por la acción del peso *A* de 3645 lb. Si la compuerta

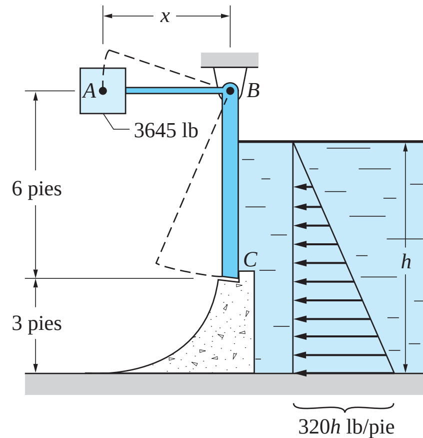


Fig. P4.54

debe abrirse cuando el nivel del agua alcance una altura $h = 6$ pies, determine la distancia x que ubica el peso A. Ignore el peso de la compuerta.

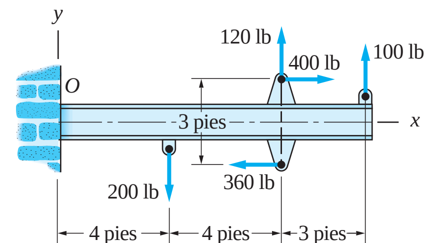


Fig. P4.55

4.55 La viga en voladizo está empotrada en el muro en O. Ignorando el peso de la viga, determine las reacciones en O.

4.56 Determine la fuerza F requerida para mantener la caja de 200 kg en equilibrio en la posición indicada.

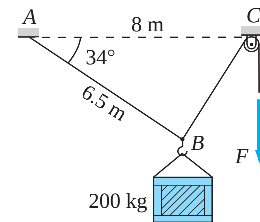


Fig. P4.56

4.57 Determine el ángulo θ para el cual el cilindro homogéneo de 1250 N estará en equilibrio en la posición indicada. Además, encuentre la tensión en la cuerda AB.

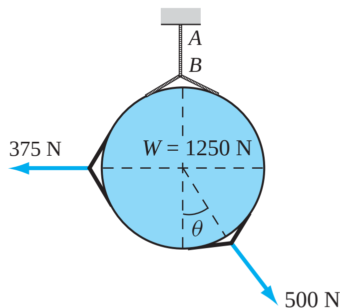


Fig. P4.57

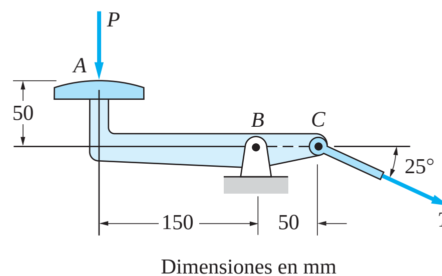


Fig. P4.58

4.58 Un operador de una máquina produce una tensión T en la barra de control aplicando la fuerza P al pedal de pie. Determine la P máxima si la magnitud de la reacción en el pasador en B está limitada a 1.8 kN. Ignore la masa del mecanismo.

***4.59** El camión de volteo consiste de un chasís y una caja de carga, con centros de gravedad en G_1 y G_2, respectivamente. Con la caja de carga abajo, las cargas en los ejes (fuerzas normales en *A* y *B*) son de 41 900 lb cada una. Cuando la caja está en la posición elevada, la caga en el eje posterior aumenta a 48 700 lb. Calcule el peso del chasís, el peso de la caja y la distancia *x*.

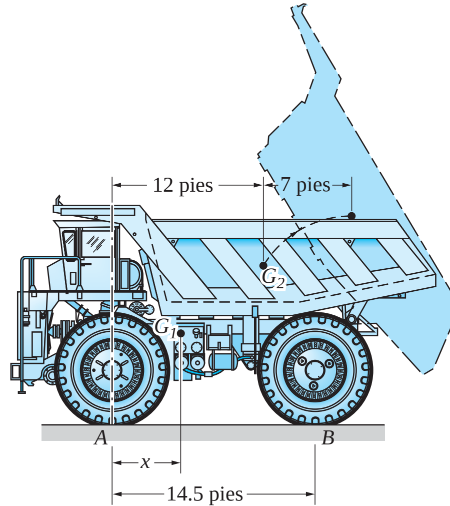


Fig. P4.59

***4.60** Los centros de gravedad del carro elevador de 50 kg y de la caja de 120 kg están en G_1 y G_2, respectivamente. El carro debe poder subir el escalón de 5 mm cuando la fuerza de empuje *P* es 600 N. Encuentre el radio mínimo permisible de la rueda en *A*. Asegúrese de verificar si el carro se volcará.

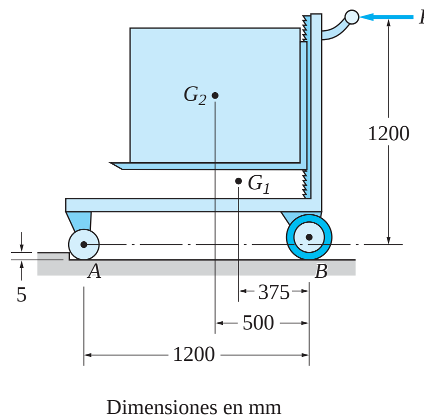


Fig. P4.60

PARTE B: *Análisis de cuerpos compuestos*

4.7 *Diagramas de cuerpo libre que contienen reacciones internas*

Hasta este punto se han considerado problemas de "un solo cuerpo". Debido a que el interés ha sido principalmente en calcular reacciones externas, cada problema ha requerido utilizar sólo un diagrama de cuerpo libre (DCL) y la solución de un conjunto de ecuaciones de equilibrio. Ahora se inicia el estudio de las fuerzas que actúan en conexiones que son internas al cuerpo, denominadas *reacciones internas*. El cálculo de las reacciones con frecuencia requiere que se utilice más de un diagrama de cuerpo libre.

En esta sección la atención se enfoca sobre el trazo de los diagramas de cuerpo libre de las diversas partes que en conjunto forman un cuerpo compuesto. Los marcos y las máquinas son ejemplos de cuerpos conectados que son de uso común en aplicaciones ingenieriles. Los *marcos* son estructuras rígidas que se diseñan para soportar carga en una posición fija. Las *máquinas* contienen partes móviles y suelen diseñarse para convertir una fuerza de entrada en una fuerza de salida.

La elaboración de los diagramas de cuerpo libre que comprenden fuerzas internas se basa en la tercera ley de Newton: por cada acción existe una reacción igual y opuesta. Un apego estricto a este principio es la clave para la elaboración de los diagramas de cuerpo libre.

a. *Fuerzas internas en miembros*

Considere la viga que se muestra en la figura 4.3(a), la cual soporta una carga P que actúa en su centro (se supone que se conocen P y θ). En el DCL de toda la viga, figura 4.3(b), hay tres reacciones internas desconocidas (A_x, A_y y N_B) y tres ecuaciones de equilibrio independientes. Por tanto, la viga está estáticamente determinada y las tres incógnitas se podrían calcular con facilidad, aunque no lo haremos aquí.

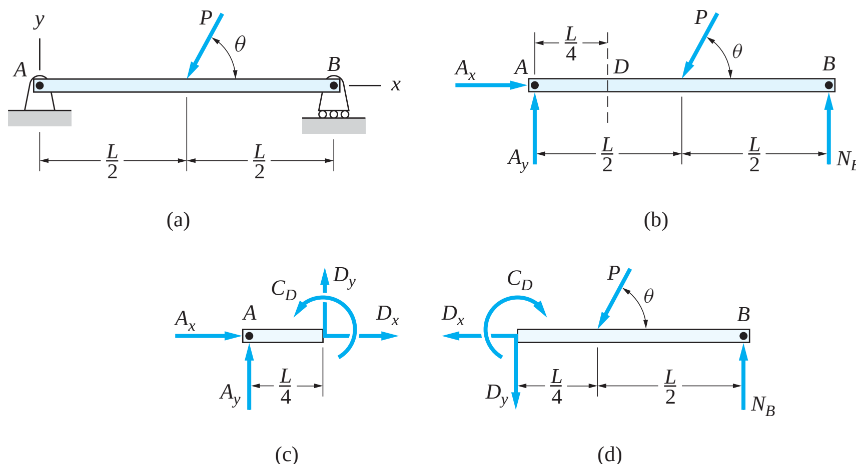


Fig. 4.3

Ahora suponga que se nos pide determinar el sistema de fuerzas que actúa sobre la sección transversal interna en D, ubicada a la distancia $L/4$ a la derecha del extremo A. Se inicia aislando las partes de la viga que se encuentran a la izquierda y a la derecha de D. En efecto, nos imaginamos que la viga se corta en la sección de interés. Así pues, la sección transversal que inicialmente era una sección interna ahora se convierte en una sección externa. Luego se trazan los diagramas de cuerpo libre de las dos partes de la viga, como se muestra en las figuras 4.3(c) y (d).

Considere el DCL para la parte izquierda de la viga, figura 4.3(c). La parte derecha de la viga se ha removido y su efecto se muestra como una fuerza desconocida (representada por las componentes independientes D_x y D_y) y un par desconocido (C_D), cuyos sentidos se supone.

En el DCL para la parte derecha de la viga, figura 4.3(d), el efecto de la parte izquierda removida es también una fuerza desconocida y un par desconocido. Sin embargo, la tercera ley de Newton establece que el efecto que tiene la parte derecha de la viga sobre la parte izquierda es igual y opuesto al efecto que tiene la parte izquierda sobre la derecha. Por tanto, en el DCL en la figura 4.3(d), el sistema de fuerzas en D consiste en las fuerzas D_x y D_y y del par C_D, cada uno igual en magnitud, pero opuesto en dirección a su contraparte en la figura 4.3(c). ¡Esa es la clave para comprender los diagramas de cuerpo libre! Al aislar dos partes de un cuerpo a fin de exponer las reacciones internas, estas reacciones se deben mostrar como sistemas de fuerzas iguales y opuestas en los diagramas de cuerpo libre de las partes respectivas.

Observe que se está utilizando una representación escalar para las fuerzas y los pares en los diagramas de cuerpo libre en la figura 4.3. Por ejemplo, la magnitud de la componente x de la fuerza en D está identificada por una flecha. Si se emplea una representación vectorial, una fuerza del par se identificaría $\mathbf{D}_x$ y la otra fuerza $-\mathbf{D}_x$. Como no representa ninguna ventaja usar la notación vectorial aquí, se continuará empleando la representación escalar.

Por último, observe que si A_x, A_y y N_D se hubieran calculado antes a partir del DCL para toda la viga, el DCL en la figura 4.3(c) o (d) se podría emplear para calcular las tres incógnitas D_x, D_y y C_D.

Observe que las fuerzas internas no aparecen en el DCL de toda la viga, figura 4.3(b). La razón es que hay dos sistemas de fuerzas internas actuando sobre cada sección de la viga, cada sistema es igual y opuesto al otro. Por tanto, las reacciones internas no tienen efecto en las ecuaciones de fuerzas y momentos para toda la viga.

b. *Fuerzas internas en conexiones*

Considere el marco que se muestra en la figura 4.4(a), que consiste de dos barras homogéneas AB y BC, cada una con un peso W y longitud L. Las barras están articuladas entre sí en B y están unidas a los soportes con pasadores en A y C. Dos fuerzas P y Q se aplican directamente al pasador en B. Se supone que L, W, P, Q y θ son cantidades conocidas. Además, en todo este libro *se ignoran los pesos de los pasadores y otros conectores*, a menos que se indique lo contrario.

El DCL de la estructura que se muestra en la figura 4.4(b) contiene cuatro reacciones de pasador desconocidas: A_x y A_y (las fuerzas ejercidas sobre la barra AB por el pasador A) y C_x y C_y (las fuerzas ejercidas sobre la barra BC por el pasador C). Los sentidos de estas fuerzas se eligieron arbitrariamente. Como sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio independientes de este DCL, se podría considerar que el problema está estáticamente indeterminado. En efecto, esta sería la conclusión correcta si ABC fuese una sola unidad rígida, en vez de dos barras rígidas unidas por un pasador. Si el sistema se "desarticula" y se trazan un DCL para cada componente,

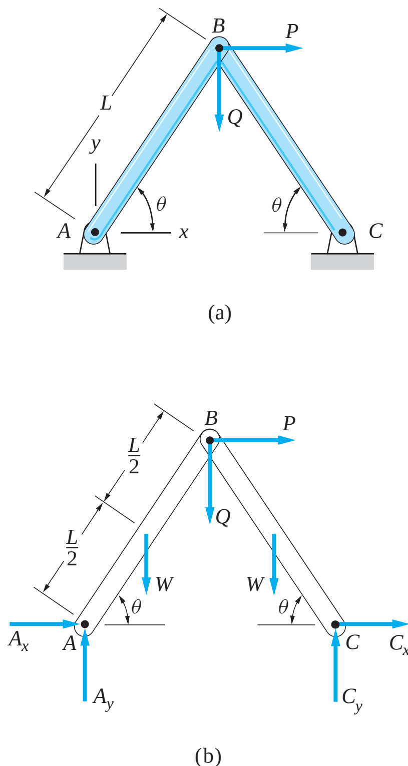


Fig. 4.4

se verá que el problema está estáticamente determinado. Como se explica a continuación, al trazar el DCL de cada componente aumenta el número de incógnitas, pero el número de ecuaciones independientes también aumenta.

El DCL de cada componente del marco se muestra en la figura 4.5.

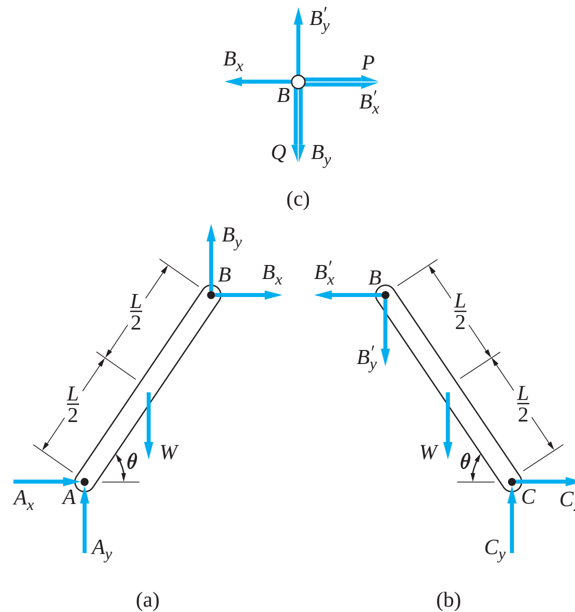


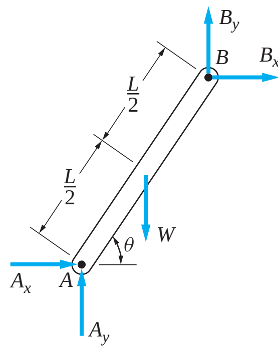
Fig. 4.5

Figura 4.5(a) DCL de la barra *AB* con los pasadores en *A* y *B* removidos.

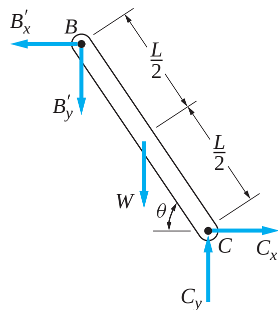
W es el peso de la barra *AB* actuando en el centro de la barra.
A_x y A_y son las fuerzas ejercidas *sobre* la barra *AB* *por* el pasador en *A*.
B_x y B_y son las fuerzas ejercidas *sobre* la barra *AB* *por* el pasador en *B*.

Notas

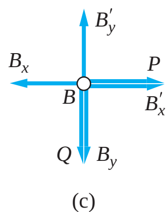
1. Los sentidos de A_x y A_y no se pueden elegir arbitrariamente aquí. Estos sentidos ya se supusieron cuando se trazó el DCL del sistema, figura 4.4(b). Inicialmente, el sentido de una fuerza desconocida se puede elegir de manera arbitraria, pero si esa fuerza aparece en más de un DCL, su sentido debe ser consistente con la suposición original.
2. Los sentidos de B_x y B_y se eligieron arbitrariamente, debido a que este es el primer DCL en donde aparecen estas fuerzas.
3. *P* y *Q* se aplican directamente al pasador en *B*, por lo que no aparecen en este DCL (recuerde que se removió el pasador en *B*).



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.5 repetida

Figura 4.5 (b) DCL de la barra *BC* con los pasadores en *B* y *C* removidos.

W es el peso de la barra *BC* actuando en el centro de la barra.
C_x y C_y son las fuerzas ejercidas *sobre* la barra *BA por* el pasador en *C*.
B'_x y B'_y son las fuerzas ejercidas *sobre* la barra *BC por* el pasador en *B*.

Notas

4. Las direcciones de C_x y C_y deben ser las mismas que se muestran en la figura 4.4(b). (Consulte la nota 1.)
5. Las fuerzas ejercidas *por* el pasador *B sobre* la barra *BC* están identificadas B'_x y B'_y. Como este es el primer DCL sobre el que han aparecido B'_x y B'_y, sus sentidos se han elegido arbitrariamente.

Figura 4.5(c) DCL del pasador *B* con las barras *AB* y *BC* removidas.

P y *Q* son las fuerzas externas actuando directamente sobre el pasador.
B_x y B_y son las fuerzas ejercidas *sobre* el pasador *por* la barra *AB*.
B'_x y B'_y son las fuerzas ejercidas *sobre* el pasador *por* la barra *BC*.

Notas

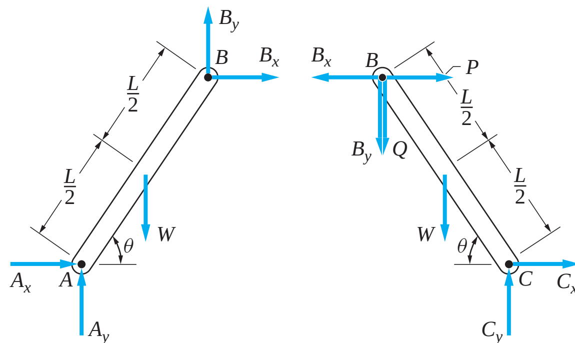
6. Como *P* y *Q* se aplican directamente al pasador en *B*, aparecerán en cada DCL que contenga ese pasador.
7. Los sentidos de B_x y B_y son opuestos a los sentidos elegidos para estas fuerzas en el DCL de la barra *AB*. Esto se deduce de la tercera ley de Newton: la fuerza ejercida sobre la barra *AB* por el pasador *B* es igual y opuesta a la fuerza ejercida sobre el pasador *B* por la barra *AB*. Un argumento similar es válido para las direcciones de B'_x y B'_y.

Ahora contemos las incógnitas y las ecuaciones de equilibrio independientes disponibles de los diagramas de cuerpo libre en la figura 4.5. Hay ocho incógnitas: A_x, A_y, B_x, B_y, B'_x, B'_y, C_x y C_y. El número de ecuaciones de equilibrio también es ocho: tres de cada uno de los diagramas de cuerpo libre de las barras *AB* y *BC* (sistemas generales de fuerzas coplanares). Por tanto, se concluye que el problema está estáticamente determinado y las ocho incógnitas se pueden resolver a partir de las ocho ecuaciones de equilibrio independientes.

Como ya se mencionó, también hay tres ecuaciones independientes para el DCL de todo el cuerpo indicado en la figura 4.4. ¿Significa esto que se tienen $8 + 3 = 11$ ecuaciones independientes? ¡La respuesta es no! El DCL para todo el sistema no es independiente de los diagramas de cuerpo libre para todas sus partes: los diagramas de cuerpo libre en la figura 4.5 se podrían poner de regreso juntos de nuevo para formar el DCL en la figura 4.4. En otras palabras, si cada parte del cuerpo está en equilibrio, entonces se garantiza el equilibrio de todo el cuerpo. Esto significa que de las once ecuaciones mencionadas, sólo ocho serán independientes.

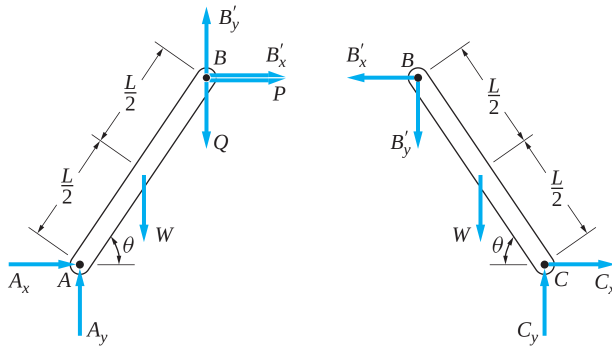
Ahora cambiemos el problema suponiendo que *ABC* es una sola unidad rígida en vez de dos barras articuladas entre sí en *B*. En este caso, el cuerpo podría transmitir una fuerza *y* un par en *B*. En consecuencia, el número de incógnitas aumentaría en uno (la magnitud del par), pero el número de ecuaciones independientes permanecería en ocho. De aquí que este problema estaría estáticamente indeterminado.

Hasta este punto se ha dibujado el diagrama de cuerpo libre para todo el sistema y los diagramas de cuerpo libre para cada una de sus partes. Hay otros dos diagramas de cuerpo libre que se podrían elaborar: los diagramas de cuerpo libre con el pasador en *B* permaneciendo dentro de la barra y aquellos en los que el pasador *B* permanece dentro de la barra *BC*. Estos diagramas de cuerpo libre se muestran en las figuras 4.6 y 4.7, respectivamente. Al estudiar cada uno de los diagramas de cuerpo libre, observe que B'_x y B'_y no aparecen en la figura 4.6 ya que ahora son fuerzas internas. Por la misma razón, B_x y B_y no aparecen en la figura 4.7. Debe observarse de nuevo que, aunque se han trazado diagramas de cuerpo libre adicionales, el número total de ecuaciones de equilibrio independientes sigue siendo ocho.



DCL de *AB* y *BC* dejando el pasador *B* en *BC*

Fig. 4.6



DCL de *AB* y *BC* dejando el pasador *B* en *AB*

Fig. 4.7

El caso especial siguiente se utiliza ampliamente en la elaboración de los diagramas de cuerpo libre de cuerpos que están conectados por pasadores.

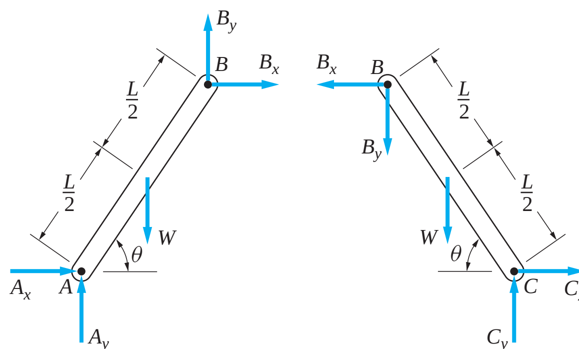
Caso especial: reacciones iguales y opuestas

Si dos miembros están conectados por un pasador y *si* no hay fuerzas externas aplicadas al pasador, entonces las fuerzas que ejerce el pasador sobre cada miembro son iguales en magnitud pero de dirección opuesta.

Es relativamente fácil verificar este enunciado con referencia de nuevo al DCL del pasador *B*, figura 4.5(c). Observe que si no hay fuerzas aplicadas al pasador (es

decir, si $P = Q = 0$), las ecuaciones de equilibrio para el pasador establecen que $B_x = B'_x$ y $B_y = B'_y$: las reacciones en el pasador son iguales en magnitud pero de sentido opuesto.

Utilizando este caso especial, los diagramas de cuerpo libre para las barras *AB* y *BC* y el pasador *B* serían como se muestra en la figura 4.8. Aquí el número total de incógnitas es seis y el número total de ecuaciones independientes es seis: tres para cada barra. Obviamente, dos de las ocho ecuaciones originales se han utilizado para probar que las reacciones en el pasador en *B* son iguales y opuestas.



DCL sin fuerzas externas aplicadas al pasador *B*

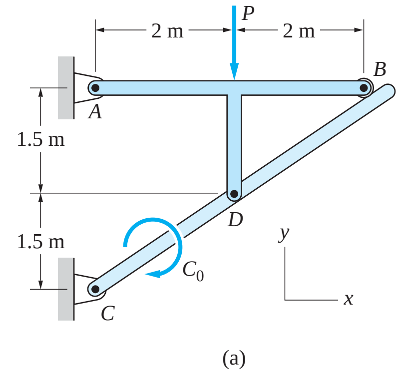
Fig. 4.8

En este libro se utilizan *reacciones en el pasador iguales y opuestas* cuando son aplicables. Es decir, nuestros diagramas de cuerpo libre de los miembros presentan reacciones iguales y opuestas en los pasadores, como se muestra en *B* en la figura 4.8. Los diagramas de cuerpo libre de los pasadores no se han dibujado. Las dos situaciones más comunes donde las reacciones del pasador *no son iguales y opuestas* son:

- Cuando se aplica una fuerza externa al pasador
- Cuando más de dos miembros están conectados por el pasador

Problema de ejemplo 4.12

1. Con referencia a la figura (a), trace el DCL para todo el marco y para cada una de sus partes, ignorando los pesos de los miembros. 2. Determine el número total de incógnitas y el número total de ecuaciones de equilibrio independientes, suponiendo que la fuerza P y el par C_0 se conocen.



(a)

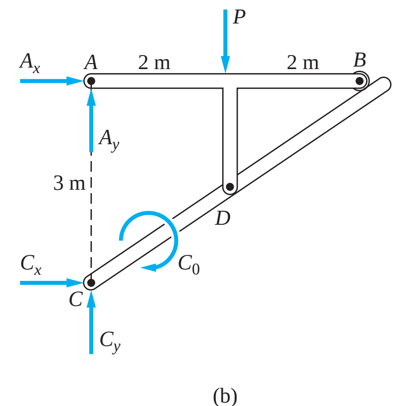
Solución

Parte 1

El sistema de fuerzas en cada uno de los diagramas de cuerpo libre se describe a continuación.

DCL de todo el marco; figura (b)

P y C_0: fuerza y par aplicado
A_x y A_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el marco por el pasador A (se suponen sus direcciones)
C_x y C_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el marco por el pasador C (se suponen sus direcciones)



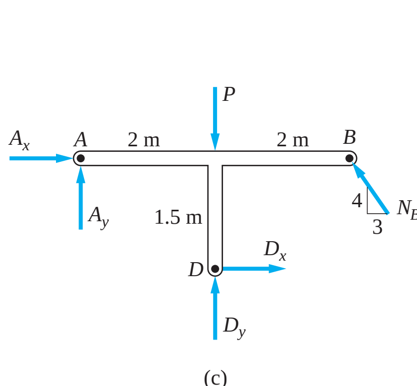
(b)

DCL del miembro ABD; figura (c)

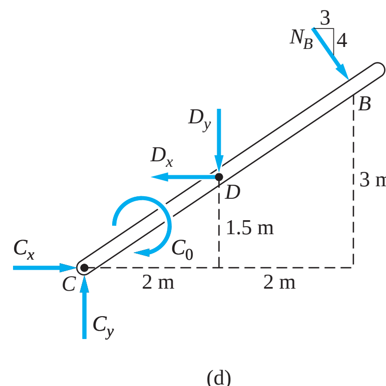
P: fuerza aplicada
A_x y A_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el miembro ABD por el pasador A [se deben mostrar actuando en las mismas direcciones que en la figura (b)]
D_x y D_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el miembro ABD por el pasador D (se suponen sus direcciones)
N_B: fuerza ejercida sobre el miembro ABD por el rodillo en B (debe ser perpendicular al miembro CDB)

DCL del miembro CDB; figura (d)

C_0: par aplicado
C_x y C_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el miembro CDB por el pasador C [se deben mostrar actuando en la misma dirección que en la figura (a)]



(c)



(d)

D_x y D_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el miembro *CDB* [se deben mostrar iguales y opuestas a las componentes correspondientes en la figura (c)]
N_B: fuerza ejercida sobre el miembro por el rodillo en *B* [debe ser igual y opuesta a la fuerza correspondiente en la figura (c)]

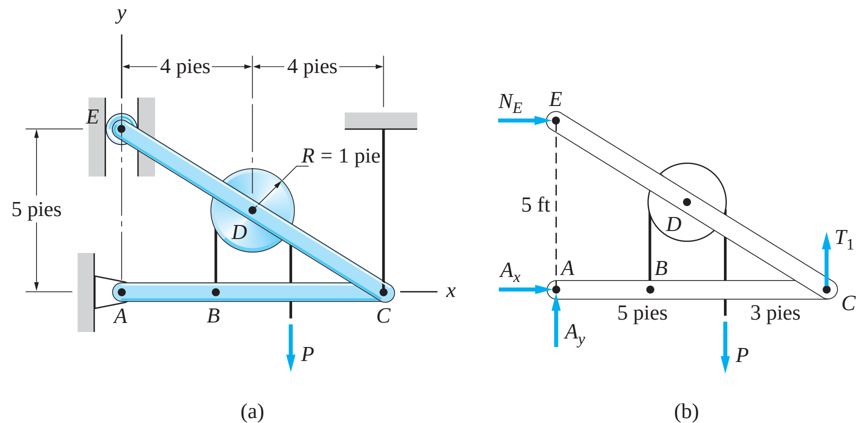
Parte 2

Se dispone de tres ecuaciones de equilibrio independientes del DCL del miembro *ABD* y tres del DCL del miembro *CDB*, lo que da un total de seis ecuaciones de equilibrio independientes (recuerde que el DCL para el marco completo no es independiente de los diagramas de cuerpo libre para sus dos miembros compuestos). El número total de incógnitas es siete: dos incógnitas en cada uno de los puntos en *A*, *C* y *D* y una incógnita en *B*.

Como el número de incógnitas excede al número de ecuaciones de equilibrio independientes, se concluye que este problema está estáticamente indeterminado; es decir, todas las incógnitas no se pueden determinar sólo mediante el análisis de equilibrio.

Problema de ejemplo 4.13

1. Trace los diagramas de cuerpo libre para el marco completo en la figura (a) y para cada una de sus partes. Los pesos de los miembros son despreciables. El cable en *C* está conectado directamente al pasador. 2. Determine el número total de incógnitas y el número total de ecuaciones de equilibrio independientes, suponiendo que *P* se conoce.



Solución

Parte 1

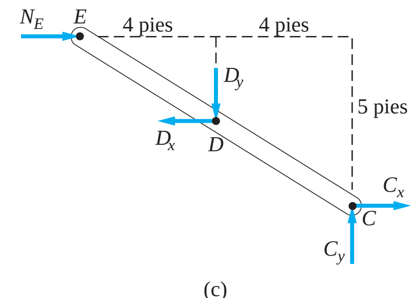
Las fuerzas sobre cada uno de los diagramas de cuerpo libre se describen a continuación.

DCL del marco completo; figura (b)

P: fuerza aplicada
A_x y A_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el marco por el pasador *A* (se suponen sus direcciones)

N_E: fuerza ejercida sobre el marco por el rodillo E (la dirección es horizontal, supuesta actuando hacia la derecha)
T_1: fuerza ejercida sobre el marco por el cable que está conectado al pasador C

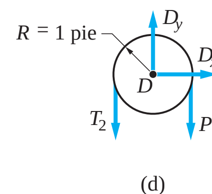
DCL del miembro EDC; figura (c)



(c)

N_E: fuerza ejercida sobre el miembro EDC por el rodillo en E [se debe mostrar actuando en la misma dirección que en la figura (b)]
D_x y D_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el miembro EDC por el pasador D (se suponen sus direcciones)
C_x y C_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el miembro EDC por el pasador C (sus direcciones se suponen)

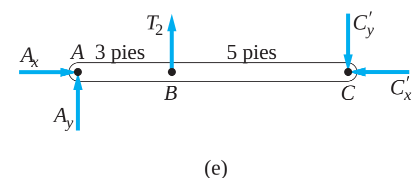
DCL de la polea; figura (d)



(d)

P: fuerza aplicada
D_x y D_y: componentes de la fuerza ejercida sobre la polea por el pasador D [se deben mostrar iguales y opuestas a las componentes correspondientes en la figura (c)]
T_2: tensión en el cable en el lado izquierdo de la polea

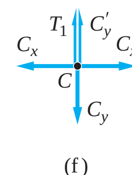
DCL del miembro ABC; figura (e)



(e)

A_x y A_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el miembro ABC por el pasador A [se deben mostrar actuando en las mismas direcciones que en la figura (b)]
T_2: fuerza ejercida sobre el miembro ABC por el cable que está conectado en B [debe ser igual y opuesta a la fuerza correspondiente en la figura (d)]
C'_x y C'_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el miembro ABC por el pasador C (sus direcciones se suponen)

DCL del pasador C; figura (f) Este DCL es necesario ya que un cable está conectado directamente al pasador C.



(f)

T_1: fuerza ejercida sobre el pasador C por el cable [se debe mostrar actuando en la misma dirección que en la figura (b)]
C_x y C_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el pasador C por el miembro EDC [se deben mostrar iguales y opuestas a las componentes correspondientes en la figura (c)]
C'_x y C'_y: componentes de la fuerza ejercida sobre el pasador C por el miembro ABC [se deben mostrar iguales y opuestas a las componentes correspondientes en la figura (e)]

Parte 2

Hay un total de once ecuaciones de equilibrio independientes: tres por cada una de las dos barras, tres para la polea y dos para la polea y dos para el pasador C (el sistema de fuerzas actuando sobre el pasador es concurrente, coplanar). Recuerde que el DCL para el marco completo no es independiente de los diagramas de cuerpo libre de sus miembros.

El problema está estáticamente determinado ya que el número total de incógnitas también es 11: A_x y A_y, C_x y C_y, C'_x y C'_y, D_x y D_y, N_E, T_1 y T_2.

Problemas

Para los problemas 4.61 a 4.68, (a) trace los diagramas de cuerpo libre para el conjunto (o estructura) completo y cada una de sus partes. Ignore la fricción y los pesos de los miembros a menos que se indique lo contrario. Asegúrese de indicar todas las dimensiones relevantes. Para cada problema, (b) determine el número total de fuerzas desconocidas y el número total de ecuaciones de equilibrio independientes.

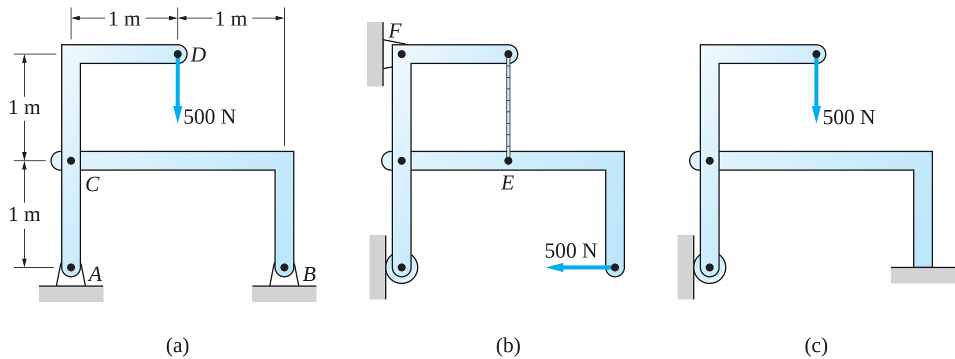


Fig. P4.61

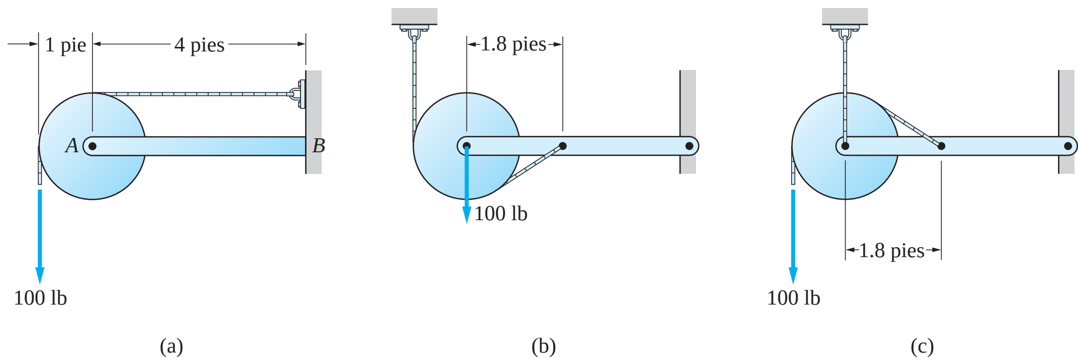


Fig. P4.62

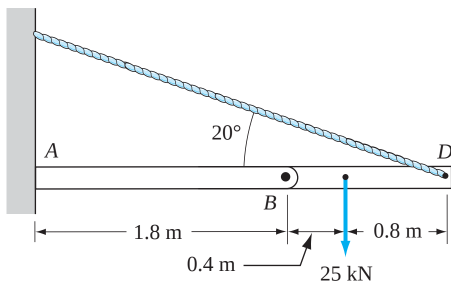


Fig. P4.63

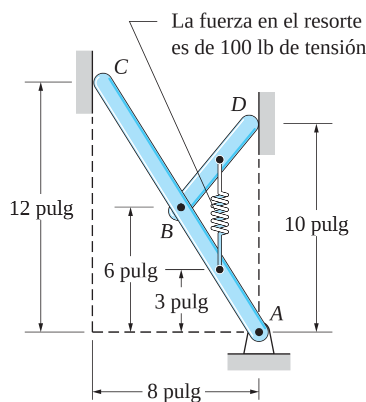


Fig. P4.64

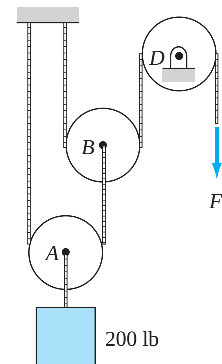


Fig. P4.65

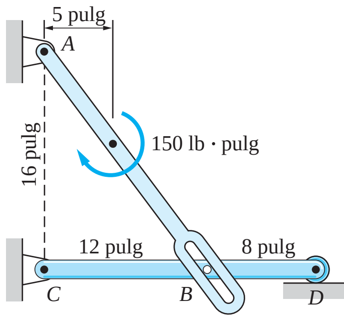


Fig. P4.66

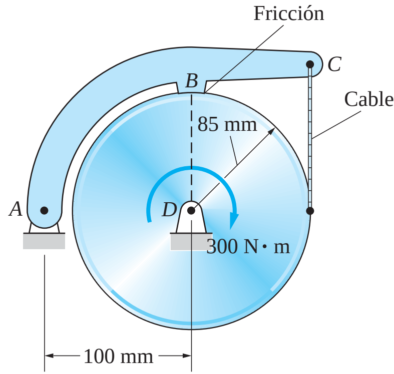


Fig. P4.67

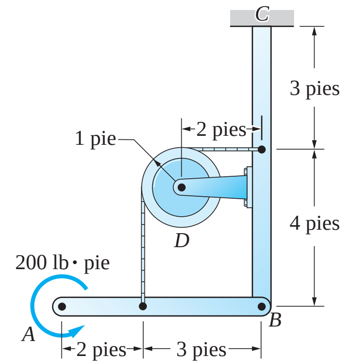


Fig. P4.68

4.69 La válvula *D* de control del fluido está controlada por el flotador *A*. Trace los diagramas de cuerpo libre para el conjunto flotador-brazo *ABC*, el eslabón *CE*, el brazo de soporte *BD* y el conjunto compuesto de los tres componentes. El empuje hacia arriba sobre el flotador es de 2.4 lb. Ignore los pesos de los componentes. Suponga que se conocen todas las dimensiones.

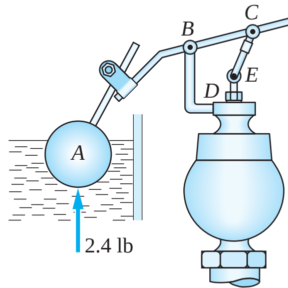


Fig. P4.69

4.70 Dibuje los diagramas de cuerpo libre para lo siguiente: (a) la barra *ABC* con el pasador *A* dentro de la barra; (b) la barra *ABC* con el pasador *A* removido y (c) el pasador *A*. Ignore los pesos de los miembros.

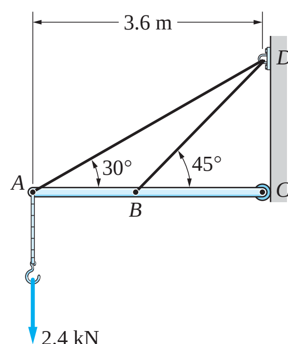


Fig. P4.70

4.71 La tensión en el resorte que conecta los dos brazos de las tenazas es 150 lb. Dibuje los diagramas de cuerpo libre de (a) todo el conjunto; (b) el pasador *A*; (c) el brazo *ABD* con el pasador *A* removido, y (d) el bloque de 60 kg. Ignore el peso de las tenazas.

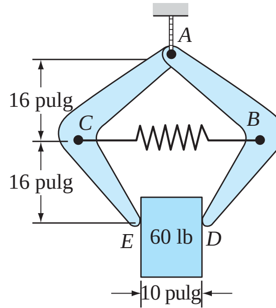


Fig. P4.71

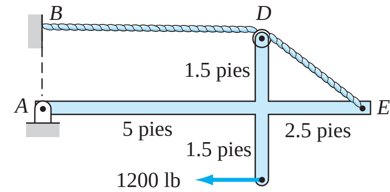


Fig. P4.72

4.72 Para la estructura ilustrada, dibuje los diagramas de cuerpo libre siguientes: (a) para la estructura completa; (b) para la polea pequeña en *D* y (c) para el marco *ADE*.

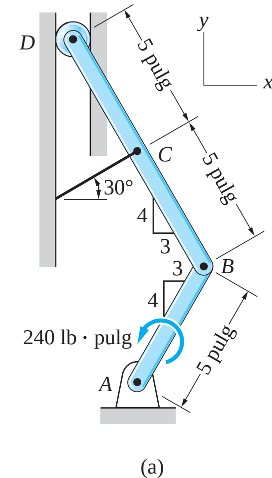
4.8 Análisis de equilibrio de cuerpos compuestos

En el análisis de equilibrio de un cuerpo compuesto y de sus diversas partes, se debe poder elaborar los diagramas de cuerpo libre apropiados. Como se explicó en la sección anterior, esta habilidad depende de la aplicación correcta de la tercera ley de Newton. Además, se debe poder formular y resolver ecuaciones de equilibrio basadas en los diagramas de cuerpo libre, una técnica que se explicó para problemas de un solo cuerpo en la sección 4.6. La diferencia principal entre problemas de un cuerpo y de cuerpos compuestos es que en estos últimos con frecuencia se requiere que se analice más de un DCL.

En los problemas en la sección anterior se requiere la elaboración de diagramas de cuerpo libre para un cuerpo compuesto y cada una de sus partes. Estos problemas fueron simplemente ejercicios sobre el trazo de los diagramas de cuerpo libre. Comenzar un análisis de equilibrio dibujando todos los diagramas de cuerpo libre posibles es ineficiente; de hecho, puede conducir a confusión. Se debe iniciar trazando los diagramas de cuerpo libre de todo el cuerpo y, si es posible, calcular las reacciones externas. Sólo hasta entonces, se debe considerar el análisis de una o más de las partes del cuerpo. Las ventajas de esta técnica son las siguientes: primero, debido a que sólo aparecen fuerzas externas en los diagramas de cuerpo libre de todo el cuerpo, algunas o todas a menudo se pueden calcular sin hacer referencia a las fuerzas internas. Una segunda ventaja es que los diagramas de cuerpo libre se trazan sólo según se requieran, reduciendo así la cantidad de trabajo. La mayor parte de las veces no será necesario dibujar todos los diagramas de cuerpo libre posibles ni calcular todas las reacciones internas a fin de encontrar las incógnitas deseadas. Saber qué diagramas de cuerpo libre y qué ecuaciones formular son sin duda las partes más difíciles del análisis de equilibrio.

Problema de ejemplo 4.14

La estructura en la figura (a) está cargada por el par de 240 lb · pulg en sentido contrario al horario aplicado al miembro *AB*. Ignorando los pesos de los miembros, determine todas las fuerzas que actúan sobre el miembro *BCD*.



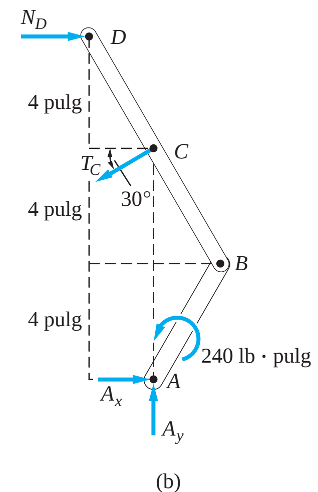
(a)

Solución

La solución de un problema que comprende un cuerpo compuesto como éste se debe aproximar con precaución. A menos que se planee un método de análisis eficiente desde el inicio, es fácil resultar abrumado por el número de diagramas de cuerpo libre que se pueden dibujar y por el número de ecuaciones de equilibrio que se pueden formular.

Método de análisis

Si bien no es absolutamente necesario, considerar el DCL de toda la estructura es con frecuencia un buen punto de partida. El DCL que se muestra en la figura (b) contiene las cuatro incógnitas N_D, T_C, A_x y A_y. Con cuatro incógnitas y tres ecuaciones de equilibrio independientes (sistema general de fuerzas coplanares), no se pueden determinar todas las incógnitas en este DCL (se requiere otra ecuación independiente). Por tanto, sin formular una sola ecuación a partir del DCL en la figura (b), ponemos nuestra atención en otro DCL.



(b)

Como estamos buscando las fuerzas que actúan sobre el miembro *BCD*, consideremos su DCL indicado en la figura (c). Este DCL contiene cuatro incógnitas: N_D, T_C, B_x y B_y. De nuevo, sólo hay tres ecuaciones independientes (sistema general de fuerzas coplanares), pero al estudiar la figura (c) se expone que la ecuación $\Sigma M_B = 0$ relacionará las incógnitas N_D y T_C. Además, de la figura (b) se observa que N_D y T_C también están relacionadas por la ecuación $\Sigma M_A = 0$. Por tanto, estas dos ecuaciones de momentos se pueden resolver simultáneamente para N_D y T_C. Después de determinar estas dos incógnitas, el cálculo de B_x y B_y, que son las fuerzas desconocidas restantes actuando sobre *BCD*, es directo.

Detalles matemáticos

Con referencia al DCL de la estructura completa en la figura (b),

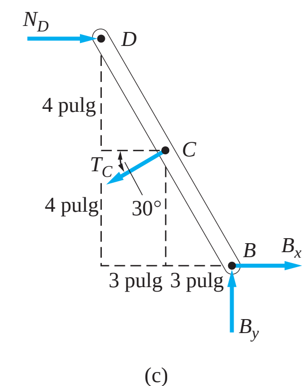
$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad T_C \cos 30^\circ(8) - N_D(12) + 240 = 0$$

$$N_D = 0.5774\, T_C + 20 \qquad \text{(a)}$$

Del DCL del miembro *BCD* en la figura (c),

$$\Sigma M_B = 0 \quad \circlearrowleft + \quad T_C \cos 30^\circ(4) + T_C \operatorname{sen} 30^\circ(3) - 8\, N_D = 0$$

$$N_D = 0.6205\, T_C \qquad \text{(b)}$$



(c)

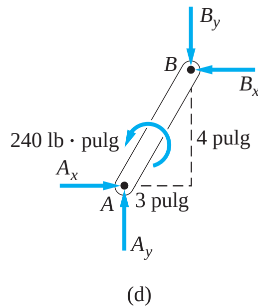
Resolviendo las ecuaciones (a) y (b) simultáneamente da

$$T_C = 464 \text{ lb} \quad \text{y} \quad N_D = 288 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Además, del DCL del miembro *BCD* en la figura (c),

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad N_D - T_C \cos 30^\circ + B_x = 0$$

$$B_x = 464 \cos 30^\circ - 288 = 114 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$



(d)

y

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad B_y - T_C \operatorname{sen} 30^\circ = 0$$

$$B_y = 464 \operatorname{sen} 30^\circ = 232 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Como la solución produce números positivos para las incógnitas, cada fuerza está dirigida como se muestra en los diagramas de cuerpo libre.

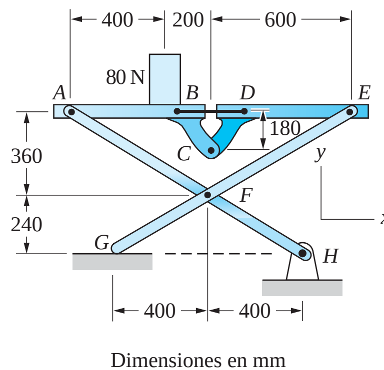
El DCL del miembro *AB*, aunque no se requirió en el análisis anterior, se muestra en la figura (d).

Otros métodos de análisis

Observe que los diagramas de cuerpo libre para los dos miembros que componen la estructura, figuras (c) y (d), contienen un total de seis incógnitas, A_x, A_y, B_x, B_y, N_D y T_C. También hay seis ecuaciones de equilibrio independientes: tres para cada miembro. (Entonces se observa que no es absolutamente necesario utilizar el DCL de todo el conjunto.) Hay muchas combinaciones de ecuaciones que se podrían emplear para determinar las fuerzas que actúan sobre el miembro *BCD*. Se recomienda que practique sus habilidades resumiendo uno o más métodos de análisis adicionales.

Problema de ejemplo **4.15**

Una caja de 80 N se coloca sobre una mesa plegable, como se muestra en la figura (a). Ignorando la fricción y pesos de los miembros, determine todas las fuerzas que actúan sobre el miembro *EFG* y la tensión en el cable que conecta los puntos *B* y *D*.



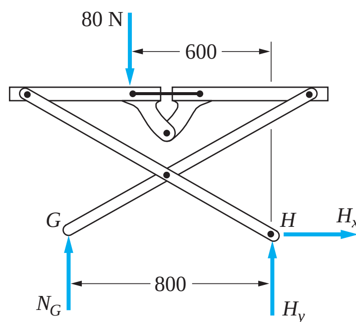
Dimensiones en mm

(a)

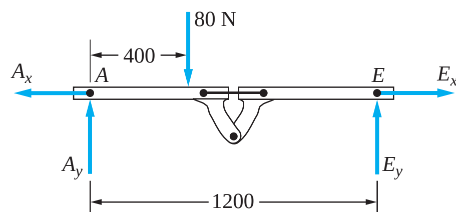
Solución

Método de análisis

Se inicia considerando el DCL de toda la mesa, figura (b). Dado que este DCL contiene tres incógnitas (N_G, H_x y H_y), será posible calcularlas a partir de este DCL. En particular, N_G se puede encontrar utilizando la ecuación $\Sigma M_H = 0$.



(b)



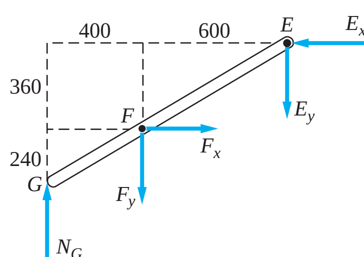
(c)

Luego, ponemos nuestra atención en el DCL del miembro *EFG* adelantándonos a la figura (d). Se observa que hay cinco incógnitas en este DCL (N_G, F_x, F_y, E_x y E_y). Aunque ya encontramos una manera para determinar N_G, quedan cuatro incógnitas: con sólo tres ecuaciones independientes.

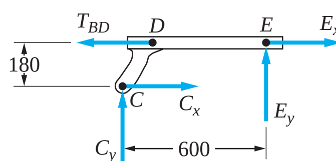
Por tanto, sin formular de momento ninguna ecuación, consideramos otro DCL, el DCL de la parte superior de la mesa, indicado en la figura (c). Si bien este DCL también contiene cuatro fuerzas desconocidas, se observa que tres de ellas (A_x, A_y y E_x) pasan por el punto *A*. Por tanto, la cuarta fuerza, E_y, que es una de las fuerzas que buscamos, se puede determinar con la ecuación $\Sigma M_A = 0$.

Después de calcular E_y, sólo quedan tres incógnitas en el DCL en la figura (d). Estas incógnitas ahora se pueden determinar con facilidad empleando las tres ecuaciones de equilibrio disponibles.

Hasta este punto, nuestro análisis ha explicado cómo determinar las cinco fuerzas que actúan sobre el miembro *EFG*. Todo lo que resta es encontrar la tensión en el cable conectado entre *B* y *D*. Esta fuerza aún no ha aparecido en ninguno de los diagramas de cuerpo libre, por lo que se debe dibujar otro DCL.



(d)



(e)

Se elige dibujar el DCL de la mitad derecha de la parte superior de la mesa, como se muestra en la figura (e). A su vez se escoge la mitad derecha en vez de la izquierda ya que las reacciones de pasador en *E* ya se han determinado. Con E_x y E_y previamente determinadas, las tres incógnitas restantes (C_x, C_y y T_{BD}) se pueden calcular. En particular, la tensión T_{BD} se puede determinar con la ecuación $\Sigma M_C = 0$.

Observe que no fue necesario dibujar el DCL para el miembro *AFH* o para la mitad izquierda de la parte superior de la mesa.

Detalles matemáticos

Del DCL de toda la mesa, figura (b),

$$\Sigma M_H = 0 \quad \circlearrowleft+ \quad 80(600) - N_G(800) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$N_G = 60 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Del DCL de la parte superior de la mesa, figura (c),

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft+ \quad -80(400) + E_y(1200) = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$E_y = 26.67 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Del DCL del miembro *EFG*, figura (d),

$$\Sigma M_F = 0 \quad \circlearrowleft+ \quad E_x(360) - E_y(600) - N_G(400) = 0 \qquad \text{(c)}$$

$$E_x(360) = 26(67(600) + 60(400)$$

$$E_x = 111.12 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad F_x - E_x = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$F_x = E_x = 111.12 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad N_G - F_y - E_y = 0 \qquad \text{(e)}$$

$$F_y = 60 - 26.67 = 33.33 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Del DCL de la mitad derecha de la parte superior de la mesa, figura (e),

$$\Sigma M_C = 0 \quad \circlearrowleft+ \quad E_y(600) - E_x(180) + T_{BD}(180) = 0 \qquad \text{(f)}$$

$$T_{BD}(180) = 111.12(180) - 26.67(600)$$

$$T_{BD} = 22.22 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Otros métodos de análisis

Nuestro análisis se basó en las seis ecuaciones de equilibrio independientes, ecuaciones (a) a (f). Para una estructura tan compleja como la que se muestra en la figura (a), hay muchos otros métodos de análisis que se podrían emplear. Por ejemplo, resultaría un conjunto diferente de ecuaciones si se elige considerar el lado izquierdo de la parte superior de la mesa en vez del derecho, como se hizo en la figura (e).

Problemas

4.73 Una viga consiste de dos barras conectadas por un pasador en *B*. Ignorando el peso de la viga, calcule las reacciones en el empotramiento en *A*.

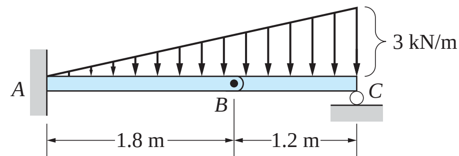


Fig. P4.73

4.74 Para el marco ilustrado, determine la magnitud de la reacción en el pasador en *B*. Ignore el peso del marco.

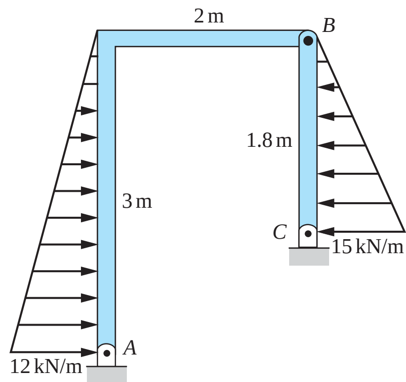


Fig. P4.74

4.75 La estructura consiste en dos barras idénticas conectadas por un pasador en *B*. Ignorando los pesos de las barras, encuentre la magnitud de la reacción en el pasador en *C*.

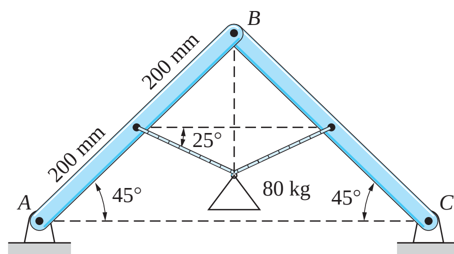


Fig. P4.75

4.76 Las barras *AB* y *AC* están conectadas por un pasador en *A* y un cable horizontal. El cable vertical que soporta la masa de 200 kg está conectado al pasador en *A*. Determine la tensión en el cable horizontal. Ignore los pesos de las barras.

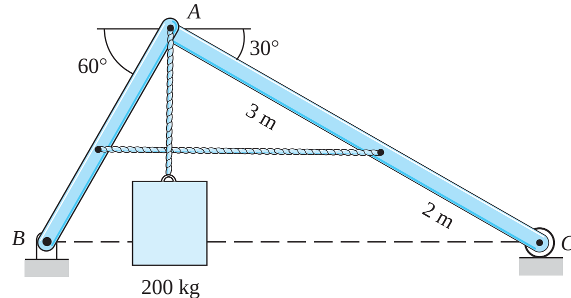


Fig. P4.76

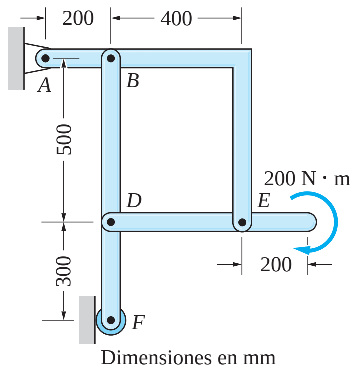


Fig. P4.77

4.77 Ignorando los pesos de los miembros, determine la magnitud de la reacción en el pasador en *D* cuando el marco se carga con el par de 200 N · m.

4.78 La longitud de las barras *AB* y *BC* de la estructura es *L* y su peso es *W* y 2*W*, respectivamente. Encuentre la tensión en el cable *DE* en términos de *W*, *L* y el ángulo θ.

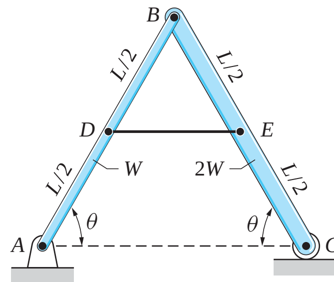


Fig. P4.78

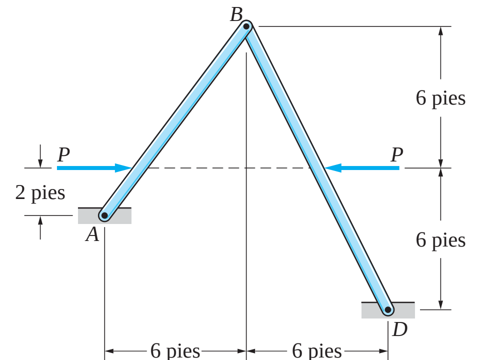


Fig. P4.79

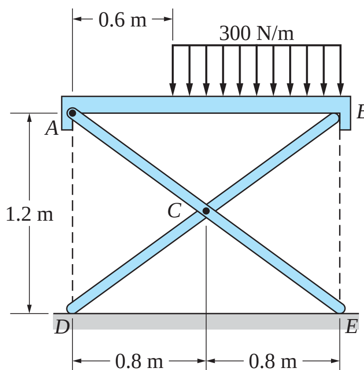


Fig. P4.80

4.79 Determine la magnitud de la reacción en el pasador en *A* como una función de *P*. Los pesos de los miembros son despreciables.

4.80 Ignorando la fricción y pesos de los miembros, calcule las magnitudes de las reacciones en los pasadores en *A* y *C* para la mesa plegable ilustrada.

4.81 Al ser activada por la fuerza *P*, el sujetador en un brazo robótico puede recoger objetos aplicando la fuerza de sujeción *F*. Si $P = 120$ N, calcule la fuerza de sujeción para la posición indicada.

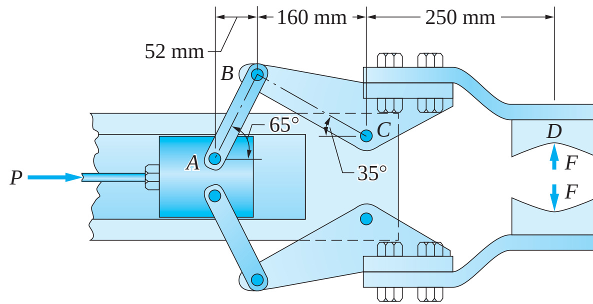


Fig. P4.81

4.82 Determine las cargas en los ejes (fuerzas normales en *A*, *B* y *C*) para el transportador de mineral cuando está estacionado sobre un camino horizontal sin aplicar sus frenos. Las masas de la cabina y del remolque son 4000 y 6000 kg, respectivamente, con centros de gravedad en *D* y *E*. Suponga que la conexión en *F* es equivalente a un pasador liso.

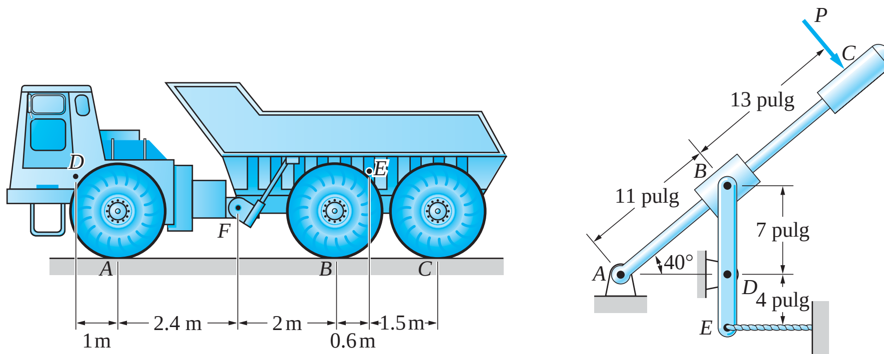


Fig. P4.82

Fig. P4.83

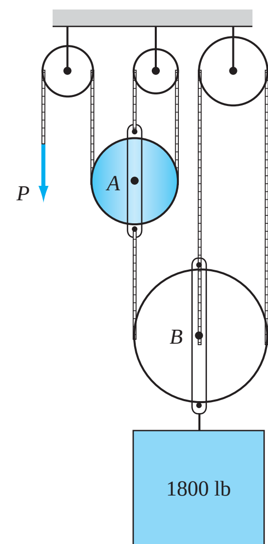


Fig. P4.84

4.83 Determine la fuerza *P* que produzca una fuerza de tensión de 25 lb en el cable en *E*. Ignore los pesos de los miembros.

4.84 Determine la fuerza *P* que mantenga el sistema de poleas en equilibrio. Ignore los pesos de las poleas.

4.85 Determine la fuerza de contacto entre la bola lisa *B* de 200 lb y la barra horizontal y la magnitud de la reacción en el pasador en *A*. Ignore los pesos de la barra y polea.

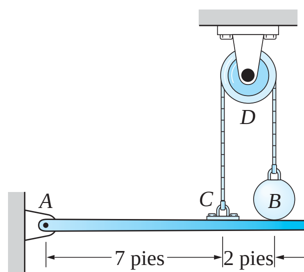


Fig. P4.85

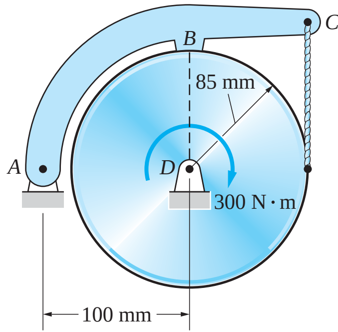


Fig. P4.86

4.86 Calcule la tensión en el cable y la fuerza de contacto en la superficie lisa *B* cuando se aplica el par de 300 N · m al cilindro. Ignore los pesos de los miembros.

4.87 Los pesos y las longitudes de las dos vigas homogéneas que componen la estructura se indican en la figura. Determine la magnitud de la reacción en el pasador en *B*.

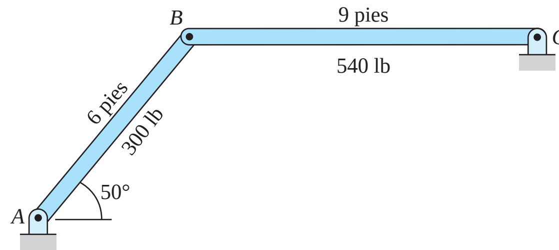


Fig. P4.87

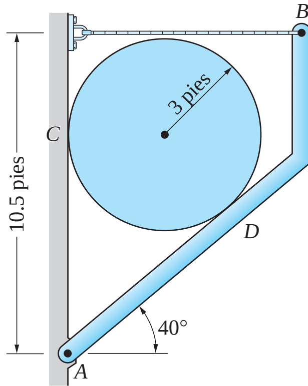


Fig. P4.88

4.88 Determine la tensión en el cable en *B*, si el cilindro uniforme pesa 350 lb. Ignore la fricción y peso de la barra *AB*.

4.89 Las masas de los cilindros sin fricción *A* y *B* son 2.0 y 1.0 kg, respectivamente. El valor mínimo de la fuerza *P* que levantará el cilindro *A* de la superficie horizontal es 55.5 N. Calcule el radio *R* del cilindro *B*.

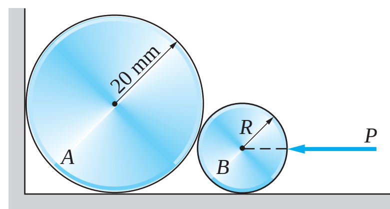


Fig. P4.89

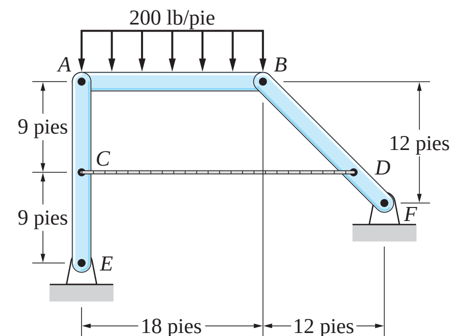


Fig. P4.90

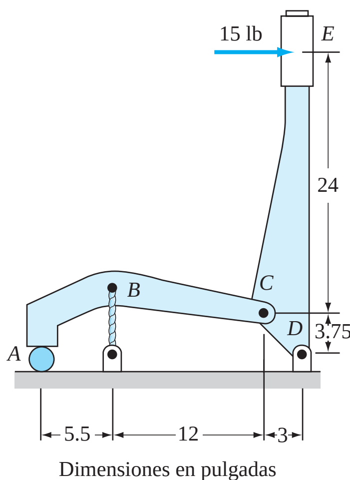


Fig. P4.91

4.90 Ignorando el peso del marco, encuentre la tensión en el cable *CD*.

4.91 Determine la fuerza de sujeción en *A* debida a la fuerza horizontal de 15 lb aplicada a la manija en *E*.

4.92 Calcule la tensión en el cable *BD* cuando la persona de 165 lb está de pie a 5 pies del suelo, como se muestra en la figura. El peso de la escalera y la fricción se pueden ignorar.

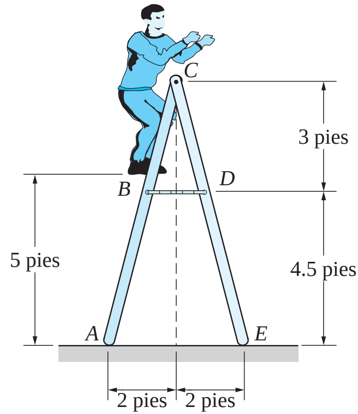


Fig. P4.92

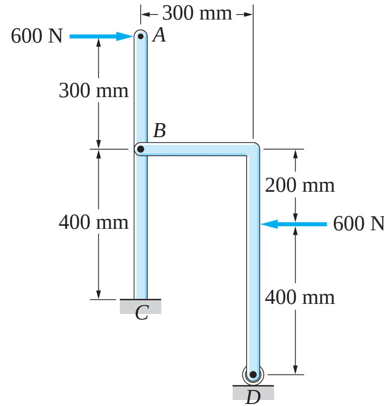


Fig. P4.93

4.93 Calcule las reacciones en el empotramiento en *C*, ignorando los pesos de los miembros.

4.94 En el amplificador de movimiento angular mostrado, el movimiento oscilatorio de *AC* se amplía por el movimiento oscilatorio de *BC*. Ignorando la fricción y pesos de los miembros, determine el par de torsión de salida C_0, si el par de torsión de entrada es 36 N · m.

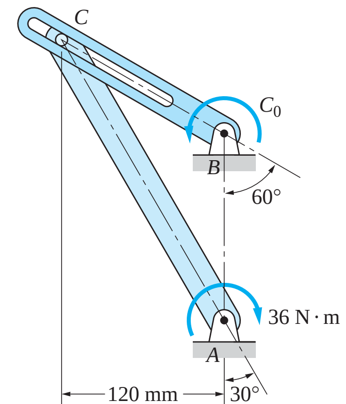


Fig. P4.94

4.95 La conexión articulada del sistema de frenos consiste en el brazo del pedal *DAB*, la barra de conexión *BC* y el cilindro hidráulico *C*. ¿A qué ángulo θ será la fuerza *Q* cuatro veces mayor que la fuerza *P* aplicada al pedal? Ignore la fricción y peso de la conexión articulada.

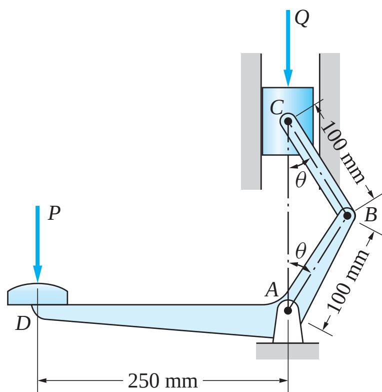


Fig. P4.95

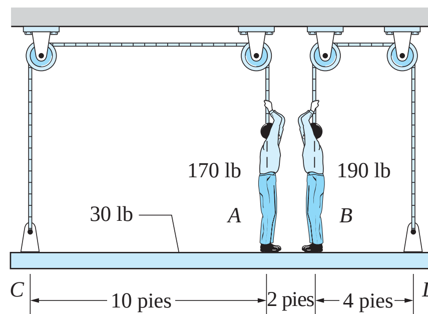


Fig. P4.96

4.96 Los lavadores de ventanas *A* y *B* se soportan a sí mismos y al tablón uniforme de 30 lb *CD* jalando hacia abajo sobre las dos cuerdas. Determine: (a) la tensión en cada cuerda y (b) la fuerza vertical que cada persona ejerce sobre el tablón.

4.97 En la figura se muestra un cortador de alambre. Determine la fuerza de corte sobre el alambre en *A* cuando se aplican las fuerzas de 75 lb al mango. (*Sugerencia:* las componentes horizontales de las fuerzas en los pasadores en *B* y *D* son cero debido a simetría.)

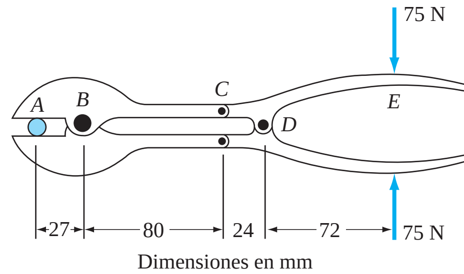


Fig. P4.97

4.98 Encuentre la tensión *T* en el cable cuando se aplica la fuerza de 180 N al pedal en *E*. Ignore la fricción y pesos de las partes.

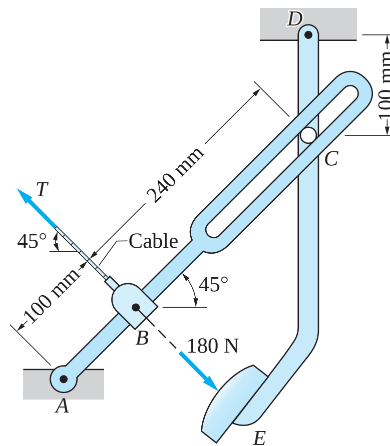


Fig. P4.98

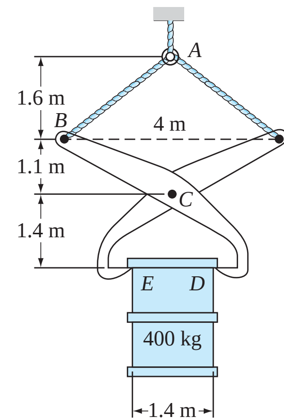


Fig. P4.99

4.99 Al barril de 400 kg lo sostienen unas tenazas de masa despreciable. Determine la magnitud de la fuerza de contacto entre el barril y las tenazas en *D*.

4.9 *Casos especiales: cuerpos de dos y tres fuerzas*

Hasta este punto, se ha enfatizado un enfoque general para la solución de problemas de equilibrio. Los casos especiales, con la excepción de reacciones de pasadores iguales y opuestos, se han evitado para no interferir con el estudio de los principios generales del análisis de equilibrio. Aquí se estudian dos casos especiales que pueden simplificar la solución de algunos problemas.

a. Cuerpos de dos fuerzas

El análisis de cuerpos mantenidos en equilibrio sólo por dos fuerzas se simplifica en gran medida por la aplicación del siguiente principio.

Principio de las dos fuerzas
Si un cuerpo se mantiene en equilibrio por dos fuerzas, éstas deben ser iguales en magnitud y dirigidas opuestamente a lo largo de la misma línea de acción.

Para demostrar el principio de las dos fuerzas, considere el cuerpo en la figura 4.9(a) que se mantiene en equilibrio por las dos fuerzas $\mathbf{P}_A$ y $\mathbf{P}_B$ (las fuerzas no tienen que ser coplanares). De la ecuación de equilibrio $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ se obtiene $\mathbf{P}_A = -\mathbf{P}_B$. Es decir, las fuerzas deben ser iguales en magnitud y de sentido opuesto; deben formar un par. Como la segunda ecuación de equilibrio $\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ (O es un punto arbitrario), requiere que la magnitud del par sea cero, $\mathbf{P}_A$ y $\mathbf{P}_B$ deben ser colineales. Se concluye que un cuerpo de dos fuerzas puede estar en equilibrio sólo si las dos fuerzas son como se muestra en la figura 4.9(b).

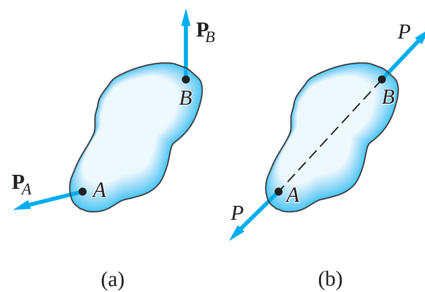


Fig. 4.9

Para ilustrar el uso del principio de las dos fuerzas, considere el marco que se muestra en la figura 4.10(a). Ignorando los pesos de los miembros, los diagramas de cuerpo libre para todo el marco y para cada una de sus partes son como se muestra en las figuras 4.10(b) a (d). Hay seis incógnitas (A_x, A_y, C_x, C_y, D_x y D_y) y seis ecua-

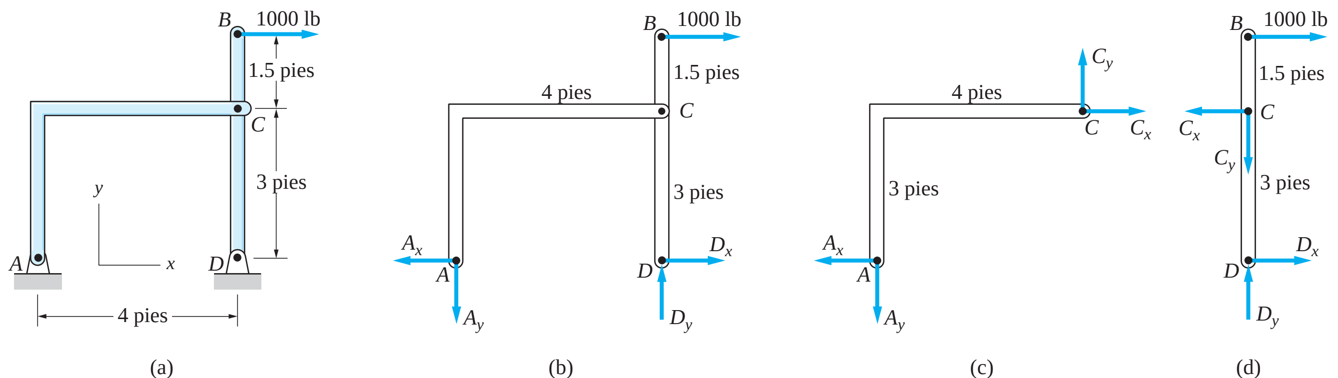


Fig. 4.10

ciones de equilibrio independientes (tres para cada uno de los dos miembros). Por tanto, el problema está estáticamente determinado.

Un análisis eficiente se obtiene si se reconoce que el miembro *AC* es un cuerpo de dos fuerzas; es decir, se mantiene en equilibrio por dos fuerzas: una actuando en *A* (A_x y A_y son sus componentes) y la otra actuando en *C* (C_x y C_y son sus componentes). Utilizando el principio de las dos fuerzas, se sabe, sin formular ninguna ecuación de equilibrio, que las fuerzas resultantes en *A* y *C* son iguales en magnitud y dirigidas opuestamente a lo largo de la línea que une *A* y *C*. La magnitud de estas fuerzas está identificada P_{AC} en la figura 4.11.

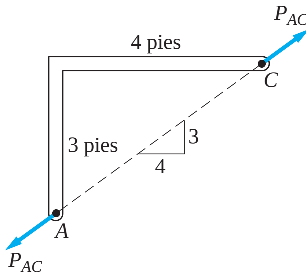


Fig. 4.11

Por tanto, si se reconoce que *AC* es un cuerpo de dos fuerzas, cualquiera de los diagramas de cuerpo libre en la figura 4.12 se puede utilizar para remplazar los diagramas de cuerpo libre en la figura 4.10. Como cada uno de los diagramas de cuerpo libre en la figura 4.12 contienen tres incógnitas (P_{AC}, D_x y D_y) y nos proporciona tres ecuaciones de equilibrio independientes, cualquiera se puede resolver por completo.

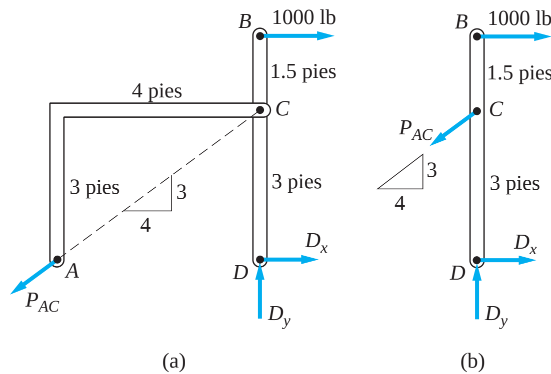


Fig. 4.12

No es absolutamente necesario identificar los cuerpos de dos fuerzas al resolver problemas de equilibrio. Sin embargo, aplicar el principio de las dos fuerzas siempre reduce el número de ecuaciones de equilibrio que se deben emplear (de seis a tres, en el ejemplo anterior). Esta simplificación es invariablemente conveniente, en particular en el análisis de problemas complicados.

b. *Cuerpos de tres fuerzas*

El análisis de un cuerpo mantenido en equilibrio por tres fuerzas se puede facilitar aplicando el principio siguiente.

Principio de las tres fuerzas
Tres fuerzas coplanares no paralelas que mantienen un cuerpo en equilibrio deben ser concurrentes.

La demostración de este principio se puede obtener con referencia a la figura 4.13, en donde se muestra un cuerpo sometido a las tres fuerzas coplanares no paralelas P_A, P_B y P_C. Como las fuerzas no son paralelas, dos de ellas, digamos, P_A y P_B, se deben intersecar en algún punto, como *O*. Para que el cuerpo esté en equilibrio, se

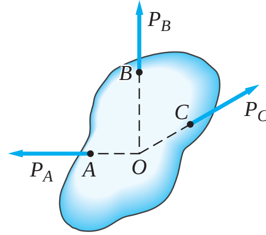


Fig. 4.13

debe cumplir $\Sigma M_O = 0$. Por tanto, la tercera fuerza, P_C, también debe pasar por O, como se muestra en la figura 4.13. Esto completa la demostración del principio.

Como ejemplo del uso del principio de las tres fuerzas, considere de nuevo el marco que se muestra en la figura 4.10. Ya se demostró cómo se simplifica el análisis reconociendo que el miembro *AC* es un cuerpo de dos fuerzas. Una simplificación adicional se puede hacer si se parte del hecho que el miembro *BCD* es un cuerpo de tres fuerzas.

El DCL del miembro *BCD*, repetido en la figura 4.14(a), muestra que el miembro se mantiene en equilibrio por tres fuerzas coplanares no paralelas. Al saber que las tres fuerzas deben ser concurrentes, se podría trazar el DCL de *BCD* como se muestra en la figura 4.14(b). Como la fuerza de 1000 lb y P_{AC} se intersecan en el punto *E*, la reacción en el pasador en *D* también debe pasar por ese punto. Por tanto, las dos componentes D_x y D_y se pueden remplazar por una fuerza R_D con pendiente 1 1/4.

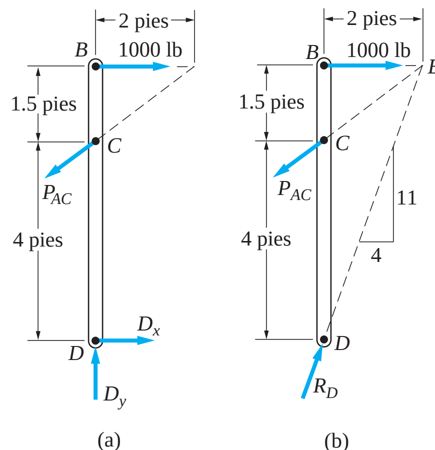
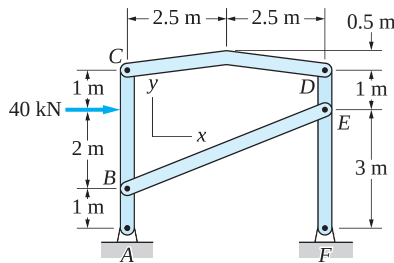


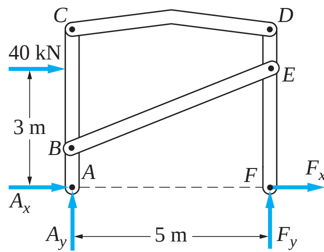
Fig. 4.14

Observe que el DCL en la figura 4.14(a) contiene tres incógnitas (P_{AC}, D_x y D_y) y que hay tres ecuaciones de equilibrio independientes (sistema de fuerzas coplanares general). El DCL en la figura 4.14(b) contiene dos incógnitas (P_{AC} y R_D) y hay dos ecuaciones de equilibrio independientes (sistema de fuerzas coplanares concurrentes). Al reconocer que *BCD* es un cuerpo de tres fuerzas, se reduce tanto el número de incógnitas como el número de ecuaciones de equilibrio independientes en uno.

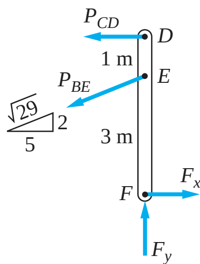
El uso del principio de las tres fuerzas puede ser útil en la solución de algunos problemas. Sin embargo, no siempre es benéfico, ya que se puede requerir de trigonometría complicada para ubicar el punto donde se intersecan las tres fuerzas.



(a)



(b)



(c)

Problema de ejemplo 4.16

Determine las reacciones en el pasador en A y todas las fuerzas que actúan sobre el miembro DEF del marco que se muestra en la figura (a). Ignore los pesos de los miembros y utilice el principio de las tres fuerzas siempre que sea posible.

Solución

Método de análisis

Se inicia considerando el DCL de todo el marco, figura (b). Como sólo hay tres ecuaciones de equilibrio independientes, no será posible encontrar las cuatro incógnitas (A_x, A_y, F_x y F_y) con sólo este DCL. Sin embargo, es posible calcular F_y con $\Sigma M_A = 0$, ya que es la única fuerza desconocida que tiene un momento respecto al punto A. De manera similar, $\Sigma M_F = 0$ dará A_y. Para calcular A_x y F_x, se debe considerar el DCL de al menos un miembro del marco.

Observe que los miembros CD y BE son cuerpos de dos fuerzas, ya que las únicas fuerzas actuando sobre ellos son las reacciones en el pasador en cada extremo (los pesos de los miembros se ignoran). Por tanto, el DCL del miembro DEF es como se muestra en la figura (c). Las fuerzas P_{CD} y P_{BE} actúan a lo largo de las líneas CD y BE, respectivamente, según su determinación con el principio de las dos fuerzas. Con F_y ya calculada antes, las tres incógnitas restantes en el DCL (P_{CD}, P_{BE} y F_x) entonces se pueden calcular. Regresando al DCL de todo el marco, figura (b), se puede encontrar A_x con $\Sigma F_x = 0$.

Detalles matemáticos

Del DCL del marco completo, figura (b),

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft^{+} \quad -40(3) + F_y(5) = 0$$

$$F_y = 24.0 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma M_F = 0 \quad \circlearrowleft^{+} \quad -40(3) + A_y(5) = 0$$

$$A_y = -24.0 \text{ kN} \qquad \text{Respuesta}$$

Del DCL de miembro DEF, figura (c),

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad F_y - \frac{2}{\sqrt{29}} P_{BE} = 0$$

$$P_{BE} = \frac{\sqrt{29}}{2}(24.0) = 64.6 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma M_F = 0 \quad \circlearrowleft^{+} \quad P_{CD}(4) + \frac{5}{\sqrt{29}} P_{BE}(3) = 0$$

$$P_{CD} = -\frac{15}{4\sqrt{29}}(64.6) = -45.0 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad -P_{CD} - \frac{5}{\sqrt{29}} P_{BE} + F_x = 0$$

$$F_x = \frac{5}{\sqrt{29}}(64.6) + (-45.0) = 15.0 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

Del DCL del marco completo, figura (b),

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad A_x + F_x + 40.0 = 0$$

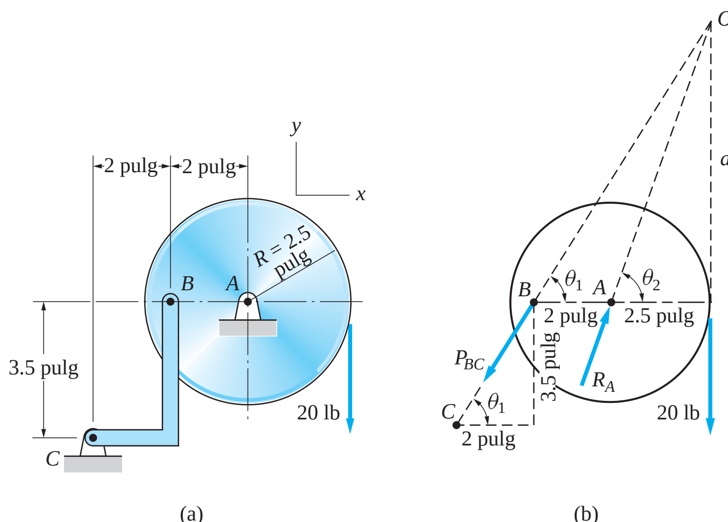
$$A_x = -15.0 - 40.0 = -55.0 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

Otros métodos de análisis

Por supuesto que hay otros métodos de análisis que se podrían utilizar. Por ejemplo, se podrían analizar los diagramas de cuerpo libre de los miembros *ABC* y *DEF*, sin considerar el DCL del marco completo.

Problema de ejemplo 4.17

Ignorando los pesos de los miembros en la figura (a), determine las fuerzas que actúan sobre el cilindro en *A* y *B*. Aplique los principios de las dos y de las tres fuerzas según sea apropiado. Utilice dos métodos de solución: 1. ecuaciones de equilibrio convencionales y 2. el triángulo de fuerzas.



Solución

Se inicia dibujando el DCL del cilindro, figura (b). Como la barra *BC* está sometida sólo a las reacciones en el pasador en sus extremos, es un cuerpo de dos fuerzas. Por tanto, la fuerza *B*, identificada P_{BC}, está dirigida a lo largo de la línea *BC*. El punto donde la línea de acción de P_{BC} interseca la fuerza de 20 lb está identificado *O*.

Después, se observa que el cilindro está sometido a tres fuerzas: P_{BC}, la fuerza aplicada de 20 lb y la reacción en el pasador R_A. Del principio de las tres fuerzas, la línea de acción de R_A también debe pasar por el punto *O*, como se muestra en la figura (b).

Los ángulos θ_1 y θ_2, que ubican las líneas de acción de P_{BC} y R_A, respectivamente, se pueden determinar por trigonometría. Con referencia a la figura (b), se obtiene

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3.5}{2}\right) = 60.3^\circ$$

$$a = (2 + 2.5)\tan\theta_1 = 4.5\tan 60.3^\circ = 7.89 \text{ pulg.}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{a}{2.5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7.89}{2.5}\right) = 72.4^\circ$$

Parte 1

El sistema de fuerzas que actúa sobre el cilindro es concurrente y coplanar, que produce dos ecuaciones de equilibrio independientes. Por tanto, con referencia al DCL en la figura (b), las incógnitas P_{BC} y R_A se pueden determinar como se muestra:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad -P_{BC}\cos\theta_1 + R_A\cos\theta_2 = 0$$

$$R_A = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}P_{BC} = \frac{\cos 60.3^\circ}{\cos 72.4^\circ}P_{BC}$$

$$R_A = 1.639P_{BC} \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad -P_{BC}\,\text{sen}\,\theta_1 + R_A\,\text{sen}\,\theta_2 - 20 = 0$$

$$-P_{BC}\,\text{sen}\,60.3^\circ + R_A\,\text{sen}\,72.4^\circ - 20 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (a) y (b) se obtiene

$R_A = 47.2$ lb y $P_{BC} = 28.8$ lb *Respuesta*

Parte 2

Como las tres fuerzas que actúan sobre el cilindro son concurrentes, las incógnitas P_{BC} y R_A se pueden determinar aplicando la ley de los senos al triángulo de fuerzas en la figura (c).

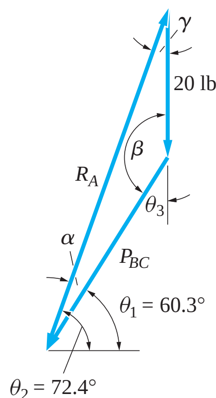
Los ángulos en la figura (c) se calculan como se muestra:

$$\alpha = 72.4^\circ - 60.3^\circ = 12.1^\circ$$

$$\theta_3 = 90^\circ - 60.3^\circ = 29.7^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \theta_3 = 180^\circ - 29.7^\circ = 150.3^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (12.1^\circ + 150.3^\circ) = 17.6^\circ$$



(c)

Aplicando la ley de los senos, se obtiene

$$\frac{20}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{R_A}{\text{sen}\,\beta} = \frac{P_{BC}}{\text{sen}\,\gamma}$$

Sustituyendo los valores para α, β y γ en esta ecuación se obtienen los mismos valores para P_{BC} y R_A que los obtenidos en la parte 1.

El triángulo de fuerzas que resulta de la aplicación del principio de las tres fuerzas, figura (c), también se puede resolver de manera gráfica. Si el triángulo se traza a una escala adecuada, las fuerzas y los ángulos desconocidos se pueden medir directamente.

Problemas

Los problemas 4.100 a 4.120 contienen cada uno al menos un miembro de dos fuerzas. Resuélvalos utilizando el principio de las dos fuerzas, donde sea apropiado. Si el peso de un cuerpo no se indica, se puede ignorar.

4.100 Calcule las magnitudes de todas las fuerzas que actúan sobre el miembro *CDE* del marco.

4.101 Calcule todas las fuerzas que actúan sobre el miembro *CDB*.

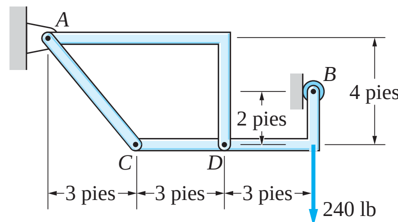


Fig. P4.101

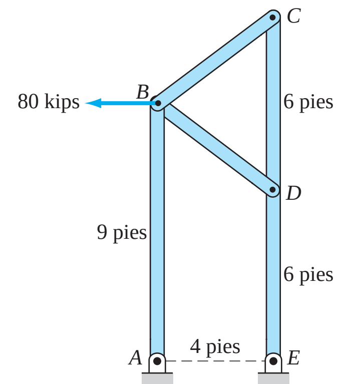


Fig. P4.100

4.102 El robot automático de perforación debe mantener un empuje de 38 lb en la punta de la broca. Determine el par C_A que debe desarrollar el motor eléctrico para resistir este empuje.

4.103 Determine la fuerza de sujeción (vertical) aplicada por las tenazas en *E*.

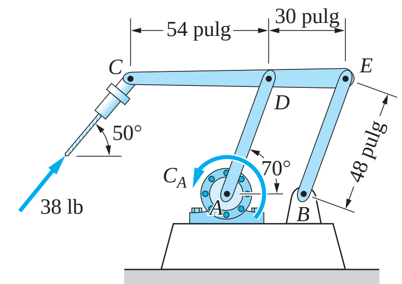


Fig. P4.102

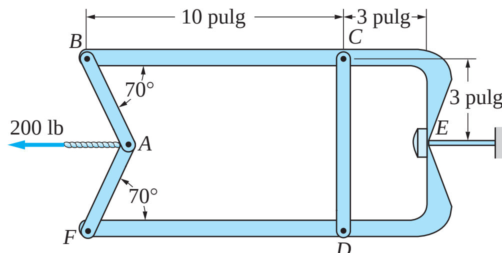


Fig. P4.103

4.104 Los dos discos están conectados por la barra *AB* y la espiga lisa en la ranura en *D*. Calcule la magnitud de la reacción en el pasador en *A*.

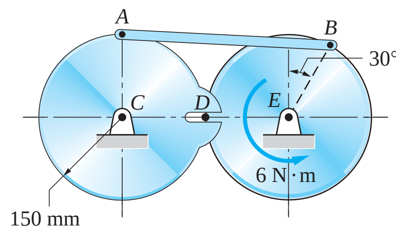


Fig. P4.104

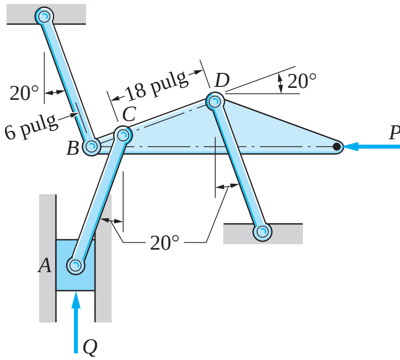


Fig. P4.105

4.105 Ignorando la fricción, determine la relación entre P y Q, suponiendo que el mecanismo está en equilibrio en la posición indicada.

4.106 Calcule las magnitudes de las reacciones en los pasadores que actúan sobre la grúa en A y C debidas a la carga de 5000 lb.

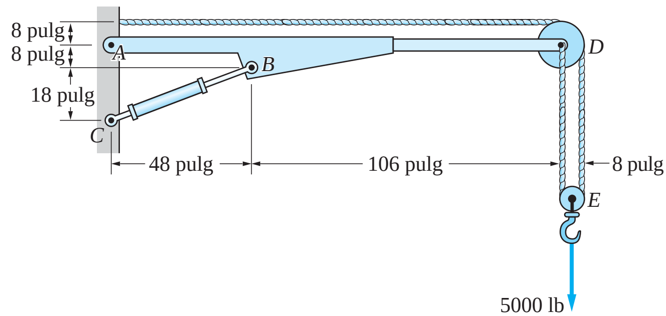


Fig. P4.106

4.107 La carga en el cucharón de un cargador de dirección deslizante es 600 lb con su centro de gravedad en G. Para la posición que se muestra, determine las fuerzas en los cilindros hidráulicos AC y DE.

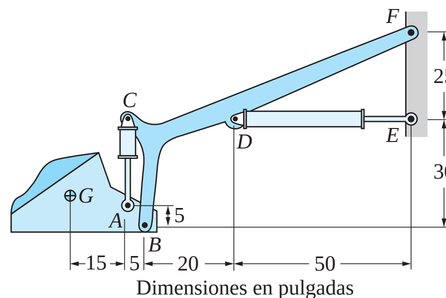


Fig. P4.107

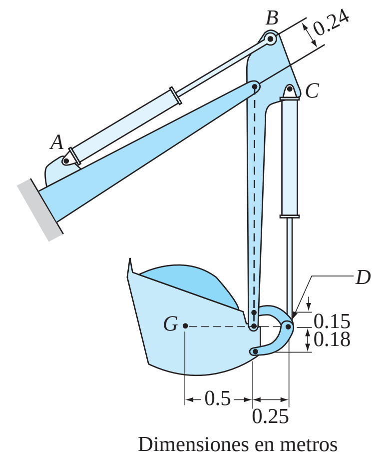


Fig. P4.108

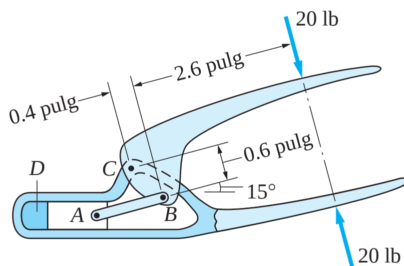


Fig. P4.109

4.108 La carga en el cucharón de una excavadora pesa 1.5 MN y su centro de gravedad está en G. Para la posición indicada, determine las fuerzas en los cilindros hidráulicos AB y CD.

4.109 La herramienta mostrada se utiliza para engarzar terminales en cables eléctricos. El cable y la terminal se insertan en el espacio D y se oprimen entre sí por el movimiento de la corredera A. Calcule la magnitud de la fuerza de engarce.

4.110 Una fuerza de 50 N se aplica al mango de la cizalla. Determine la fuerza ejercida por la hoja de corte *CB* sobre la pieza de trabajo *E*.

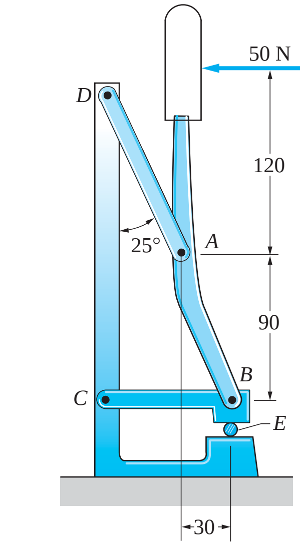


Fig. P4.110

4.111 La hoja de empuje del tractor está unida rígidamente a una conexión articulada que consiste en el brazo *AB*, que está controlada por el cilindro hidráulico *BC*. Hay una conexión articulada idéntica en el otro lado de la hoja de empuje. Determine las magnitudes de las reacciones en los pasadores en *A*, *B* y *C*.

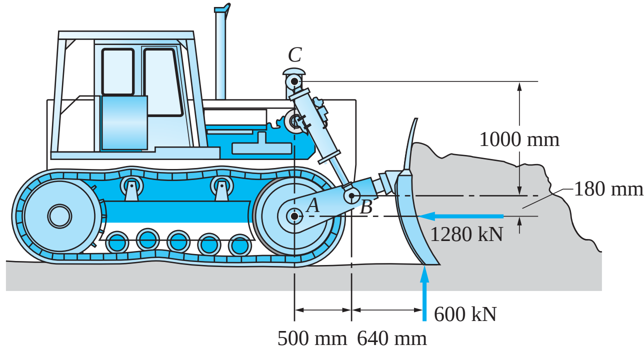


Fig. P4.111

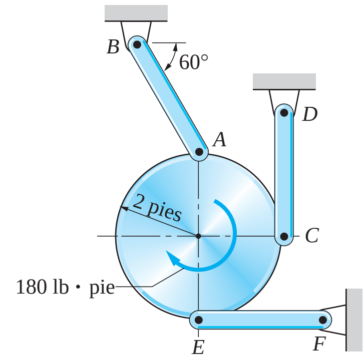


Fig. P4.112

4.112 Encuentre las magnitudes de las reacciones en los pasadores en *A*, *C* y *E* causadas por el par de 180 lb · pie.

4.113 Las puntas en el extremo del expansor de anillos de retención se ajustan en agujeros en un anillo de retención. Cuando se aprieta el mango, los pasadores abren el anillo de retención, permitiendo su inserción o remoción. Determine la fuerza de expansión *P* causada por las fuerzas de 8 lb aplicadas al mango.

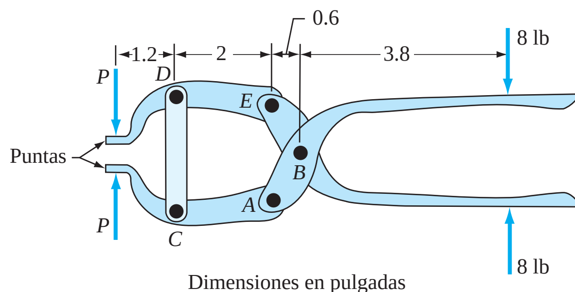


Fig. P4.113

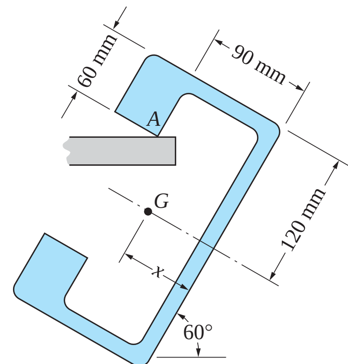


Fig. P4.114

4.114 Cuando el miembro en forma de C se suspende del borde de una mesa sin fricción, adopta la posición indicada. Utilice un método gráfico para encontrar la distancia *x* que ubica el centro de gravedad *G*.

4.115 El centro de gravedad de la rueda excéntrica está en el punto *G*. Determine el ángulo máximo θ de la pendiente para el cual la rueda estará en reposo sobre una superficie inclinada rugosa.

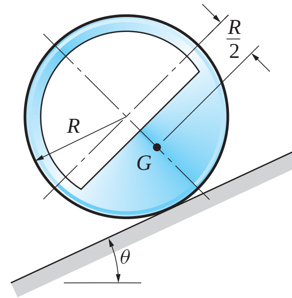


Fig. P4.115

4.116 Para los alicates que se muestran, determine la relación entre las magnitudes de las fuerzas aplicadas *P* y las fuerzas de sujeción en *E*.

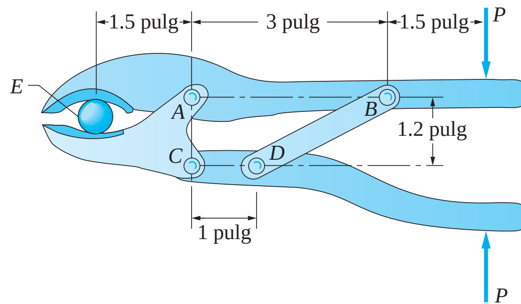


Fig. P4.116

4.117 El dispositivo ilustrado es un mecanismo para la prevención de sobrecargas. Cuando la fuerza que actúa sobre la espiga lisa en *D* alcanza 1.0 kN, se cortará la espiga, permitiendo que las quijadas en *C* se abran y así liberen el perno de ojo. Determine el valor máximo de la tensión *P* que se puede aplicar sin ocasionar que se libere el perno de ojo. Ignore la fricción.

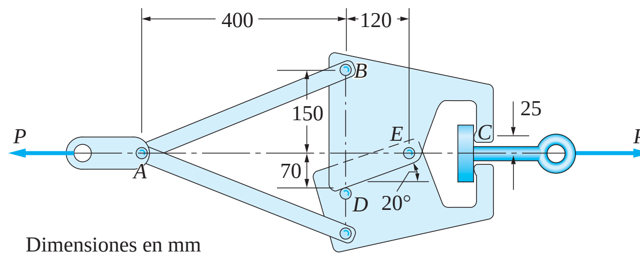


Fig. P4.117

4.118 En la figura se representa la cabeza de un podador de árboles montado sobre un poste. Determine la fuerza aplicada por la hoja de corte *ED* sobre la rama del árbol cuando la cuerda vertical unida en *A* se jala con una fuerza *P*.

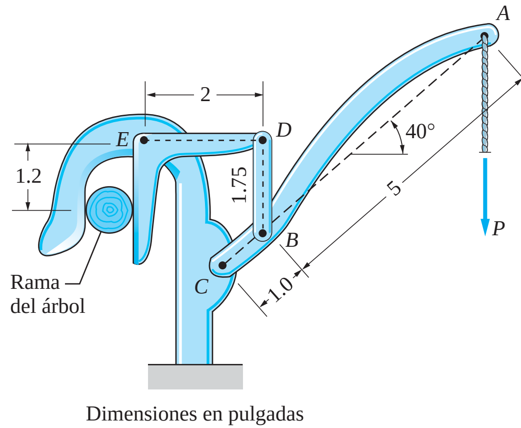


Fig. P4.118

***4.119** La articulación mostrada es del tipo que se utiliza en las puertas de algunos automóviles. Si un resorte de torsión en F aplica el par constante $C_0 = 20$ lb · pie al miembro ABF, calcule la fuerza P necesaria para mantener abierta la puerta en la posición que se muestra.

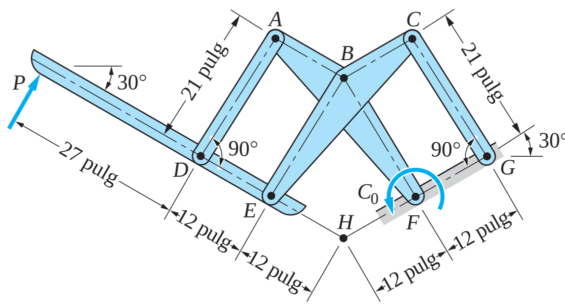


Fig. P4.119

4.120 Determine la fuerza en el cilindro hidráulico EF que mantendrá el mecanismo de paralelogramo en la posición indicada.

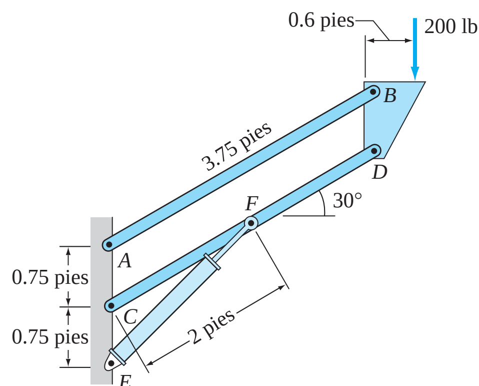


Fig. P4.120

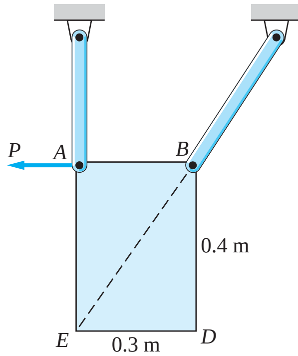


Fig. P4.121

Resuelva los problemas 4.121 a 4.130, utilizando los principios de dos y tres fuerzas donde sea apropiado.

4.121 Determine la fuerza horizontal *P* que mantenga la placa rectangular uniforme de 15 kg en la posición indicada.

4.122 Determine las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre la ménsula en *B* y *C*.

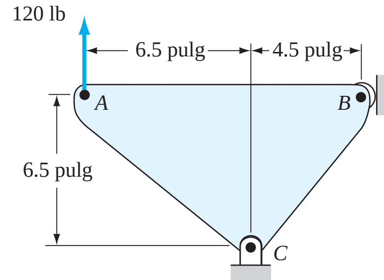


Fig. P4.122

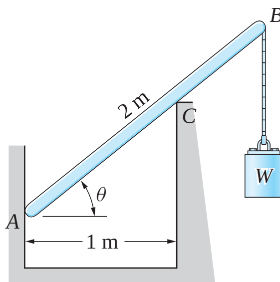


Fig. P4.123

4.123 Determine el ángulo θ para el cual la barra *AB* está en equilibrio. Ignore la fricción.

4.124 El automóvil, con centro de gravedad en *G*, está estacionado sobre una pendiente de 18° sin aplicar sus frenos. Determine la altura *h* de la guarnición mínima que evitará que el automóvil ruede por la pendiente.

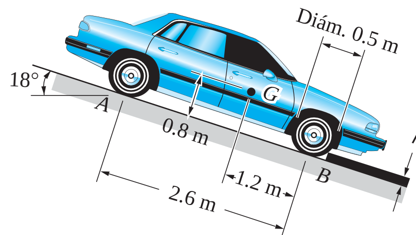


Fig. P4.124

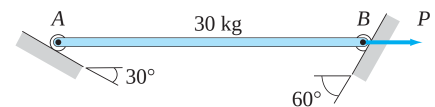


Fig. P4.125

4.125 Determine la fuerza horizontal *P* que mantenga la barra homogénea *AB* en reposo en la posición indicada.

4.126 El centro de gravedad de la barra no homogénea *AB* está ubicado en *G*. Encuentre el ángulo θ para el cual la barra estará en equilibrio si se puede deslizar sobre la superficie cilíndrica sin fricción.

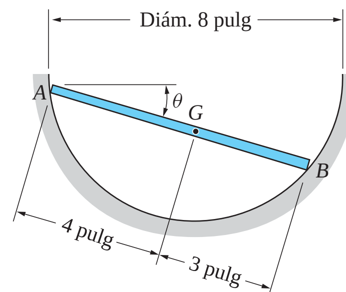


Fig. P4.126

4.127 Al estar suspendido de dos cables, el cohete adopta la posición de equilibrio indicada. Determine la distancia *x* que ubica *G*, el centro de gravedad del cohete.

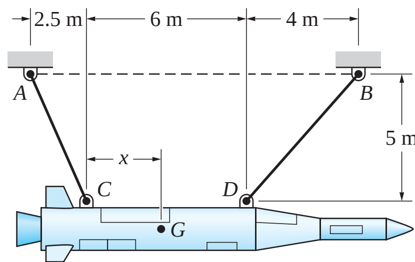


Fig. P4.127

4.128 La bomba de aceite se opera oprimiendo la manija en *D*, lo que ocasiona que el émbolo suba y expulse el aceite. Determine la distancia *d* de la conexión *BC* tal que la reacción en el pasador horizontal en *A* sea cero.

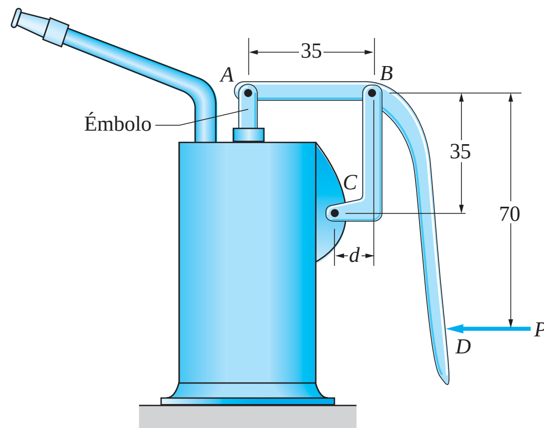


Fig. P4.128

4.129 La barra uniforme *AB* de 320 lb se mantiene en la posición indicada por el cable *AC*. Calcule la tensión en el cable.

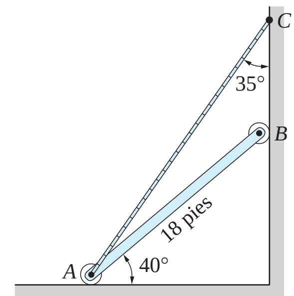


Fig. P4.129

4.130 Encuentre la fuerza *P* necesaria para: (a) empujar y (b) jalar el rodillo homogéneo de 80 lb sobre la guarnición de 3 pulg.

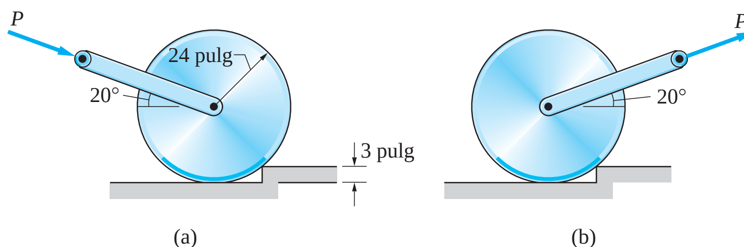


Fig. P4.130

PARTE C: *Análisis de armaduras planas*

4.10 *Descripción de una armadura*

Una *armadura* es una estructura compuesta de barras rectas y esbeltas que están unidas entre sí para formar un patrón triangular. Las armaduras suelen diseñarse para transmitir fuerzas sobre claros relativamente largos; ejemplos comunes de éstas son las armaduras de puentes y las de techos. En la figura 4.15(a) se muestra una armadura común de un puente.

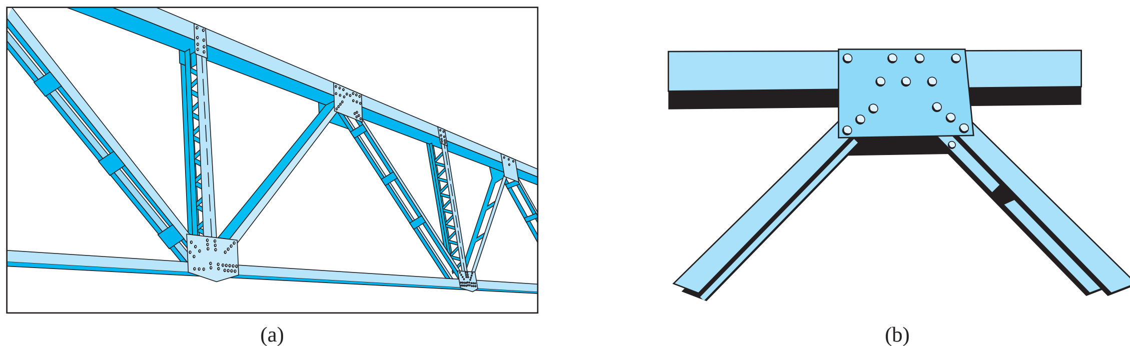


Fig. 4.15

El análisis de las armaduras se basa en las hipótesis siguientes:

1. **Los pesos de los miembros son despreciables.** Una armadura se puede clasificar como una estructura de peso ligero, lo que significa que los pesos de sus miembros por lo general son mucho menores que las cargas para las que se diseña que soporte.
2. **Todos los nodos están articulados.** En la práctica, los miembros de cada nodo suelen remacharse o soldarse a una placa, denominada *placa de unión*, como se muestra en la figura 4.15(b).

   Sin embargo, si los miembros en un nodo están alineados de manera que sus ejes centroidales (ejes que pasan por los centroides de las áreas transversales de los miembros) se intersecan en un punto común, métodos avanzados de análisis indican que se justifica la hipótesis de una conexión articulada.
3. **Las fuerzas aplicadas actúan en los nodos.** Como los miembros de una armadura son esbeltos, pueden fallar por flexión cuando se someten a cargas aplicadas en ubicaciones diferentes a los nodos. Por tanto, las armaduras se diseñan de manera que las principales cargas aplicadas actúen en los nodos.

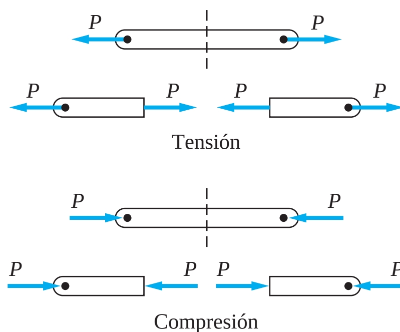


Fig. 4.16

Aunque estas hipótesis en apariencia pueden simplificar demasiado una situación real, conducen a resultados que son adecuados en la mayoría de las aplicaciones.

Considerando las hipótesis, el diagrama de cuerpo libre para cualquier miembro de una armadura contendrá sólo dos fuerzas: las fuerzas ejercidas sobre el miembro por el pasador en cada extremo. Por tanto, *cada miembro de una armadura es un cuerpo de dos fuerzas*.

Al tratar con la fuerza interna en un cuerpo de dos fuerzas, los ingenieros suelen distinguir entre *tensión* y *compresión*. En la figura 4.16 se muestran las fuerzas externas e internas en tensión y compresión. Las fuerzas de tensión alargan (estiran)

el miembro, en tanto que las fuerzas de compresión lo comprimen (acortan). Como las fuerzas actúan a lo largo del eje longitudinal del miembro, con frecuencia se denominan *fuerzas axiales*. Observe que las fuerzas internas siempre ocurren en pares iguales y opuestos sobre las dos caras de una sección transversal interna.

Las dos técnicas comunes para calcular las fuerzas internas en una armadura son el método de los nodos y el de las secciones, que se analizan en los apartados siguientes.

4.11 Método de los nodos

Al aplicar el *método de los nodos* para calcular las fuerzas en los miembros de una armadura, se aplican las ecuaciones de equilibrio a los nodos individuales (o pasadores) de la armadura. Dado que los miembros son cuerpos de dos fuerzas, las fuerzas en el DCL de un nodo son concurrentes. En consecuencia, para cada nodo se dispone de dos ecuaciones de equilibrio independientes.

Para ilustrar este método de análisis, considere la armadura que se muestra en la figura 4.17(a). El soporte consiste en un pasador en A y un rodillo en E (uno de los soportes suele diseñarse equivalente a un rodillo, a fin de permitir la elongación y contracción de la armadura por los cambios de temperatura).

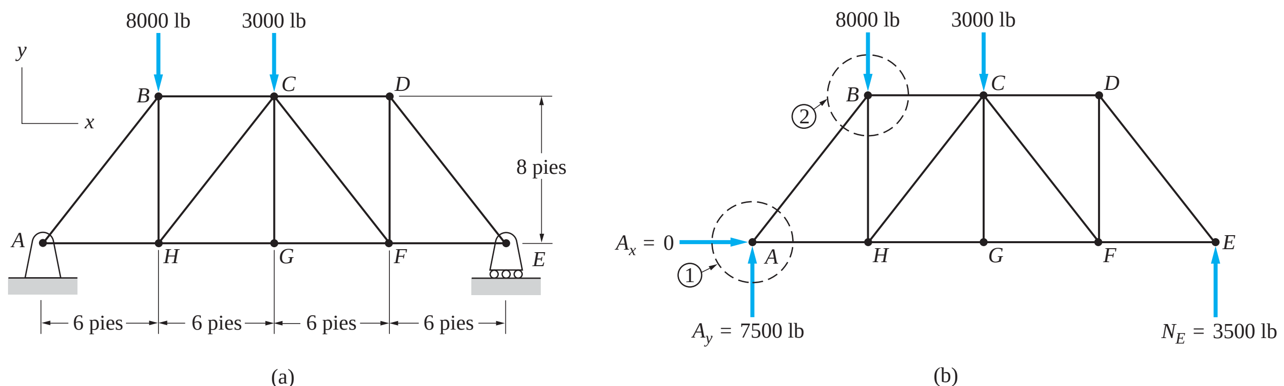


Fig. 4.17

a. Reacciones en los soportes

En general, es buena idea iniciar el análisis determinando las reacciones en los soportes empleando el DCL de la armadura completa. El DCL de la armadura en la figura 14.17(b) contiene tres reacciones desconocidas: A_x, A_y y N_E, que se pueden determinar a partir de las tres ecuaciones de equilibrio disponibles. Los resultados del cálculo se muestran en la figura 4.17(b).

Observe que A_x, la reacción horizontal en A, es cero. Este resultado indica que la armadura estaría en equilibrio ante la carga dada incluso si el pasador en A se remplazara por un rodillo. Sin embargo, entonces se tendría una *restricción impropia*, debido a que la fuerza horizontal incidental ocasionaría que la armadura se moviera horizontalmente. Por tanto, se necesita un soporte de pasador en A (o B) para restringir de manera adecuada la armadura.

En ocasiones el número de reacciones desconocidas sobre el DCL de la armadura completa es mayor que tres. En este caso, todas las reacciones no se pueden encontrar desde el inicio.

b. Análisis de equilibrio de los nodos

Ahora se determinan las fuerzas en los miembros individuales de la armadura en la figura 4.17. Como la fuerza en un miembro es interna a la armadura, aparecerá en un DCL sólo si el DCL "corta" el miembro, separándolo así del resto de la armadura. Por ejemplo, para determinar la fuerza en los miembros *AB* y *AH*, se puede dibujar el DCL del nodo *A*; es decir, la parte de la armadura encerrada por la línea discontinua 1 en la figura 4.17(b). Este DCL, mostrado en la figura 4.18(a), contiene las reacciones externas A_x y A_y y las fuerzas en los miembros P_{AB} y P_{AH} (los subíndices identifican el miembro). Observe que se supuso que las fuerzas en los miembros son de tensión. Si la solución produce un valor negativo para una fuerza, la fuerza es de compresión. Al suponer que los miembros están en tensión, se utiliza una convención establecida en la que los resultados positivos indican tensión y los negativos compresión.

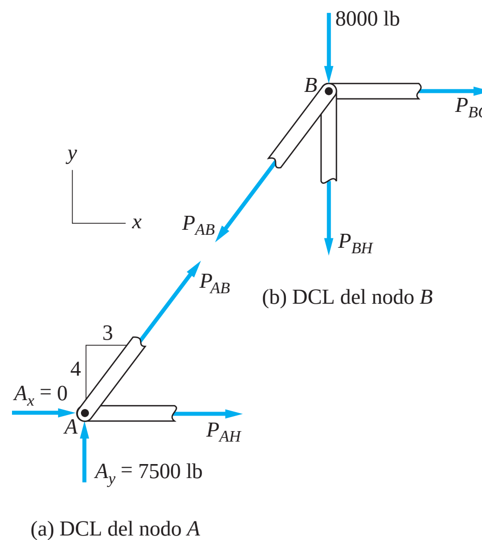


Fig. 4.18

Al haber calculado con anterioridad A_x y A_y, las fuerzas P_{AB} y P_{AH} son las únicas incógnitas en el DCL para el nodo *A*. Por tanto, se pueden determinar a partir de las dos ecuaciones de equilibrio independientes para el nodo, como se indica a continuación.

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 7500 + \frac{4}{5}P_{AB} = 0$$

$$P_{AB} = -\frac{5}{4}(7500) = -9375 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad \frac{3}{5}P_{AB} + P_{AH} + A_x = 0$$

$$\frac{3}{5}(-9375) + P_{AH} + 0 = 0$$

$$P_{AH} = -\frac{3}{5}(-9375) = 5625 \text{ lb}$$

El valor negativo de P_{AB} indica que la fuerza en el miembro *AB* es de compresión; el valor positivo de P_{AH} indica que la fuerza en el miembro *AH* es de tensión.

Para calcular las fuerzas en los miembros *BC* y *BH*, se traza el DCL del nodo *B*: la parte de la armadura encerrada por la línea discontinua 2 en la figura 4.17(b). Este DCL se muestra en la figura 4.18(b). Observe que la fuerza P_{AB} es igual y opuesta a la fuerza correspondiente en la figura 4.18(a) y que de nuevo se supuso que P_{BC} y P_{BH} están en tensión. Sabiendo que $P_{AB} = -9375$ lb, P_{BC} y P_{BH} son las únicas incógnitas en este DCL. Las ecuaciones de equilibrio del nodo dan

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad P_{BC} - \frac{3}{5}P_{AB} = 0$$

$$P_{BC} = \frac{3}{5}P_{AB} = \frac{3}{5}(-9375) = -5625 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad -\frac{4}{5}P_{AB} - P_{BH} - 8000 = 0$$

$$P_{BH} = -8000 - \frac{4}{5}P_{AB}$$

$$= -8000 - \frac{4}{5}(-9375) = -500 \text{ lb}$$

Los valores negativos indican que tanto P_{BC} como P_{BH} son de compresión.

Se podría continuar el procedimiento, moviéndonos de un nodo a otro, hasta determinar las fuerzas en todos los nodos. A fin de mostrar que esto es posible, se cuenta el número de incógnitas y el número de ecuaciones de equilibrio independientes:

13 fuerzas de miembro + 3 reacciones de soporte = 16 incógnitas

8 nodos, cada uno da 2 ecuaciones de equilibrio = 16 ecuaciones

¡Como el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, la armadura está estáticamente determinada! Las tres ecuaciones de equilibrio de la armadura completa no se contaron, ya que no son independientes de las ecuaciones de equilibrio de los nodos (recuerde que una estructura está en equilibrio si cada una de sus componentes está en equilibrio).

c. *Análisis de equilibrio de pasadores*

En ejemplo anterior, el DCL de un nodo contenía un parte finita de la armadura rodeando al nodo. Esto requirió "cortar" los miembros unidos al nodo, de manera que las fuerzas internas en los miembros aparecieran en el DCL. Un enfoque alternativo, preferido por muchos ingenieros, es trazar los diagramas de cuerpo libre de los "pasadores", como se ilustra en la figura 4.19. En este caso, las fuerzas internas en los miembros aparecen como fuerzas que actúan sobre el pasador. Para todos los fines prácticos, los diagramas de cuerpo libre en las figuras 4.18 y 4.19 son idénticos. El DCL de un pasador es más fácil de dibujar, pero el DCL de un nodo es un poco más ilustrativo, en particular cuando se trata de determinar si las fuerzas en el miembro son de tensión o compresión.

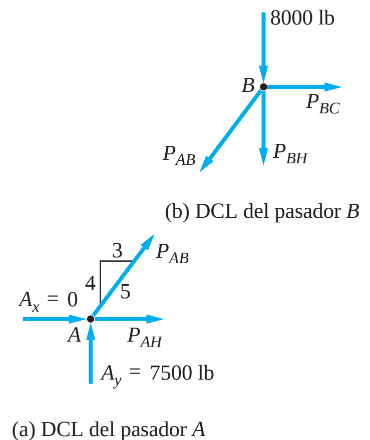


Fig. 4.19

d. *Miembros de fuerza cero*

Existe un caso especial que ocurre con suficiente frecuencia para garantizar una atención especial. En la figura 4.20(a) se muestra el DCL para el nodo *G* de la armadura en la figura 4.17. Como no se aplican cargas externas en *G*, las ecuaciones de equilibrio del nodo $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ producen $P_{GH} = P_{GF}$ y $P_{GC} = 0$. Debido a que el miembro *GC* no soporta una fuerza, se denomina *miembro de fuerza cero*. Es fácil comprobar que los resultados no cambian si el miembro *GC* está inclinado respecto a *GH* y *GF*, como se muestra en la figura 4.20(b). Al analizar una armadura, con frecuencia es útil iniciar identificando los miembros de fuerza cero, con lo que se simplifica la solución.

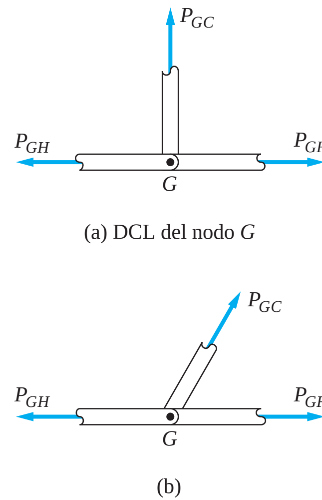


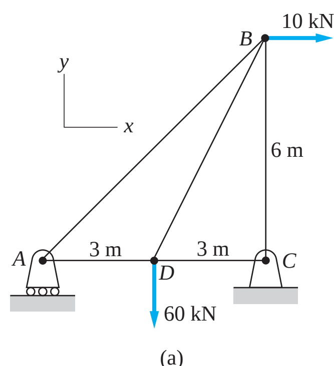
Fig. 4.20

Quizá se pregunte por qué un miembro, como el *GC*, se incluye en la armadura si no soporta una fuerza. La explicación es la misma que la dada para proporcionar un soporte de pasador, en vez de un rodillo, en *A* para la armadura en la figura 4.17(a): se necesita para asegurar la restricción apropiada del nodo *G*. Si el miembro *GC* se removiera, la armadura en teoría permanecería en equilibrio para las cargas mostradas.* Sin embargo, una carga vertical mínima aplicada al nodo en *G* ocasionaría que la armadura sea deformada excesivamente o incluso que colapsará. Además, es poco probable que las cargas mostradas en la figura 4.17(a) serán las únicas fuerzas que actúen sobre la armadura durante su vida útil. Si una carga vertical se aplica en el nodo *G* en un tiempo futuro, el miembro *GC* será esencial para el equilibrio.

*Las palabras *en teoría* se deben interpretar como “de acuerdo con las suposiciones”. En nuestro modelo matemático para una armadura se supone que los pesos de los miembros son despreciables. En la práctica, la fuerza en un miembro denominado de fuerza cero no es exactamente cero, sino que se determina por los pesos de los miembros.

Problema de ejemplo **4.18**

Utilizando el método de los nodos, determine la fuerza en cada uno de los miembros de la armadura que se muestra en la figura (a). Indique si los miembros están en tensión o compresión.



(a)

Solución

El DCL de la armadura completa se muestra en la figura (b). Las tres incógnitas (N_A, C_x y C_y) se pueden calcular con las tres ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma M_C = 0 \quad \circlearrowleft + \quad -N_A(6) + 60(3) - 10(6) = 0$$

$$N_A = 20 \text{ kN}$$

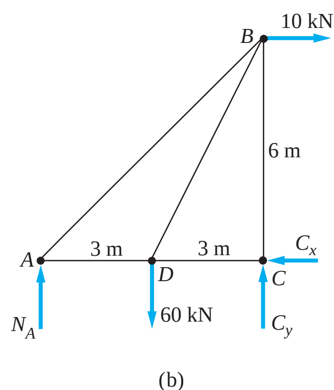
$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad N_A - 60 + C_y = 0$$

$$C_y = 60 - N_A = 60 - 20 = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad 10 - C_x = 0$$

$$C_x = 10 \text{ kN}$$

Ahora se procede al cálculo de las fuerzas internas analizando los diagramas de cuerpo libre de varios pasadores.



(b)

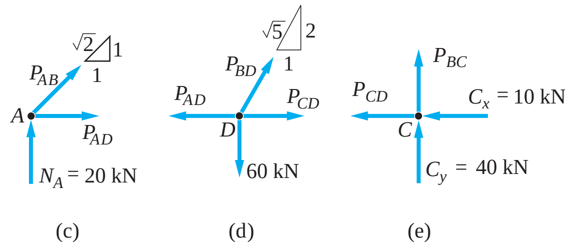
Método de análisis

En el análisis siguiente, las reacciones externas se tratan como conocidas, debido a que ya se calcularon. Es conveniente suponer que la fuerza en cada miembro es de tensión. Por tanto, valores positivos de las fuerzas indican tensión y negativos, compresión.

El DCL del pasador *A*, ilustrado en la figura (c), contiene dos incógnitas: P_{AB} y P_{AD}. Estas dos fuerzas se pueden calcular de inmediato, ya que para este DCL se dispone de dos ecuaciones de equilibrio independientes.

El DCL del pasador *D*, en la figura (d), contiene las fuerzas P_{AD}, P_{BD} y P_{CD}. Como el P_{AD} ya se determinó, de nuevo se tienen dos ecuaciones que se pueden resolver para precisar las dos incógnitas.

En la figura (e) se muestra el DCL del pasador *C*. Como el P_{CD} ya se determinó, la única incógnita que queda es P_{BC}, que se puede calcular con facilidad.



Detalles matemáticos

Del DCL del pasador *A*, figura (c),

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} P_{AB} + N_A = 0$$

$$P_{AB} = -\sqrt{2}(20) = -28.3 \text{ kN}$$

$$P_{AB} = 28.3 \text{ kN} \quad \text{(compresión)}$$ ***Respuesta***

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} P_{AB} + P_{AD} = 0$$

$$P_{AD} = -\frac{1}{\sqrt{2}} P_{AB} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-28.3)$$

$$= 20.0 \text{ kN} \quad \text{(tensión)}$$ ***Respuesta***

Del DCL del pasador *D*, figura (d),

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad \frac{2}{\sqrt{5}} P_{BD} - 60 = 0$$

$$P_{BD} = \frac{\sqrt{5}}{2}(60) = 67.1 \text{ kN} \quad \text{(tensión)}$$ ***Respuesta***

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad -P_{AD} + \frac{1}{\sqrt{5}}P_{BD} + P_{CD} = 0$$

$$P_{CD} = P_{AD} - \frac{1}{\sqrt{5}}P_{BD}$$

$$P_{CD} = 20.0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(67.1) = -10.0 \text{ kN}$$

$$P_{CD} = 10.0 \text{ kN} \quad \text{(compresión)}$$ *Respuesta*

Del DCL del pasador C, figura (e),

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad C_y + P_{BC} = 0$$

$$P_{BC} = -C_y = -40 \text{ kN}$$

$$P_{BC} = 40 \text{ kN} \quad \text{(compresión)}$$ *Respuesta*

Observe que la ecuación $\Sigma F_x = 0$ da $P_{CD} = -10.0$ kN, un valor que se determinó antes. Por tanto, esta ecuación no es independiente de las que se utilizan antes. La razón de la dependencia es que las reacciones externas se determinaron analizando el DCL de la armadura completa. Sin embargo, las ecuaciones para los pasadores y para la armadura completa no son independientes unas de otras.

Otros métodos de análisis

En el análisis anterior, los pasadores se consideraron en el orden siguiente: A, D y C (el DCL del pasador B no se utilizó). Otra secuencia que se podría utilizar es

1. DCL del pasador A: se calcula P_{AB} y P_{BD} (igual que antes).
2. DCL del pasador B: con P_{AB} ya calculada, se estiman P_{BD} y P_{BC}.
3. DCL del pasador C: se calcula P_{CD}.

En este análisis, el DCL del pasador D no se utiliza.

Un procedimiento más sería calcular las tres reacciones externas y las fuerzas en los cinco miembros (un total de ocho incógnitas) empleando las ecuaciones de equilibrio para todos los pasadores (un total de ocho ecuaciones, dos para cada pasador).

Problemas

4.131 a 4.140 Utilizando el método de los nodos, calcule la fuerza en cada miembro de las armaduras que se muestran. Indique si cada uno está en tensión o compresión.

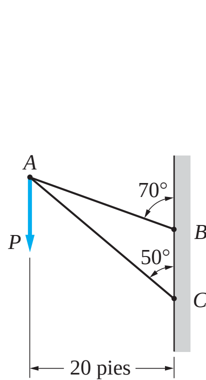


Fig. P4.131

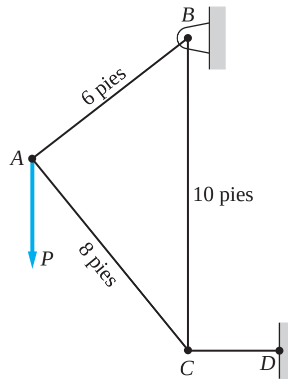


Fig. P4.132

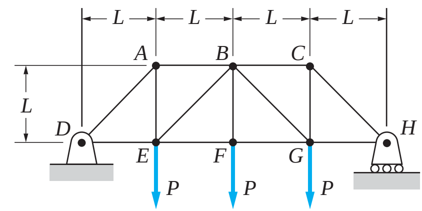


Fig. P4.133

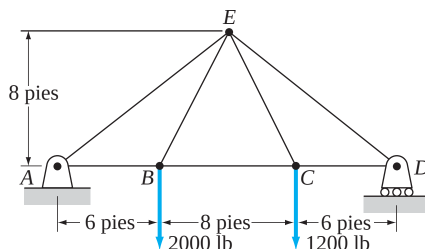


Fig. P4.134

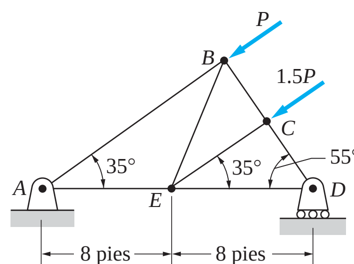


Fig. P4.135

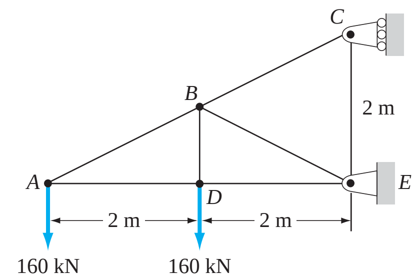


Fig. P4.136

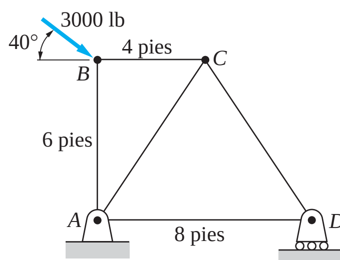


Fig. P4.137

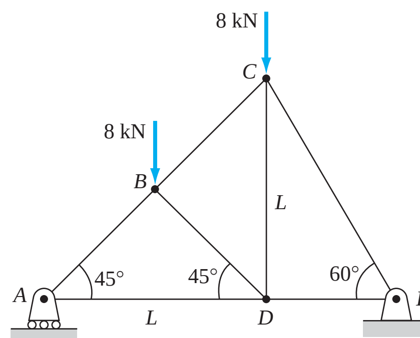


Fig. P4.138

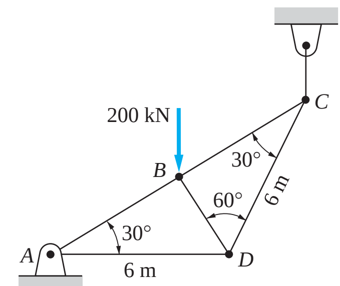


Fig. P4.139

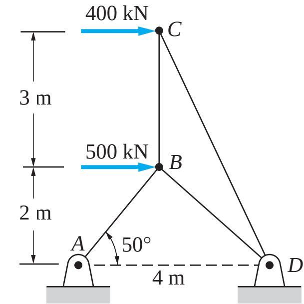


Fig. P4.140

4.141 Identifique todos los miembros de fuerza cero en las cuatro armaduras mostradas.

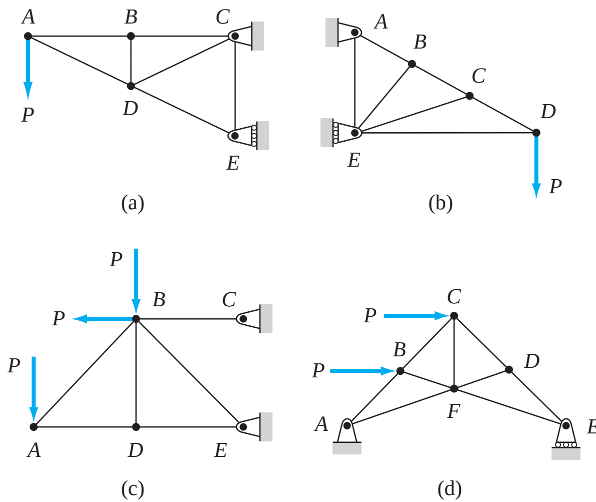


Fig. P4.141

4.142 El andador *ABC* del puente peatonal se fortalece agregando el cable *ADC* y el poste corto de longitud *L*. Si la tensión en el cable no debe exceder 500 lb, ¿cuál es el valor mínimo de *L* para el cual la persona de 185 lb puede ser soportada en *B*?

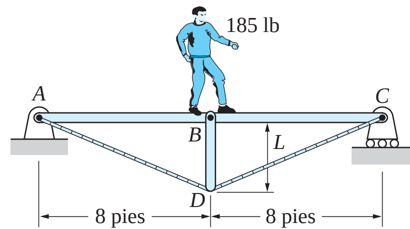


Fig. P4.142

4.143 Encuentre la fuerza en el miembro *EF*.

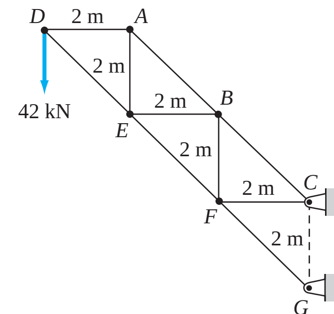


Fig. P4.143

4.144 Encuentre las fuerzas en los miembros *HC* y *HG* en términos de *P*.

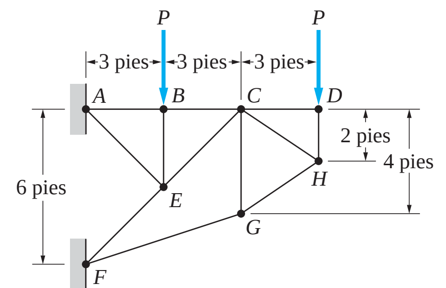


Fig. P4.144

4.145 Determine la reacción en *E* y la fuerza en cada miembro de la mitad derecha de la armadura.

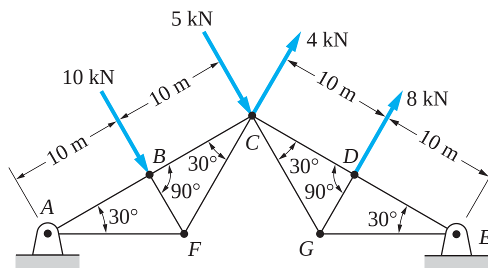


Fig. P4.145

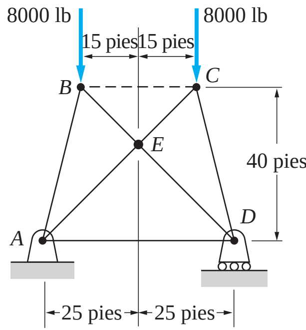


Fig. P4.146

4.146 Determine la fuerza en el miembro *AD* de la armadura.

4.147 Determine la fuerza en el miembro *BE* de la armadura.

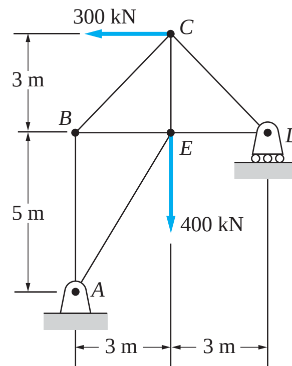


Fig. P4.147

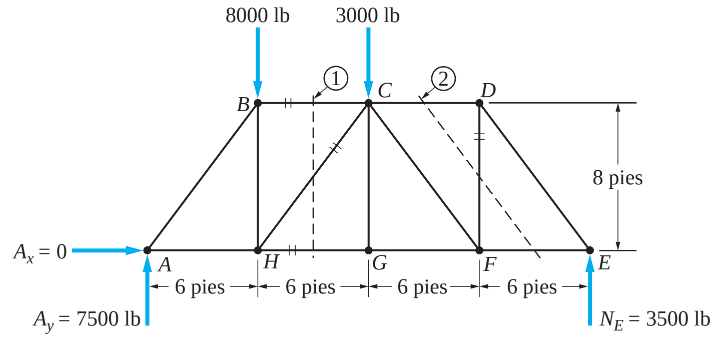
4.12 *Método de las secciones*

El análisis de armaduras mediante el método de los nodos se apoya en los diagramas de cuerpo libre de los nodos individuales. Analizar el diagrama de cuerpo libre de una parte de la armadura que contiene dos o más nodos se denomina *método de las secciones*. El DCL de un solo nodo resulta en un sistema de fuerzas coplanares concurrentes (dos ecuaciones de equilibrio independientes). Al aplicar el método de las secciones, el sistema de fuerzas por lo general será coplanar no concurrente (tres ecuaciones de equilibrio independientes).

En el método de las secciones, se aísla una parte de la armadura en un DCL de manera que exponga las fuerzas que se deben calcular. Si el DCL para la parte aislada contiene tres incógnitas, todas ellas suelen calcularse a partir de las tres ecuaciones de equilibrio disponibles. Si el número de incógnitas excede tres, una o más de las incógnitas se deben encontrar analizando una parte diferente de la armadura. Si es hábil para formular y resolver ecuaciones de equilibrio, el único reto al emplear el método de las secciones es seleccionar una parte conveniente de la armadura para el DCL.

Considere una vez más la armadura analizada en la sección anterior [su DCL se repite en la figura 4.21(a)]. Ahora se utiliza el método de las secciones para determinar las fuerzas en los miembros *BC*, *HC*, *HG* y *DF*: cada uno de los miembros está identificado por dos líneas paralelas cortas en la figura 4.21(a).

Suponiendo que las reacciones externas ya se han calculado con anterioridad, el primer y más importante paso es la selección de la parte de la armadura que se analizará. Se observará que la sección identificada 1 en la figura 4.21(a) pasa por los miembros *BC*, *HC* y *HG*. Las fuerzas en estos tres miembros son las únicas incógnitas si el DCL se traza para la parte de la armadura que está aislada por esta sección. Observe que después de haber hecho la selección, la parte de la armadura a cada lado del corte se puede utilizar para el DCL. Las fuerzas dentro de los miembros ocurren en pares iguales y opuestos, por lo que se obtendrán los mismos resultados sin importar qué parte se analice. Por supuesto, si se puede elegir, uno naturalmente seleccionaría la parte menos complicada.



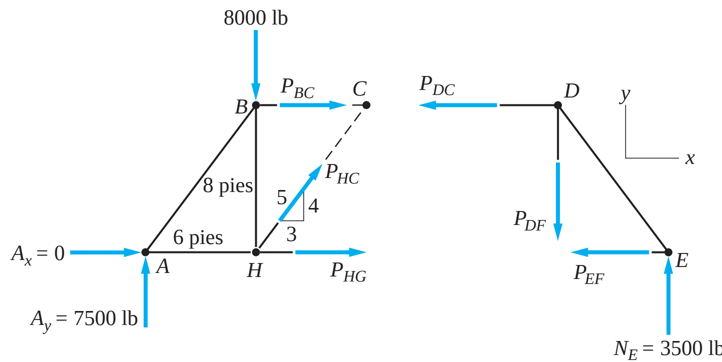


Fig. 4.21

Para nuestra armadura, utilizar la parte a la izquierda o bien a la derecha de la sección 1 es igual de conveniente. Sin ninguna razón en particular, se elige analizar la parte izquierda, con su DCL ilustrado en la figura 4.21(b) (de nuevo se supuso que los miembros están en tensión). Observe que el sistema de fuerzas es no concurrente y coplanar, de manera que cualquier conjunto de tres ecuaciones independientes se puede utilizar para calcular las tres fuerzas desconocidas.

El siguiente es un método de solución eficiente.

$\Sigma F_y = 0$: determina P_{HC}, debido a que P_{BC} y P_{HG} no tienen componentes *y*
$\Sigma M_H = 0$: determina el P_{BC}, debido a que el P_{HC} y P_{HG} no tienen momento respecto al punto *H*
$\Sigma M_C = 0$: determina el P_{HG}, debido a que el P_{BC} y P_{HC} no tienen momento respecto al punto *C*

Los detalles de este análisis son los siguientes:

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad \frac{4}{5}P_{HC} - 8000 + 7500 = 0$$

$$P_{HC} = \frac{5}{4}(8000 - 7500)$$

$$= 625 \text{ lb} \quad \text{(tensión)}$$ *Respuesta*

$$\Sigma M_H = 0 \quad \circlearrowleft + \quad -7500(6) - P_{BC}(8) = 0$$

$$P_{BC} = -5625 \text{ lb}$$

$$= 5625 \text{ lb} \quad \text{(compresión)}$$ *Respuesta*

$$\Sigma M_C = 0 \quad \circlearrowleft + \quad 8000(6) - 7500(12) + P_{HG}(8) = 0$$

$$P_{HG} = \frac{1}{8}[7500(12) - 8000(6)]$$

$$= 5250 \text{ lb} \quad \text{(tensión)}$$ *Respuesta*

Para determinar la fuerza en el miembro *DF* por el método de las secciones, considere de nuevo el DCL de la armadura completa en la figura 4.21(a). Nuestra intención es aislar una parte de la armadura cortando sólo tres miembros, uno de ellos es el miembro *DF*. Se puede observar que la sección 2 cumple esta tarea. Se elige analizar la parte a la derecha de esta sección ya que contiene menos fuerzas. El DCL se muestra en la figura 4.21(c), con las fuerzas desconocidas de nuevo supuestas como de tensión. Observe que P_{DF} se puede calcular con la ecuación

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 3500 - P_{DF} = 0$$

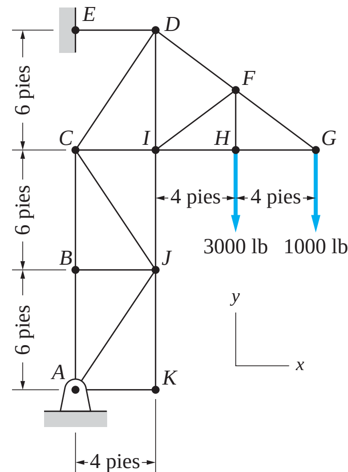
$$P_{DF} = 3500 \text{ lb} \quad \text{(tensión)}$$ *Respuesta*

Si se desea P_{EF} ahora se podría calcular utilizando $\Sigma M_D = 0$ y $\Sigma M_E = 0$ daría P_{DC}.

Como se ve, las fuerzas en los miembros de una armadura se pueden encontrar ya sea mediante el método de los nodos o bien con el de las secciones. Seleccionar el método que resulte en el análisis más directo no suele ser difícil. Por ejemplo, para la armadura que se muestra en la figura 4.21(a). El DCL del nodo *A* es conveniente para calcular P_{AB}, en tanto que el método de las secciones es más adecuado para calcular P_{BC}.

Problema de ejemplo 4.19

Utilizando el método de las secciones, determine las fuerzas en los miembros siguientes de la armadura en la figura (a): *FI* y *JC*. Indique si son de tensión o compresión.

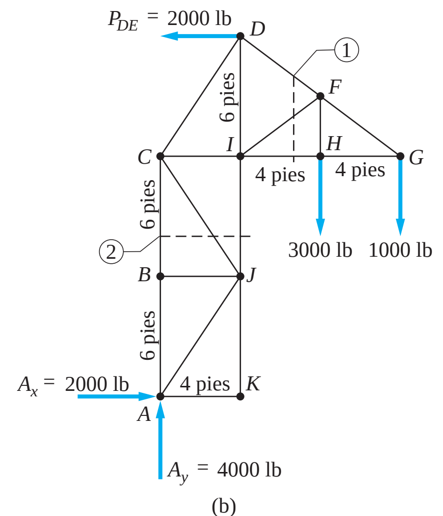


(a)

Solución

El DCL de la armadura completa se muestra en la figura (b). Las tres reacciones externas (A_x, A_y y P_{DE}) se pueden calcular utilizando las siguientes ecuaciones (se omitieron los detalles matemáticos):

$$\Sigma M_A = 0 \quad \text{da} \quad P_{DE} = 2000 \text{ lb}$$
$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{da} \quad A_x = 2000 \text{ lb}$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{da} \quad A_y = 4000 \text{ lb}$$



(b)

Estas fuerzas se muestran en la figura (b) y de aquí en adelante se tratarán como cantidades conocidas.

Miembro *FI*

Método de análisis

Con referencia al DCL en la figura (b), se puede observar que la sección 1 corta los miembros *FD*, *FI* y *HI*. Como hay tres ecuaciones de equilibrio disponibles para una parte de la armadura separada por esta sección, se podrían encontrar las fuerzas en los tres miembros.

Detalles matemáticos

Después de elegir la sección 1, ahora se debe decidir qué parte de la armadura analizar. Se selecciona la parte que se encuentra a la derecha de la sección, debido a que

es un poco menos complicada que la parte a la izquierda. Por supuesto, se obtendrán resultados idénticos sin importar qué parte de la armadura se analice.

El DCL para la parte de la armadura que se encuentra a la derecha de la sección 1 se muestra en la figura (c), siendo las tres incógnitas P_{FD}, P_{FI} y P_{HI}. Cualquier conjunto de ecuaciones independientes se puede emplear para despejar estas incógnitas. Una solución conveniente que da P_{FI} de manera directa es la siguiente:

$\Sigma M_G = 0$ da P_{FI}, debido a que P_{FD} y P_{HI} pasan por el punto G.

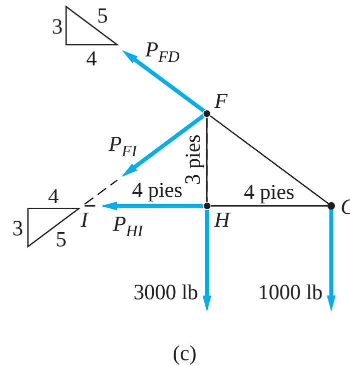
$$\circlearrowleft^{+} \quad 3000(4) + \frac{3}{5}P_{FI}(8) = 0$$

$$P_{FI} = -2500 \text{ lb}$$

$$= 2500 \text{ lb} \quad \text{(compresión)}$$

Respuesta

Nota: el momento de P_{FI} respecto al punto G se calculó remplazando P_{FI} por sus componentes x y y actuando en el punto I.



(c)

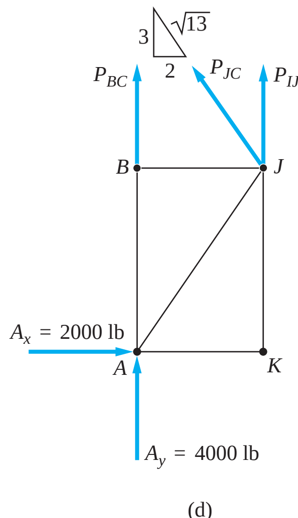
Miembro *JC*

Método de análisis

En la figura (b), la sección 2 pasa sólo por tres miembros, uno de los cuales es el *JC*. Por tanto, se puede encontrar la fuerza en ese miembro (y las fuerzas en los otros dos si se desea) sólo de un DCL.

Detalles matemáticos

El DCL para la parte de la armadura que se encuentra debajo de la sección 2 se muestra en la figura (d). Las tres incógnitas son P_{BC}, P_{JC} y P_{IJ}. La fuerza P_{JC} se puede obtener con las ecuaciones siguientes:



(d)

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad A_x - \frac{2}{\sqrt{13}}P_{JC} = 0$$

$$P_{JC} = \frac{\sqrt{13}}{2}A_x = \frac{\sqrt{13}}{2}(2000)$$

$$= 3610 \text{ lb} \quad \text{(tensión)}$$

Respuesta

Problemas

4.148 Demuestre que todos los miembros de la armadura soportan la misma fuerza y encuentre la magnitud de esta fuerza.

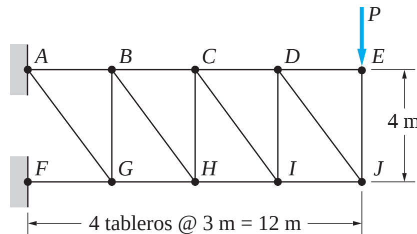


Fig. P4.148, P4.149

4.149 Determine las fuerzas en los miembros FG y AB en términos de P.

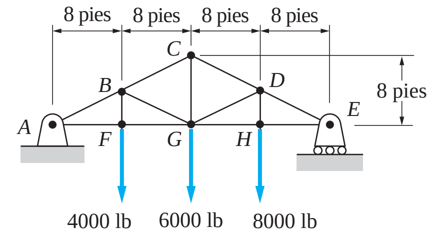


Fig. P4.150

4.150 Determine las fuerzas en los miembros BC, BG y FG.

4.151 Encuentre las fuerzas en los miembros BC y DE.

4.152 Calcule las fuerzas en los miembros EF, NF y NO.

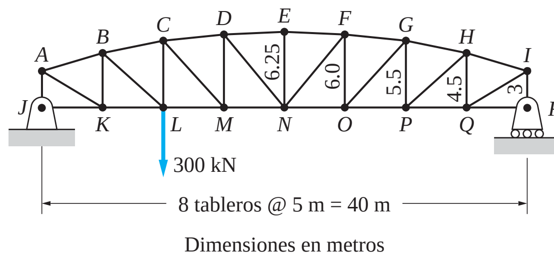


Fig. P4.152, P4.153

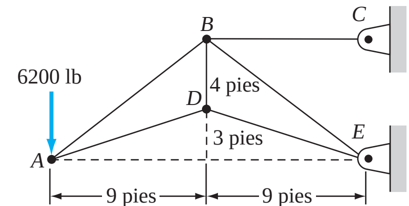


Fig. P4.151

4.153 Repita el problema 4.152 suponiendo que la fuerza de 300 kN se aplica en O en vez de en L.

4.154 Determine las fuerzas en los miembros BG, CI y CD.

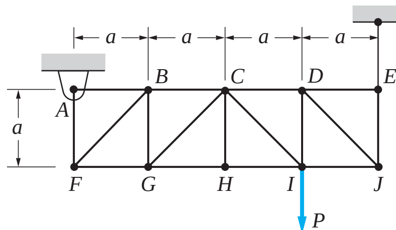


Fig. P4.154, P4.155

4.155 Suponiendo que $P = 48\,000$ lb y que se puede aplicar en cualquier nodo sobre la línea FJ, determine la ubicación de P que ocasione: (a) la tensión máxima en

el miembro *HI*; (b) la compresión máxima en el miembro *CI*, y (c) la tensión máxima en el miembro *CI*. También calcule la magnitud de la fuerza indicada en cada caso.

4.156 Determine el ángulo θ que maximiza la fuerza de tensión en el miembro *BC* y calcule el valor máximo de esta fuerza.

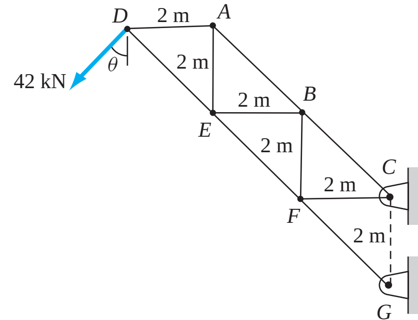


Fig. P4.156

4.157 Encuentre las fuerzas en los miembros *CD*, *DH* y *HI*.

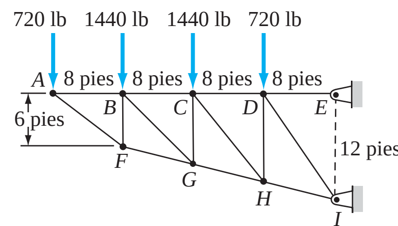


Fig. P4.157

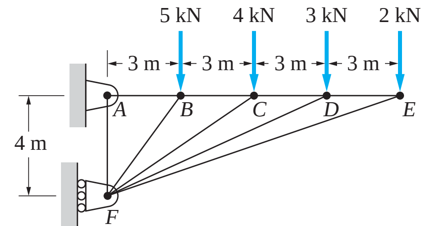


Fig. P4.158

4.158 Determine las fuerzas en los miembros *CD* y *DF*.

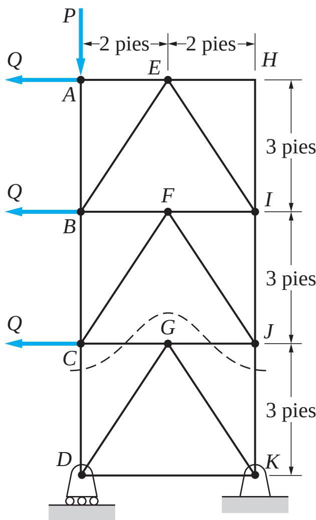


Fig. P4.159, P4.160

4.159 Calcule las fuerzas en los miembros *CD* y *JK*, si $P = 3000$ lb y $Q = 1000$ lb. (*Sugerencia:* utilice la sección indicada por la línea discontinua.)

4.160 Si $P_{CD} = 6000$ lb y $P_{GD} = 1000$ lb (las dos de compresión), encuentre *P* y *Q*.

4.161 Determine las fuerzas en los miembros *BC*, *CE* y *FG*.

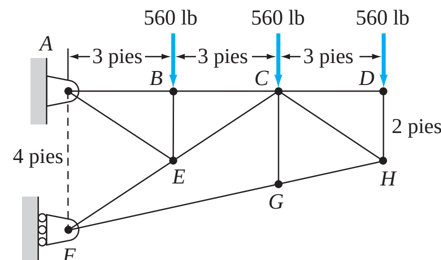


Fig. P4.161

4.162 Determine las fuerzas en los miembros *AC*, *AD* y *DE*.

4.163 Calcule las fuerzas en los miembros *GI*, *FH* y *GH*.

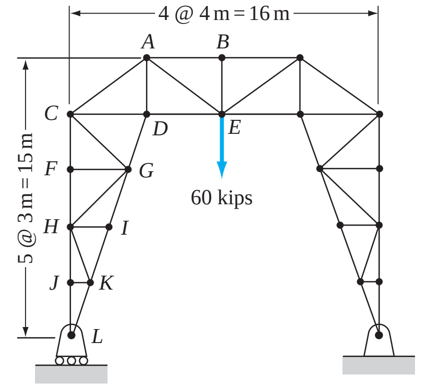


Fig. P4.162, P4.163

4.164 Determine las fuerzas en los miembros, *CD*, *IJ* y *NJ* de la armadura *K* en términos de *P*.

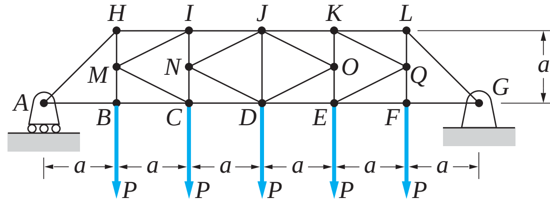


Fig. P4.164

4.165 Determine el valor máximo permisible del ángulo θ si la magnitud de la fuerza en el miembro *BC* no debe exceder $5P$.

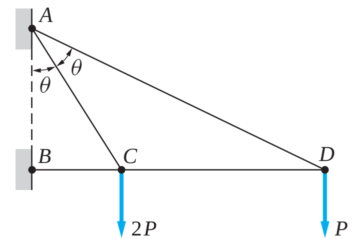


Fig. P4.165

4.166 Encuentre las fuerzas en los miembros *BC* y *BG*.

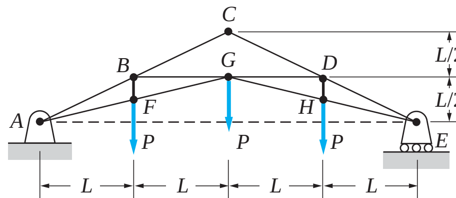


Fig. P4.166

4.167 Determine las fuerzas en los miembros *BC*, *BE* y la reacción horizontal en el pasador en *G*.

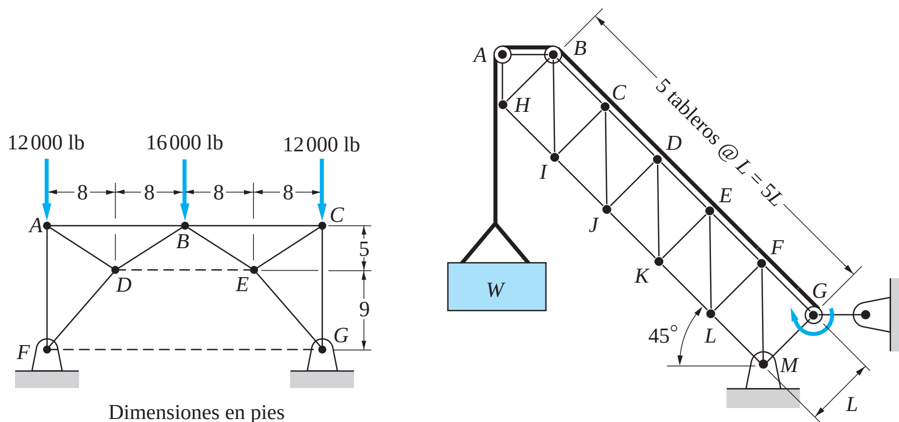


Fig. P4.167

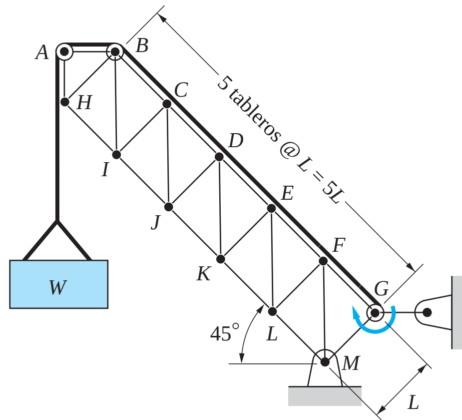


Fig. P4.168

4.168 Un par que actúa sobre el malacate en *G* sube lentamente la carga *W* por medio de una cuerda que pasa alrededor de las poleas conectadas a la grúa en *A* y *B*. Determine las fuerzas en los miembros *EF* y *KL* de la grúa, suponiendo que los diámetros de las poleas y del malacate son despreciables.

Repaso de ecuaciones

Ecuaciones de equilibrio coplanar

$$\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M_A = 0 \quad (A \text{ es un punto arbitrario})$$
$$\Sigma F_x = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0 \quad (\text{eje } x \text{ no perpendicular a } AB)$$
$$\Sigma M_A = \Sigma M_B = \Sigma M_C = 0 \quad (A,\ B \text{ y } C \text{ no colineales})$$

Hay *tres* ecuaciones de equilibrio independientes (escalares) para cada cuerpo.

Diagrama de cuerpo libre

Un diagrama de cuerpo libre es un bosquejo del cuerpo que muestra todas las fuerzas y pares (incluyendo las reacciones en los soportes) que actúan sobre él.

Reacciones de pasador

Si dos miembros están conectados por un pasador, las fuerzas ejercidas por éste sobre los miembros son iguales y opuestas, siempre que no se aplique una fuerza externa al pasador.

Miembros de dos fuerzas

Si un cuerpo se mantiene en equilibrio por dos fuerzas, éstas deben ser iguales y opuestas.

Miembros de tres fuerzas

Tres fuerzas coplanares no paralelas que mantienen un cuerpo en equilibrio deben ser concurrentes.

Armaduras

Una armadura es una estructura que consiste en miembros de dos fuerzas conectados por pasadores. Todas las cargas externas se aplican a los pasadores.

Problemas de repaso

4.169 La barra uniforme de 20 kg está colocada entre dos superficies verticales. Suponiendo fricción suficiente en *A* para soportar la barra, encuentre las magnitudes de las reacciones en *A* y *B*.

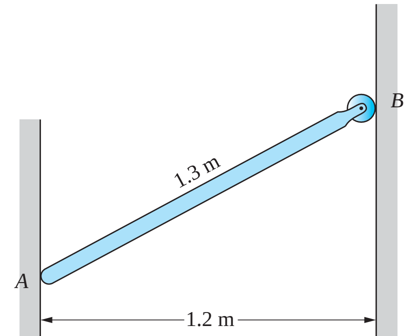


Fig. P4.169

4.170 Un cilindro homogéneo de peso *W* y radio *R* reposa en una ranura de ancho 2*b*. Determine la fuerza mínima *P* requerida para hacer rodar al cilindro fuera de la ranura. Suponga que hay fricción suficiente para evitar su deslizamiento.

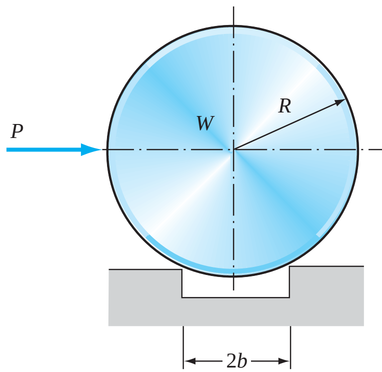


Fig. P4.170

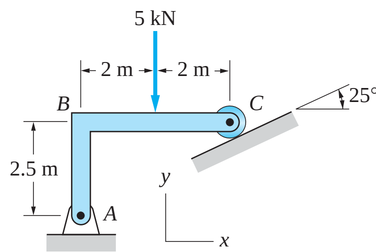


Fig. P4.171

4.171 Determine la magnitud de la reacción en el pasador en *A*, suponiendo que el peso de la barra *ABC* es despreciable.

4.172 Determine el par *C* que mantenga a la barra *AB* en equilibrio en la posición indicada. Ignore el peso de la barra y el diámetro de la polea pequeña en *B*.

4.173 Calcule las magnitudes de las reacciones en los pasadores en *A*, *B* y *C* para el marco mostrado. Ignore los pesos de los miembros.

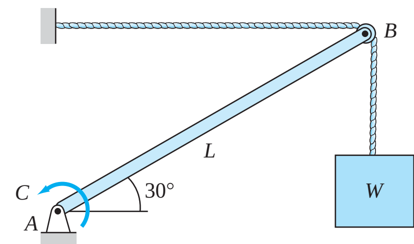


Fig. P4.172

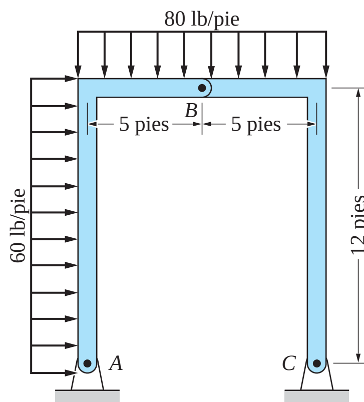


Fig. P4.173

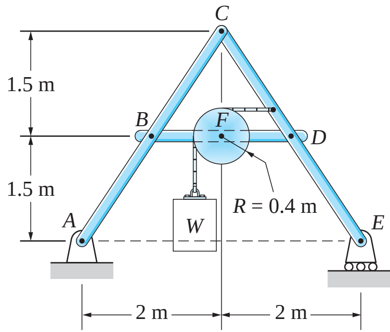


Fig. P4.174

4.174 El peso $W = 6$ kN pende del cable, el cual pasa sobre la polea en F. Ignorando los pesos de las barras y la polea, determine la magnitud de la reacción en el pasador en D.

4.175 Las fuerzas de 10 kN y 40 kN se aplican en los pasadores en B y C, respectivamente. Calcule las magnitudes de las reacciones en los pasadores en A y F. Ignore los pesos de los miembros.

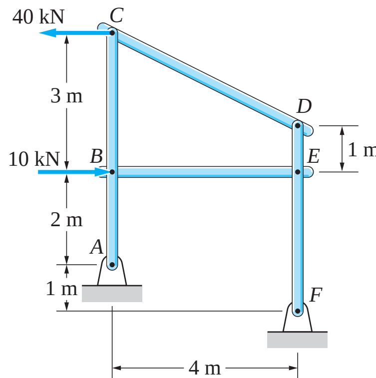


Fig. P4.175

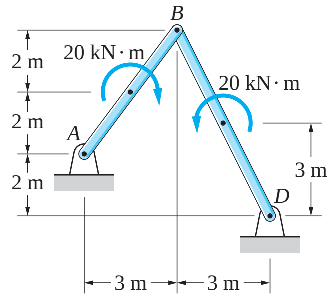


Fig. P4.176

4.176 Los dos pares actúan en los puntos medios de las barras AB y BD. Determine las magnitudes de las reacciones en los pasadores en A y D. Ignore los pesos de los miembros.

4.177 Determine las fuerzas en los miembros AC y AD de la armadura.

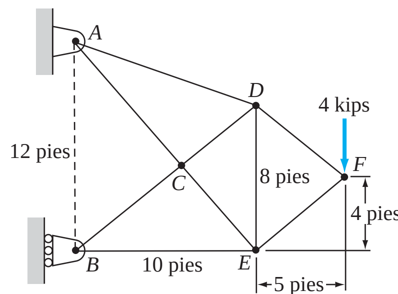


Fig. P4.177

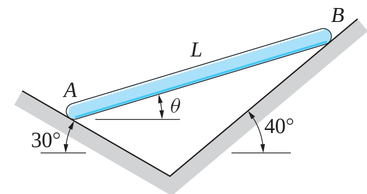


Fig. P4.178

4.178 Determine el ángulo θ para el cual la barra uniforme de longitud L y peso W estarán en equilibrio. Ignore la fricción.

4.179 Determine las magnitudes de las reacciones en los pasadores en A, C y E. Ignore el peso del marco.

4.180 Calcule las fuerzas en los miembros (a) DE; (b) BE, y (c) BC. Indique si son de tensión o compresión.

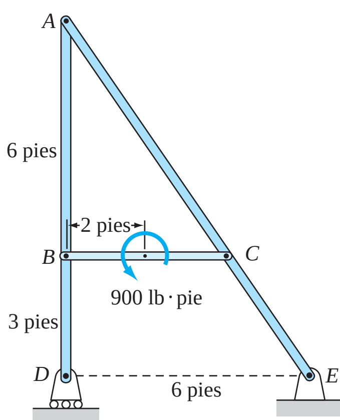


Fig. P4.179

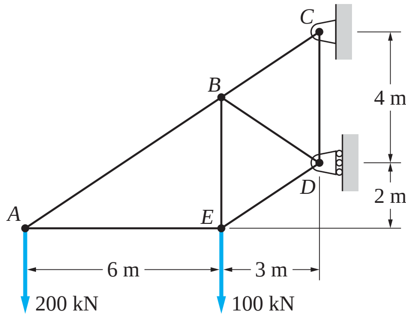


Fig. P4.180

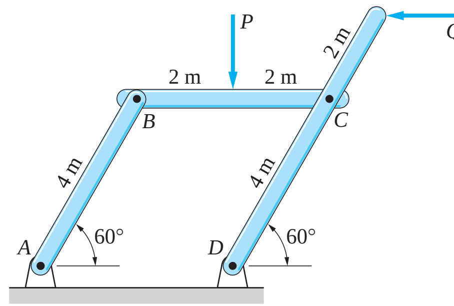


Fig. P4.181

4.181 Determine la relación *P*/*Q* para la cual la conexión articulada estará en equilibrio en la posición indicada. Ignore los pesos de los miembros.

4.182 Un bloque *C* de 50 lb reposa sobre una barra uniforme *AB* de 20 lb. El cable que conecta *C* con *B* pasa sobre la polea en *D*. Encuentre la magnitud de la fuerza que actúa entre el bloque y la barra.

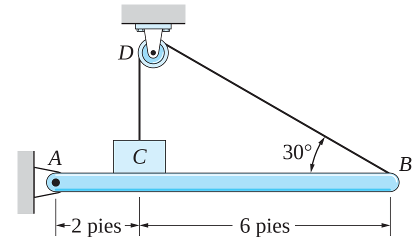


Fig. P4.182

4.183 La barra homogénea *AB* de 30 lb soporta el bloque de 60 lb. Los extremos de la barra reposan sobre planos inclinados sin fricción. Determine la distancia *x* para la cual la barra estará en equilibrio en la posición indicada.

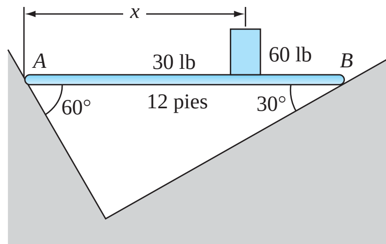


Fig. P4.183

4.184 Determine las fuerzas en los miembros (a) *BF* y (b) *EF*. Indique si son de tensión o compresión.

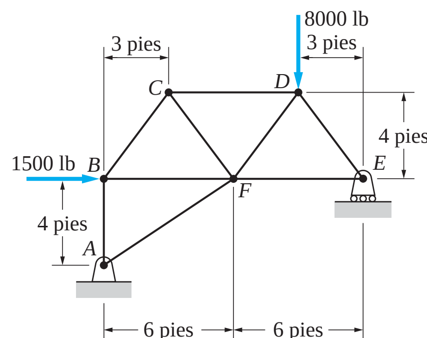


Fig. P4.184

4.185 La barra *ABC* de peso despreciable está soportada por un pasador en *A* y una cuerda que pasa alrededor de la pequeña polea en *D* y del disco homogéneo de 20 lb. Determine la tensión en la cuerda.

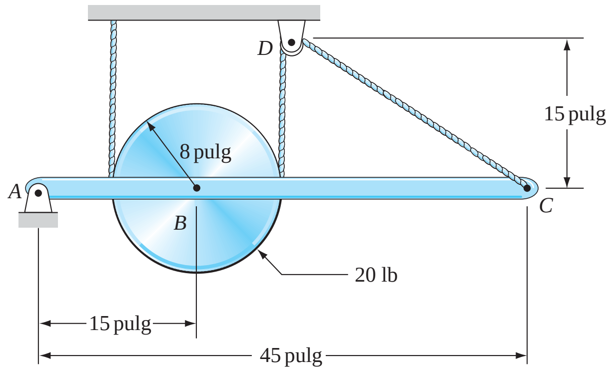


Fig. P4.185

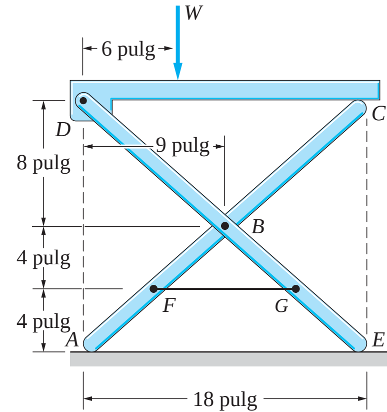


Fig. P4.186

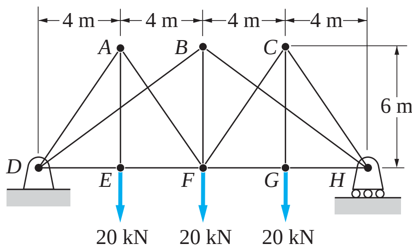


Fig. P4.187

4.186 La resistencia de frenado del cable *FG* que soporta el banco portátil es de 400 lb. Determine el peso máximo *W* que se puede soportar. Ignore la fricción y los pesos de los miembros.

4.187 Para la armadura mostrada, determine las fuerzas en los miembros (a) *BD* y (b) *BF*.

4.188 Una fuerza de 80 N se aplica a la manija de la máquina de repujado en *E*. Determine la fuerza normal resultante ejercida sobre la pieza de trabajo en *D*. Ignore los pesos de los miembros.

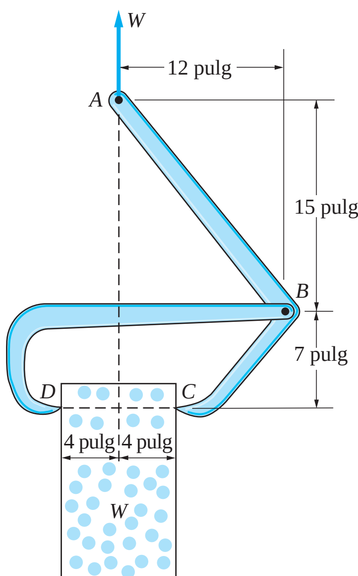


Fig. P4.189

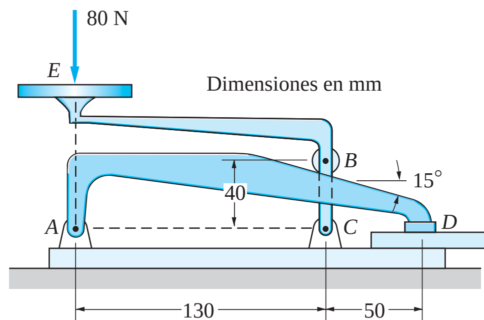


Fig. P4.188

4.189 Las tenazas que se muestran en la figura están diseñadas para levantar bloques de hielo. Si el peso del bloque de hielo es *W*, encuentre la fuerza horizontal entre las tenazas y el bloque de hielo en *C* y *D*.

5 Equilibrio tridimensional





El análisis de estructuras tridimensionales se basa en gran medida en el álgebra vectorial. La determinación de fuerzas incluso en una estructura espacial simple, como el trípode que se muestra, requiere que se utilice el análisis vectorial. prism_68/Shutterstock

5.1 Introducción

En este capítulo se estudia el análisis de cuerpos que se mantienen en equilibrio por sistemas de fuerzas tridimensionales. Aquí se continúa el énfasis sobre los diagramas de cuerpo libre y en el número de ecuaciones independientes, que se inició en el capítulo 4.

En el análisis de sistemas de fuerzas coplanares, no era útil emplear la notación vectorial. Este no es el caso para el análisis de equilibrio en tres dimensiones, donde la notación vectorial con frecuencia es definitivamente más ventajosa sobre la notación escalar.

5.2 Definición de equilibrio

Por definición, un cuerpo está en equilibrio si la resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo desaparece. Un sistema de fuerzas general siempre se puede reducir a un sistema equivalente fuerza-par $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ y $\mathbf{C}^R = \Sigma\mathbf{M}_O$ (donde O es cualquier punto). Por tanto, para que un cuerpo esté en equilibrio, se deben satisfacer las dos ecuaciones vectoriales siguientes:

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

Las seis ecuaciones escalares equivalentes son

$$\begin{matrix} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{matrix} \tag{5.2}$$

donde los ejes x, y y z se supone que se intersecan en el punto O. Es importante recordar que las sumatorias se deben tomar sobre *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, incluyendo las reacciones en los soportes.

5.3 Diagramas de cuerpo libre

Nuestro estudio del equilibrio coplanar en el capítulo 4 demostró la importancia de trazar de manera correcta los diagramas de cuerpo libre (DCL) en la solución de problemas de equilibrio. Para ampliar el concepto de diagrama de cuerpo libre a problemas en los que las cargas no son coplanares se deben investigar de nuevo las reacciones causadas por las diversas conexiones y soportes.

Como se mencionó en el capítulo 4, las reacciones que una conexión suele ejercer sobre el cuerpo se pueden deducir de la siguiente regla: un soporte que evita la traslación en una dirección dada debe aplicar una fuerza en esa dirección y un soporte que evita la rotación respecto a un eje debe aplicar un par en relación con ese eje. Algunos soportes comunes se ilustran en la tabla 5.1 y se describen en los párrafos siguientes.

(a) Cable flexible (peso despreciable). Un cable flexible puede ejercer sólo una fuerza de tensión en la dirección del cable. (Ignorando el peso del cable, éste se puede mostrar como una línea recta.) Suponiendo que la dirección del cable se conoce, al removerlo se introduce una incógnita en el diagrama de cuerpo libre: la magnitud de la tensión.

(b) Rodillo esférico o punto único de contacto sobre una superficie sin fricción. Un rodillo esférico o una superficie sin fricción con un punto único de contacto, puede ejercer sólo una fuerza que actúa normal a la superficie. En consecuencia, la magnitud de la fuerza es la única incógnita.

(c) Rodillo cilíndrico sobre superficie con fricción o un riel guía. Un rodillo cilíndrico colocado sobre una superficie con fricción puede ejercer una fuerza que es normal a la superficie y una fuerza de fricción que es perpendicular al plano del

rodillo. Si un rodillo cilíndrico se coloca sobre un riel guía, la fuerza perpendicular al plano del rodillo la proporciona el lado del riel guía. En cualquier caso, en el DCL se introducen dos incógnitas.

(d) Bola y cuenca (rótula). Una junta de rótula impide el movimiento traslacional pero no la rotación. Por tanto, una conexión de este tipo ejerce una fuerza desconocida, que suele mostrarse como tres componentes independientes; no aplica un par.

(e) Superficie con fricción: punto único de contacto. Una superficie con fricción en contacto con un cuerpo en un punto puede ejercer una fuerza desconocida, actuando por el punto de contacto. Esta fuerza suele mostrarse como tres componentes: una fuerza normal y dos componentes de la fuerza de fricción actuando paralelas a la superficie.

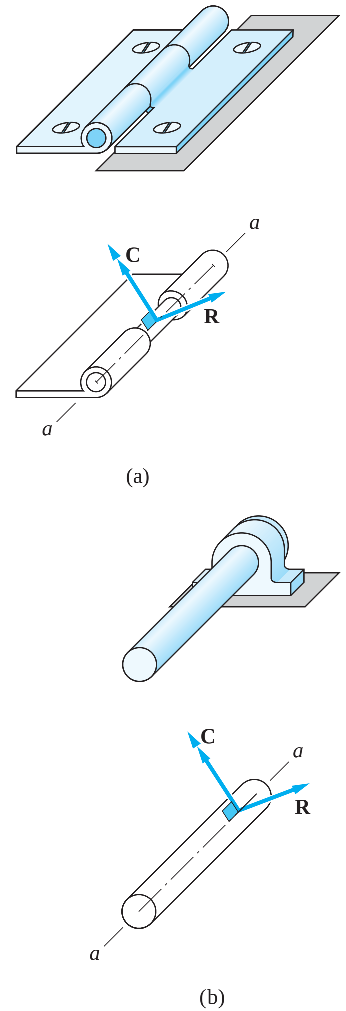


Fig. 5.1

Antes de describir los soportes de bisagra y cojinete, ilustrados en las partes (f) y (g) de la tabla 5.1, es necesario explicar cómo se diseñan y utilizan estos soportes en la práctica.

Una bisagra y un cojinete de empuje se ilustran en la figura 5.1(a) y 5.1(b), respectivamente. Cada uno ejerce tanto una fuerza como un par sobre el cuerpo que soporta. Como las bisagras y los cojinetes evitan por completo la traslación, la fuerza **R** puede actuar en cualquier dirección. Como estas conexiones se diseñan para permitir rotación respecto al eje *a-a*, el vector-par reactivo **C** siempre es perpendicular a ese eje. Sin embargo, las bisagras y cojinetes pocas veces son lo suficientemente fuertes para ejercer los pares sin fallar. En consecuencia, se deben configurar de tal manera que no se necesiten los pares reactivos para soportar el cuerpo. Por esta razón, todas las bisagras y cojinetes se considera que pueden proporcionar *sólo fuerzas reactivas*.

Para ilustrar aún más el razonamiento físico por el que se omiten los pares en bisagras y cojinetes, considere la puerta que se muestra en la figura 5.2. Si la puerta está soportada por una sola bisagra, como se muestra en la figura 5.2(a), el par reactivo C_A es esencial para el equilibrio; de otra manera la ecuación de momentos $\Sigma M_A = 0$ no se cumpliría. Sin embargo, por experiencia se sabe que ésta no es la manera para soportar una puerta si se espera que dure mucho tiempo. Los tornillos utilizados para unir la bisagra a la puerta y su marco pronto se desprenderían como resultado de las grandes fuerzas que son necesarias para proporcionar el par C_A. En la figura 5.2(b) se muestra el método convencional para soportar una puerta. Dos bisagras están alineadas a lo largo de un eje común con la bisagra en *B* supuesta libre para deslizarse, de manera que no proporciona un empuje axial; es decir, una fuerza a lo largo del eje de la bisagra. El DCL muestra que el equilibrio se puede satisfacer

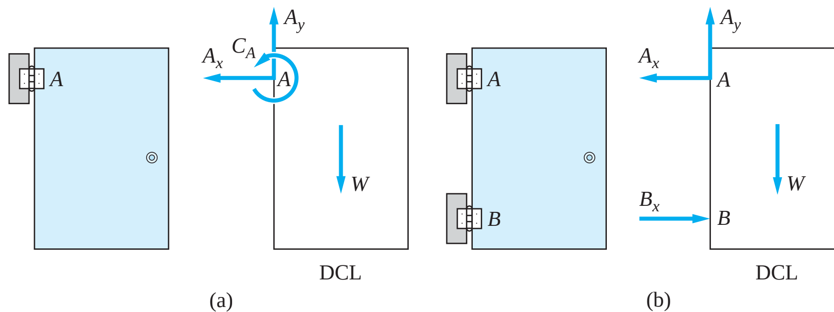


Fig. 5.2

Soporte	Reacción(es)	Descripción de la(s) reacción(es)	Número de incógnitas
(a)		Tensión de magnitud desconocida T en la dirección del cable	Una
(b)		Fuerza de magnitud desconocida N dirigida normal a la superficie	Una
(c)		Fuerza de magnitud desconocida N normal a la superficie y una fuerza de magnitud desconocida F en la dirección del eje del rodillo	Dos
(d)		Fuerza desconocida **R**	Tres
(e)		Fuerza de magnitud desconocida **N** normal a la superficie y una fuerza de fricción desconocida **F** en el plano de la superficie	Tres

Tabla 5.1 Soportes comunes para cargas tridimensionales (la tabla continúa en la página siguiente)

Soporte	Reacción(es)	Descripción de reacción(es)	Número de incógnitas
(f) Cojinete deslizante (radial) o bisagra deslizante	R_z, R_y; R_z, R_y	Fuerza desconocida **R** dirigida normal al eje del cojinete o de la bisagra	Dos
(g) Cojinete de empuje o bisagra de empuje	R_z, R_x, R_y; R_z, R_x, R_y	Fuerza desconocida **R**	Tres
(h) Eje. Junta universal	R_z, C, R_x, R_y	Fuerza desconocida **R** y un vector-par de magnitud desconocida *C* dirigido a lo largo del eje de la junta	Cuatro
(i) Empotramiento o soporte de voladizo	R_z, C_x, C_z, R_x, C_y, R_y	Fuerza desconocida **R** y un vector-par desconocido *C*	Seis

Tabla 5.1 (*continuación*)

sin desarrollar pares reactivos en las bisagras. El par reactivo, identificado como C_A en la figura 5.2(a), ahora lo proporcionan las fuerzas reactivas A_x y B_x en la figura 5.2(b). Cualquier desalineación entre los ejes de las bisagras, lo que también podría dar origen a pares reactivos, suele absorberlo la holgura presente en la mayoría de las bisagras y cojinetes.

(f) Cojinete deslizante o bisagra deslizante. Un cojinete deslizante o bisagra deslizante, puede ejercer sólo una fuerza normal al eje de la flecha que pasa por ella. Por tanto, en el DCL se introducen dos componentes de fuerza desconocidas por este soporte. Un cojinete deslizante también se denomina *cojinete radial*, debido a que está diseñado para soportar cargas que actúen sólo en la dirección radial.

(g) Cojinete o bisagra de empuje. En los cojinetes o bisagras de empuje, el movimiento deslizante de la flecha a lo largo de su eje se impide por una tapa de ex-

tremo o soporte equivalente. En consecuencia, este tipo de soporte resulta en tres componentes de fuerza desconocidas en un DCL. La componente de la fuerza R_x, que actúa paralela al eje de la flecha, se denomina *empuje axial*.

(h) Junta universal. Una junta universal impide toda la rotación y traslación respecto al eje de la junta. Por tanto, una junta universal puede aplicar una fuerza desconocida, que suele indicarse como tres componentes independientes y un par-vector actuando a lo largo del eje de la junta. En consecuencia, se introducen cuatro incógnitas.

(i) Empotramiento (voladizo o cantilever). Un empotramiento, también denominado soporte de voladizo, impide todo el movimiento traslacional y rotacional del cuerpo. Por tanto, el soporte puede ejercer una fuerza desconocida y un par-vector desconocido, introduciendo seis incógnitas en el DCL.

El procedimiento para elaborar un diagrama de cuerpo libre que comprenda un sistema de fuerzas tridimensionales es idéntico al utilizado para un sistema de fuerzas coplanares.

1. Se hace un bosquejo del cuerpo (o parte del cuerpo) sin los soportes.
2. En el bosquejo se muestran todas las fuerzas aplicadas.
3. Las reacciones se muestran para cada soporte que se removió.

Al analizar cuerpos conectados, de nuevo es importante que se apegue a la tercera ley de Newton: por cada acción existe una reacción igual y opuesta.

Si un problema contiene miembros de dos fuerzas, el DCL se puede simplificar en gran medida recordando el principio de las dos fuerzas: dos fuerzas en equilibrio deben ser iguales, opuestas y colineales. Este principio se ilustra en la figura 5.3. La barra en la figura 5.3(a) está soportada por una junta de rótula en cada extremo y no está sometida a ninguna fuerza, excepto a las reacciones en la junta (el peso se supone despreciable). El DCL de la barra, figura 5.3(b), muestra las reacciones en la junta: una fuerza en A con componentes A_x, A_y y A_z, y la otra en B con componentes B_x, B_y y B_z. Por tanto, se observa que la barra es un miembro de dos fuerzas. Después de aplicar el principio de las dos fuerzas, el DCL de la barra se simplifica como se muestra en la figura 5.3(c): las fuerzas en A y B son iguales, opuestas y colineales.

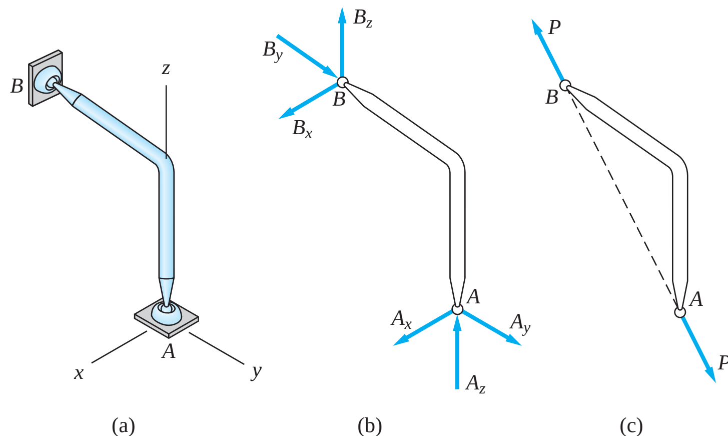
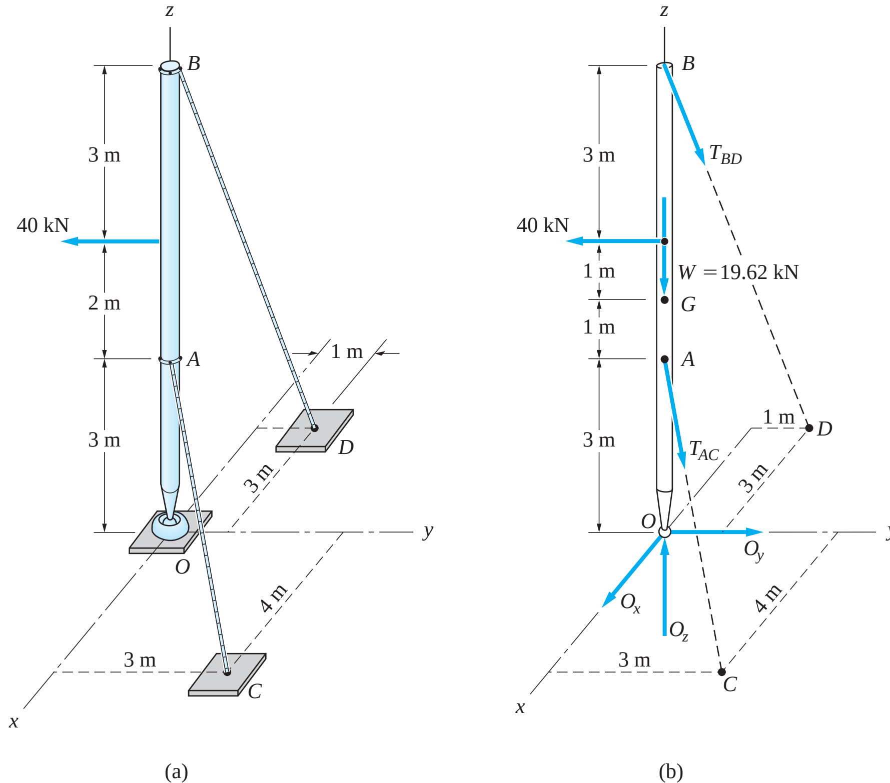


Fig. 5.3

Problema de ejemplo 5.1

El poste uniforme de 2 Mg en la figura (a) está soportado por una junta de rótula en *O* y dos cables. Dibuje el DCL para el poste y determine el número de incógnitas.



(a) (b)

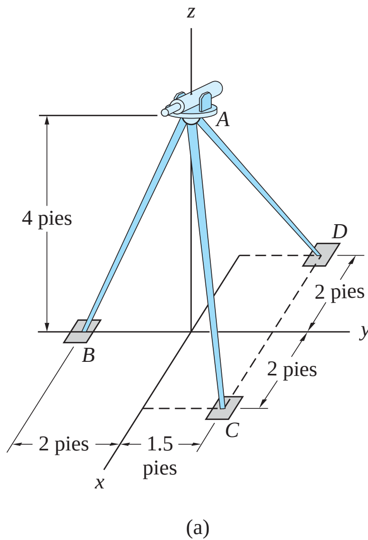
Solución

El DCL para el poste se muestra en la figura (b). Observe que, además de la fuerza aplicada de 40 kN, el poste está sometido a las fuerzas siguientes:

- Las tensiones en los cables: las magnitudes de las tensiones están identificadas T_{AC} y T_{BC}. Como se conoce la dirección de cada cable, la fuerza en cada cable introduce sólo una incógnita en el DCL: su magnitud.
- La reacción en *O*: como el soporte en *O* es una junta de rótula, la reacción en *O* es una fuerza desconocida, que se muestra como las tres componentes independientes: O_x, O_y y O_z.
- El peso del poste: el centro de gravedad está en *G*, el punto medio del poste. El peso es

$$W = mg = (2 \times 10^3 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 19\,620 \text{ N}$$

Al inspeccionar la figura (b) se revela que hay cinco incógnitas en el DCL: la magnitud de la tensión en cada uno de los dos cables y las tres componentes de fuerza en *O*.



(a)

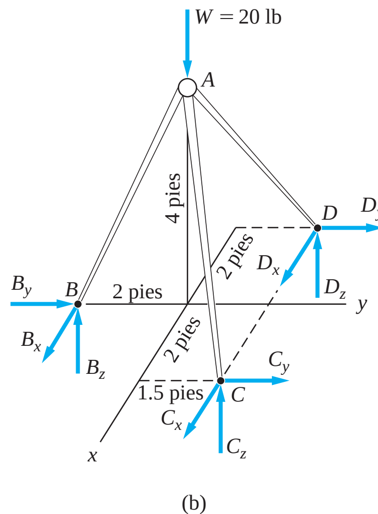
Problema de ejemplo 5.2

El teodolito topográfico de 20 lb en la figura (a) está soportado por un trípode de peso despreciable que se apoya sobre una superficie horizontal rugosa. Las patas del trípode están conectadas por juntas de rótula a la plataforma que soporta el teodolito. Dibuje el DCL para todo el conjunto utilizando dos métodos: 1. sin considerar los cuerpos de dos fuerzas y 2. considerando los cuerpos de dos fuerzas. En cada caso, determine el número de incógnitas. ¿Qué modificaciones son necesarias para estos DCL si los pesos de las patas son despreciables?

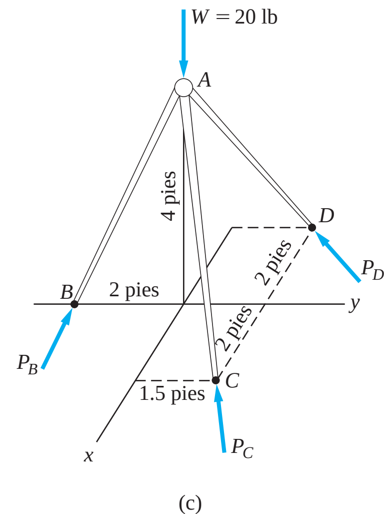
Solución

Parte 1 Sin considerar los cuerpos de dos fuerzas

El DCL de todo el conjunto se muestra en la figura (b). Además del peso *W* del teodolito, se muestran tres componentes independientes de las reacciones del suelo en *B*, *C* y *D*, lo que da un total de nueve incógnitas.



(b)



(c)

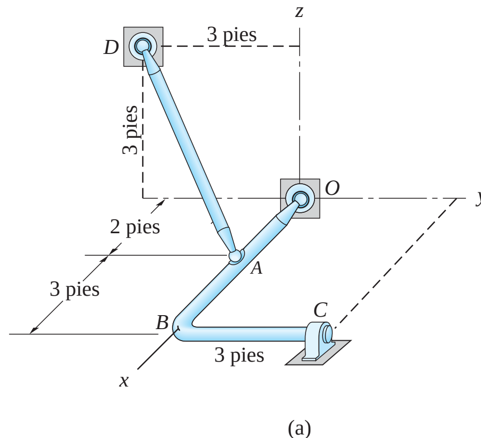
Parte 2 Considerando los cuerpos de dos fuerzas

Cuando se considera cada pata del trípode como un cuerpo de dos fuerzas, el DCL del conjunto se puede trazar como se muestra en la figura (c). Las fuerzas en *B*, *C* y *D* actúan en la dirección de la pata correspondiente del trípode. Por tanto, las reacciones en las tres patas son las incógnitas.

Si los pesos de las patas no son despreciables, el DCL en la figura (b) se puede modificar simplemente incluyendo el peso de cada pata. Sin embargo, el DCL en la figura (c) no se puede corregir de la misma manera. Debido a que las patas ya no son cuerpos de dos fuerzas, las fuerzas en *B*, *C* y *D* no se puede suponer que actúan en las direcciones de las patas respectivas.

Problema de ejemplo 5.3

La estructura que se muestra en la figura (a) está soportada por juntas de rótula en *O*, *D* y por un cojinete deslizante en *C*. Los dos miembros *OABC* y *AD*, conectados por una junta de rótula en *A*, cada uno con peso de 20 lb/pie. 1. Trace el DCL para toda la estructura y cuente el número de incógnitas. 2. Trace el DCL para cada uno de los miembros y cuente el número total de incógnitas.

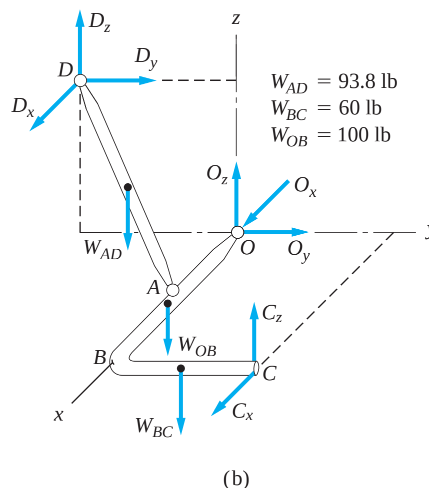


(a)

Solución

Parte 1 DCL para toda la estructura

El DCL para toda la estructura se muestra en la figura (b); por claridad se omitieron las dimensiones.



(b)

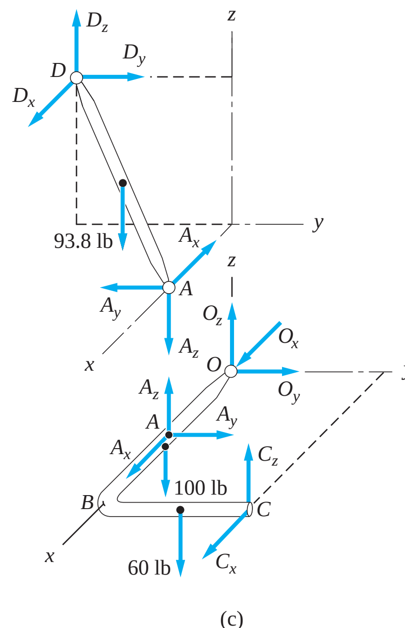
El peso de la estructura está representado por los pesos de los segmentos *OB*, *BC* y *AD* en sus puntos medios respectivos. Los pesos se calcularon multiplicando

el peso por longitud unitaria (20 lb/pie) por las longitudes de los segmentos respectivos. (Observe que la longitud de *AD* es $\sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = 4.69$ pies.)

En la figura (b) también se muestran las reacciones en las juntas de rótula en *O* y *D*. Observe que el miembro *AD* no es un cuerpo de dos fuerzas (debido a que su peso no es despreciable) y por tanto no se puede suponer que la fuerza en *D* actúa a lo largo de la línea *AD*. El DCL incluye las dos componentes de fuerza ejercidas sobre la estructura por el cojinete deslizante en *C*. El DCL de toda la estructura en la figura (b) contiene ocho incógnitas: tres fuerzas en *O*, tres fuerzas en *D* y dos fuerzas en *C*.

Parte 2 DCL para cada uno de los miembros

Los DCL para los miembros *OABC* y *AD* se muestran en la figura (c); de nuevo por claridad se omitieron las dimensiones.



(c)

Las reacciones en las rótulas en *O* y *D* se muestran en las mismas direcciones que las supuestas en la figura (b).

También se debe incluir la fuerza ejercida sobre cada miembro por la junta de rótula en *A* [como esta fuerza es interna al DCL de toda la estructura, no aparece en la figura (b)]. Observe que A_x, A_y y A_z se debe mostrar que son iguales y opuestas sobre los dos miembros.

Por último, las reacciones en *C*, mostradas en las mismas direcciones que en la figura (b), así como los pesos de los segmentos se incluyen en los DCL en la figura (c).

Cuando la estructura compuesta se subdivide en dos cuerpos constituyentes, el número de incógnita es once: tres en *O*, tres en *D*, tres en *A* y dos en *C*.

Problemas

5.1 La barra *AB* de peso despreciable está soportada por una junta de rótula en *B* y dos cables unidos en *A*. Dibuje el DCL para la barra, considerando que es un cuerpo de dos fuerzas. Determine el número de incógnitas.

5.2 Dibuje el DCL para la barra descrita en el problema 5.1, si la barra es homogénea y pesa 180 lb. Cuente el número de incógnitas.

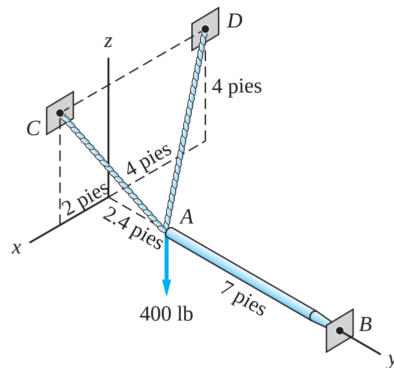


Fig. P5.1, P5.2

5.3 La armadura espacial *ABCD* con forma de tetraedro está suspendida de tres segmentos verticales. Suponiendo que todas las conexiones son juntas de rótula, trace el DCL de la armadura y cuente las incógnitas.

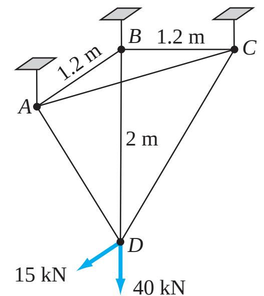


Fig. P5.3, P5.4

5.4 Dibuje el DCL de la parte *BCD* de la armadura espacial descrita en el problema 5.3. ¿Cuántas incógnitas aparecen en este DCL?

5.5 El tronco uniforme *OGA* de 600 lb, donde *G* es el centro de gravedad, se mantiene en la posición indicada por los dos cables y la barra ligera *BG*. Trace el DCL para el tronco, suponiendo fricción en todas las superficies de contacto y considerando que *BG* es un cuerpo de dos fuerzas. Cuente el número de incógnitas.

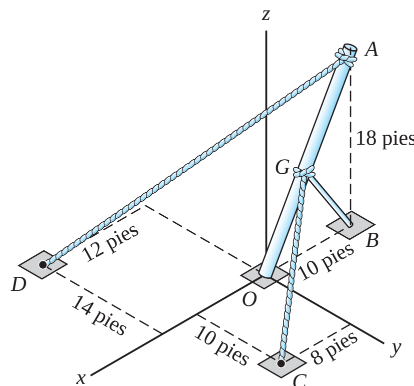


Fig. P5.5

5.6 La barra *ABCD* de peso despreciable está soportada por un cojinete deslizante en *A*, un cojinete de empuje en *D* y el cable *BE*. Dibuje el DCL y cuente las incógnitas.

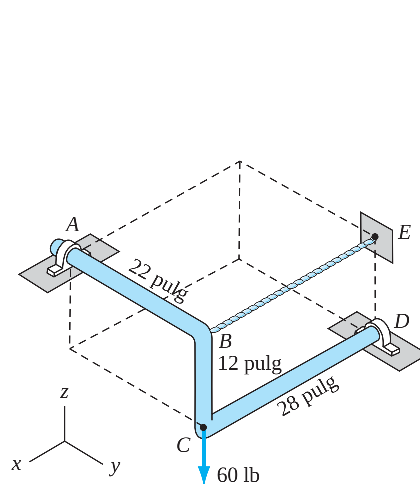


Fig. P5.6

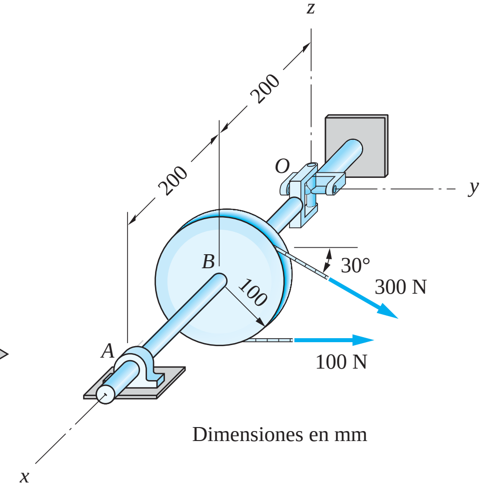


Fig. P5.7

5.7 El conjunto de eje y polea está soportado por la junta universal en *O* y por el cojinete deslizante en *A*. La polea, que tiene una masa de 7 kg, está sometida a las tensiones en las bandas mostradas. La masa del eje se puede ignorar. Dibuje un DCL que consista en la polea y el eje *AO*. Determine el número de incógnitas sobre este DCL.

5.8 La puerta homogénea de 30 kg está soportada por bisagras en *A* y *B*, de las cuales sólo la bisagra en *B* puede proporcionar un empuje axial. El cable *CD* impide que la puerta se abra por completo cuando se jala por la fuerza de 200 N que actúa perpendicular a ella. Dibuje el DCL para la puerta y cuente el número de incógnitas.

5.9 Dibuje el DCL para la barra *BCD*. Las conexiones en *A* y *B* son juntas de rótula, *C* es un cojinete deslizante y *D* es un cojinete de empuje. Suponga que los pesos de los miembros son despreciables y considere que *AB* es un miembro de dos fuerzas. ¿Cuántas incógnitas aparecen en el DCL?

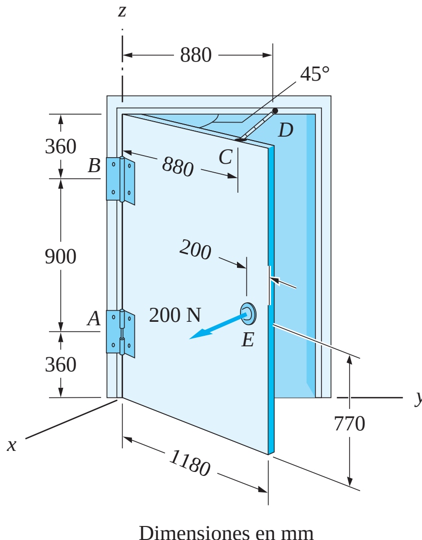


Fig. P5.8

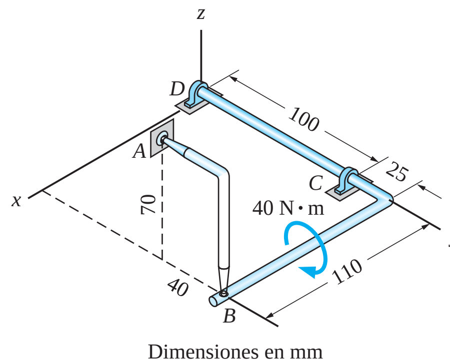


Fig. P5.9

5.10 La barra en forma de T *AEBF* está conectada a la barra *CD*, con la junta en *F* equivalente a un cojinete deslizante. Los soportes en *A* y *C* son cojinetes deslizantes y en *B* y *D* son cojinetes de empuje. Las dos fuerzas aplicadas, que actúan en el punto medio del brazo *EF*, son paralelas a los ejes *x* y *y*, respectivamente. Ignorando los pesos de los miembros, dibuje los DCL para toda la estructura, la barra T y la barra *CD*. Determine el número total de incógnitas.

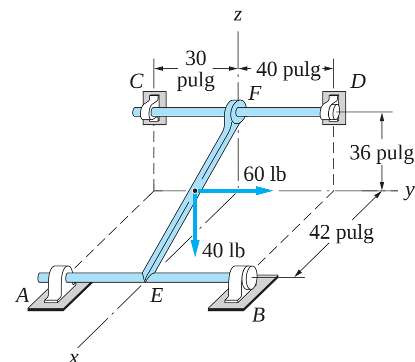


Fig. P5.10

5.11 La barra en forma de L, soportada por cojinetes deslizantes en *A* y *B*, pasa por un agujero en la viga en voladizo *DE*. Dibuje los DCL para todo el conjunto y para sus dos partes. Determine el número de incógnitas. Ignore los pesos de los componentes.

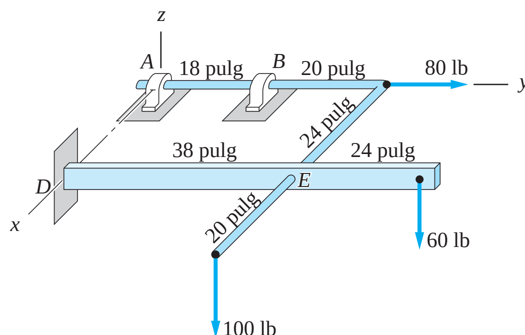


Fig. P5.11

5.12 Dibuje el DCL para la armadura espacial suponiendo que todas las conexiones son juntas de rótula. ¿Cuántas incógnitas hay?

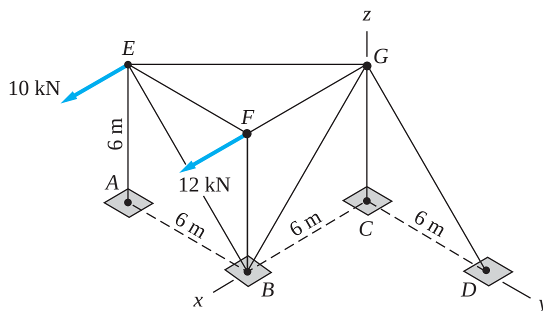


Fig. P5.12

5.4 *Ecuaciones de equilibrio independientes*

a. *Caso general*

Las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas tridimensionales se proporcionaron en la sección 5.2:

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \qquad \text{(5.1, repetida)}$$

donde O es un punto arbitrario. Si O es el origen de los ejes coordenados x, y y z, las ecuaciones escalares equivalentes son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \qquad \text{(5.2, repetida)}$$

Igual que en el caso de sistemas de fuerzas coplanares, se pueden utilizar conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio independientes en lugar de las ecuaciones anteriores. Por desgracia, las restricciones que aseguran la independencia de las ecuaciones para sistemas de fuerzas tridimensionales son tan numerosas (y con frecuencia muy complicadas) que una lista completa de las restricciones es de poco valor práctico. Es mucho mejor depender de la lógica que de una larga lista de reglas complejas.

Como ejemplo de un conjunto alternativo de ecuaciones de equilibrio independientes, considere las seis ecuaciones escalares de equilibrio de momentos que resultan al sumar los momentos respecto a dos puntos arbitrarios, digamos A y B. Si estas seis ecuaciones se satisfacen, no puede haber un par resultante. Sin embargo, aún podría haber una fuerza resultante $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ con la línea de acción pasando por los puntos A y B. Por tanto, sólo cinco de las ecuaciones de momento son independientes. Se debe utilizar una ecuación escalar adicional (una ecuación de fuerza o de momento cuidadosamente elegida) para garantizar que $\mathbf{R}$ desaparezca.

Al considerar un sistema de fuerzas tridimensionales, recuerde que el número de ecuaciones escalares independientes es seis. Aunque se pueden emplear varias combinaciones de ecuaciones de fuerza y momento, al menos tres deben ser ecuaciones de momentos. La razón es que los pares no aparecen en las ecuaciones de fuerzas, de manera que la única forma para garantizar que el par resultante desaparezca es satisfacer tres ecuaciones de equilibrio de momentos independientes. No obstante, si se eligen de manera apropiada, las seis ecuaciones independientes podrían ser tres ecuaciones de fuerzas y tres de momentos; dos ecuaciones de fuerzas y cuatro de momentos; una ecuación de fuerza y cinco de momentos o incluso seis ecuaciones de momentos.

En las tres secciones siguientes se analizan y resumen en la figura 5.4 tres casos especiales, que ocurren con suficiente frecuencia para garantizar su atención especial.

b. Sistema de fuerzas concurrentes

En el capítulo 3 la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes se determinó que era una fuerza **F** que pasaba por el punto de concurrencia. Las componentes de **R** se dieron como $R_x = \Sigma F_x$, $R_y = \Sigma F_y$ y $R_z = \Sigma F_z$, de donde se deduce que sólo hay tres ecuaciones de equilibrio independientes:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \qquad (5.3)$$

Los ejes x, y y z no tienen que ser ejes coordenados; pueden representar cualesquiera tres direcciones arbitrarias, no necesariamente perpendiculares.

Observe que las seis ecuaciones independientes para el caso general se reducen a tres para este caso especial. Conjuntos alternativos de ecuaciones son una ecuación de momento y dos de fuerzas; una ecuación de fuerzas y dos de momentos o tres ecuaciones de momentos, cada una con sus propias restricciones para asegurar su independencia.

Tipo de sistemas de fuerzas		Núm. de ecuaciones de equilibrio independientes	Un conjunto de ecuaciones independientes
Generales	z, F1, F2, F3, O, y, x	Seis	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
Concurrentes	z, F1, F2, F3, O, y, x	Tres	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
Paralelas	z, F1, F2, F3, O, y, x	Tres	$\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$
Todas las fuerzas intersecan un eje	z, F1, F2, F3, O, y, x	Cinco	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$

Fig. P5.4

c. *Sistema de fuerzas paralelas*

En el capítulo 3 se demostró que si todas las fuerzas son paralelas al eje *z*, la resultante es una fuerza paralela al eje *z* o bien un par-vector perpendicular al eje *z*. Por tanto, el número de ecuaciones de equilibrio independientes de nuevo se reduce a tres.

$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \tag{5.4}$$

La ecuación de fuerzas elimina la posibilidad de una fuerza resultante y las dos ecuaciones de momentos aseguran que no haya un par resultante.

En las ecuaciones (5.4), los momentos se pueden sumar respecto a cualesquiera dos ejes que se encuentren en el plano xy. Las tres ecuaciones en las de (5.4) se pueden remplazar por tres de momentos, con varias restricciones requeridas para garantizar su independencia.

d. *Todas las fuerzas intersecan un eje*

Si todas las fuerzas intersecan un eje, digamos, el eje y, como se muestra en la figura 5.4, la ecuación de momentos $\Sigma M_y = 0$ se satisface trivialmente y quedamos con las cinco ecuaciones de equilibrio independientes siguientes.

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & & \Sigma M_z = 0 \end{array} \tag{5.5}$$

Por supuesto, se pueden utilizar conjuntos alternativos de ecuaciones independientes, dos ecuaciones de fuerzas y tres de momentos; una ecuación de fuerzas y cuatro o cinco de momentos.

5.5 *Restricciones impropias*

Aun si el número de ecuaciones de equilibrio es igual al número de incógnitas, no siempre se puede concluir que existe una solución. Como ya se mencionó varias veces, este es el predicamento cuando las ecuaciones de equilibrio no son independientes. En ese caso, la falta es del analista que elige las ecuaciones, no del problema físico. Pero existe otra situación en la que el problema mismo impide una solución de las ecuaciones de equilibrio; se conoce como el caso de *restricciones impropias*.

Como ejemplo de restricciones impropias, considere la placa de peso W suspendida de seis cables paralelos y empujada por la fuerza horizontal P, como se muestra en la figura 5.5(a). En el diagrama de cuerpo libre de la placa se muestra que hay seis incógnitas (las fuerzas en los cables). Debido a que las dos ecuaciones $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_z = 0$ se satisfacen trivialmente, el número de ecuaciones de equilibrio independientes se reduce a cuatro en este caso. Además, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ produce $P = 0$. De todo esto se concluye que la placa puede estar en equilibrio *en la posición indicada* sólo si $P = 0$ y entonces el problema está estáticamente indeterminado (quedan tres ecuaciones de equilibrio con seis incógnitas).

En este caso el problema es que los soportes no pueden resistir la carga aplicada P en la posición dada; es decir, no pueden proporcionar las restricciones apropiadas que impidan el movimiento. Esta situación se tiene cuando las *reacciones en los soportes* constituyen uno de los casos especiales descritos en la sección anterior: concurrentes paralelas (como en el ejemplo actual) o intersecando un eje común. Un ejemplo de esto último se muestra en la figura 5.5(b), en donde la placa de peso W está soportada por tres bisagras deslizantes. De nuevo se tienen seis reacciones desconocidas y ostensiblemente seis ecuaciones de equilibrio independientes, pero es claro que el equilibrio es imposible en la posición indicada, a menos que $P = 0$.

En resumen, se dice que las restricciones de soportes son *impropias* si no pueden soportar un sistema de cargas arbitrario (esto no impide el equilibrio ante ciertas cargas, por ejemplo, cuando $P = 0$ en los ejemplos que se muestran en la figura 5.5).

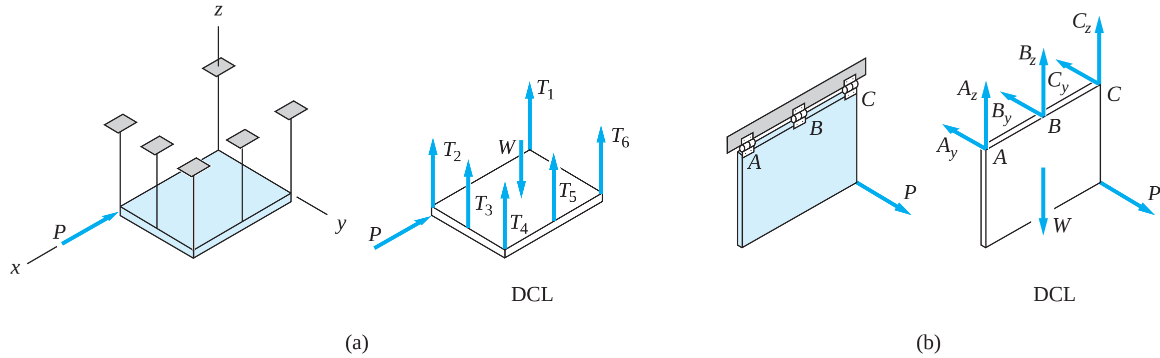


Fig. P5.5

5.6 Formulación y resolución de ecuaciones de equilibrio

Los pasos en el análisis de problemas de equilibrio tridimensionales son idénticos a los que se utilizaron en el análisis coplanar.

1. Dibuje los diagramas de cuerpo libre (DCL).
2. Escriba las ecuaciones de equilibrio.
3. Obtenga las incógnitas resolviendo las ecuaciones.

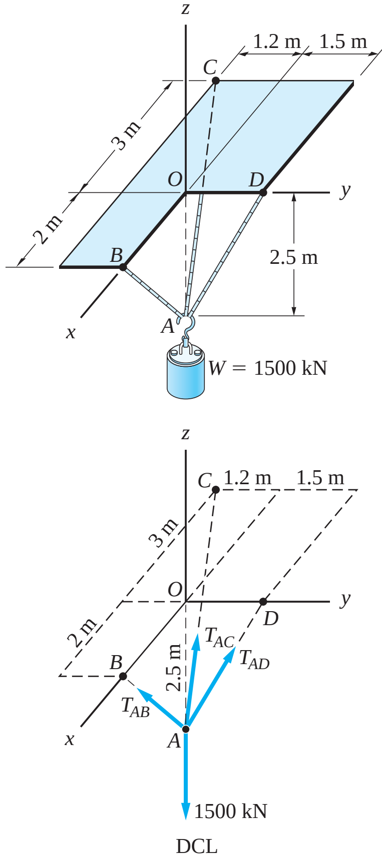
El primer paso, la elaboración de los DCL, se analizó en la sección 5.3. En esta sección se supone que se dan los DCL, permitiendo concentrarnos en los pasos segundo y tercero, formular y resolver las ecuaciones de equilibrio.

La solución de problemas tridimensionales requiere una planeación cuidadosa antes de formular ecuaciones de equilibrio. Como se recomendó en el capítulo 4, usted debe preparar un método de análisis o plan de ataque que especifique las ecuaciones que se formularán y que identifique las incógnitas que aparecerán en las ecuaciones. Al comparar el número de incógnitas con el número de ecuaciones de equilibrio independientes le permite determinar si el problema está estáticamente determinado o indeterminado. Con un plan preestablecido, usted podrá mantener control de la solución; sin él, puede abrumarse con la complejidad del problema. Después de adoptar un método de análisis viable, puede proceder con los detalles matemáticos de la solución.

En la solución de problemas de equilibrio coplanar, el método de análisis con frecuencia se centra sobre una ecuación de momentos. La idea es encontrar un centro de momento A tal que la ecuación $\Sigma M_A = 0$ comprenda el menor número de incógnitas (idealmente sólo una incógnita). Esta estrategia también es conveniente para analizar problemas tridimensionales. En la mayoría de los problemas, se deben buscar ecuaciones de momentos que simplifiquen la solución. Una ecuación de momentos respecto a un eje con frecuencia es útil ya que elimina las fuerzas que pasen por el eje. En muchos problemas, es posible encontrar un eje para el que la ecuación de momentos correspondiente contenga sólo una incógnita.

Problema de ejemplo 5.4

Calcule la tensión en cada uno de los tres cables que soportan el peso de 1500 kN, utilizando el DCL dado.



Solución

Método de análisis

Como se muestra en el DCL, las fuerzas que actúan sobre el peso son concurrentes (todas las fuerzas se intersecan en A). Por tanto, hay tres ecuaciones de equilibrio independientes. Como también hay tres incógnitas (las tensiones T_{AB}, T_{AC} y T_{AD}), se concluye que el problema está estáticamente determinado.

La solución más directa se obtiene de las tres ecuaciones escalares de fuerzas, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$ (o la ecuación vectorial equivalente, $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$).

Detalles matemáticos

El primer paso es escribir las fuerzas en forma vectorial, como sigue:

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = T_{AB}\left(\frac{2\mathbf{i} + 2.5\mathbf{k}}{3.202}\right)$$

$$= T_{AB}(0.6246\mathbf{i} + 0.7808\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$$

$$= T_{AC}\left(\frac{-3\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} + 2.5\mathbf{k}}{4.085}\right)$$

$$= T_{AC}(-0.7344\mathbf{i} - 0.2938\mathbf{j} + 0.6120\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{AD} = T_{AD}\lambda_{AD} = T_{AD}\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = T_{AD}\left(\frac{1.5\mathbf{j} + 2.5\mathbf{k}}{2.915}\right)$$

$$= T_{AD}(0.5145\mathbf{j} + 0.8575\mathbf{k})$$

$$\mathbf{W} = -1500\mathbf{k}\ \text{kN}$$

Sumando las componentes x, y y z e igualando a cero el resultado, se tiene

$$\Sigma F_x = 0 \quad 0.6246T_{AB} - 0.7344T_{AC} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad -0.2938T_{AC} + 0.5145T_{AD} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad 0.7808T_{AB} + 0.6120T_{AC} + 0.8575T_{AD} - 1500 = 0$$

Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones da

$$T_{AB} = 873\ \text{kN} \quad T_{AC} = 743\ \text{kN} \quad T_{AD} = 424\ \text{kN}$$ *Respuesta*

Como puede observarse, al utilizar tres ecuaciones de fuerzas resulta en un método de análisis directo para un sistema de fuerzas concurrentes. Sin embargo, existen otros conjuntos de ecuaciones de equilibrio que se podrían emplear igual de efectivas.

Otro método de análisis

Observe que las tensiones T_{AC} y T_{AD} intersecan la línea CD y por tanto no tienen momento respecto a esa línea. Así pues, T_{AB} se puede calcular a partir de sólo una ecuación: $\Sigma M_{CD} = 0$. Se pueden emplear argumentos similares para demostrar que $\Sigma M_{DB} = 0$ produce T_{AC} y $\Sigma M_{BC} = 0$ da T_{AD}.

Detalles matemáticos

$$\Sigma M_{CD} = 0 \qquad (\mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{T}_{AB} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{CD}) + (\mathbf{r}_{CO} \times \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{CD}) = 0$$

De la figura, se observa que $\mathbf{r}_{CB} = 5\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j}$ m, $\mathbf{r}_{CO} = 3\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j}$ m y el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}_{CD}$ está dado por

$$\boldsymbol{\lambda}_{CD} = \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{3\mathbf{i} + 2.7\mathbf{j}}{4.036}$$

Utilizando las expresiones vectoriales para $\mathbf{T}_{AB}$ y $\mathbf{W}$ determinadas antes y empleando la forma de determinante del triple producto escalar, la ecuación de momentos $\Sigma M_{CD} = 0$ toma la forma

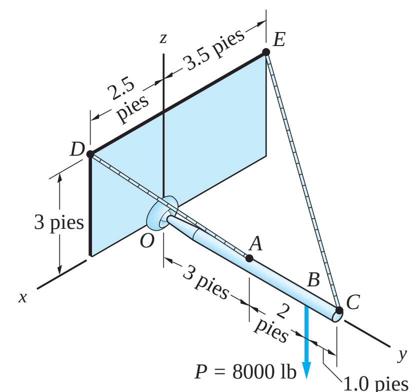
$$\frac{T_{AB}}{4.036}\begin{vmatrix} 5 & 1.2 & 0 \\ 0.6246 & 0 & 0.7808 \\ 3 & 2.7 & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{4.036}\begin{vmatrix} 3 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & -1500 \\ 3 & 2.7 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando los determinantes y resolviendo la ecuación resultante da $T_{AB} = 873$ kN, la misma respuesta establecida en el análisis anterior.

Como ya se mencionó, las tensiones en los otros dos cables se podrían obtener con $\Sigma M_{DB} = 0$ y $\Sigma M_{BC} = 0$.

Problema de ejemplo 5.5

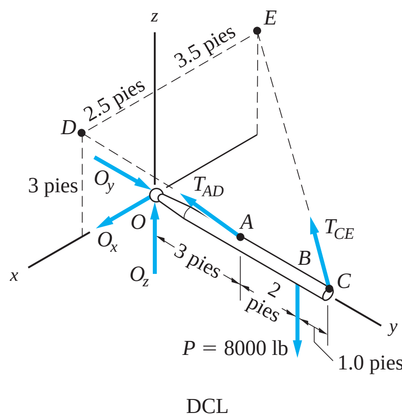
El brazo horizontal OC, que está sostenido por una junta de rótula y dos cables, soporta la fuerza vertical $P = 8000$ lb. Calcule T_{AD} y T_{CE}, las tensiones en los cables y las componentes de la fuerza ejercida sobre el brazo por la junta en O. Utilice el DCL dado (el peso del brazo es despreciable).



Solución

Método de análisis

Como se muestra en el DCL, el sistema de fuerzas que actúa sobre el brazo es el caso especial en el que todas las fuerzas intersecan un eje, que es el eje y. Por tanto, hay cinco ecuaciones de equilibrio independientes. Como también hay cinco incógnitas en el DCL (T_{AD}, T_{CE}, O_x, O_y y O_z), el problema está estáticamente determinado.



DCL

Considere las ecuaciones de momentos respecto a los ejes x y z ($\Sigma M_y = 0$ está trivialmente satisfecha):

$$\Sigma M_x = 0\text{: contiene las incógnitas } T_{AD} \text{ y } T_{CE}$$

$$\Sigma M_z = 0\text{: contiene las incógnitas } T_{AD} \text{ y } T_{CE}$$

Estas dos ecuaciones se pueden resolver simultáneamente para T_{AD} y T_{CE}. Después de determinar estas tensiones, las reacciones en O se pueden encontrar utilizando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.

Detalles matemáticos

Un método conveniente de escribir $\Sigma M_x = 0$ y $\Sigma M_z = 0$ es sumar los momentos respecto al punto O utilizando una representación vectorial (recuerde que $M_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$). Con referencia al DCL, se tiene

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{T}_{AD}) + (\mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{T}_{CE}) + (\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{P}) = \mathbf{0}$$

donde

$$\mathbf{r}_{OA} = 3\mathbf{j} \text{ pies} \quad \mathbf{r}_{OC} = 6\mathbf{j} \text{ pies} \quad \mathbf{r}_{OB} = 5\mathbf{j} \text{ pies}$$

$$\mathbf{T}_{AD} = T_{AD}\boldsymbol{\lambda}_{AD} = T_{AD}\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = T_{AD}\left(\frac{2.5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{4.924}\right)$$

$$= T_{AD}(0.5077\mathbf{i} - 0.6093\mathbf{j} + 0.6093\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{CE} = T_{CE}\boldsymbol{\lambda}_{CE} = T_{CE}\frac{\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|} = T_{CE}\Bigg(\frac{-3(5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{7.566}\Bigg)$$

$$= T_{CE}(-0.4626\mathbf{i} - 0.7930\mathbf{j} + 0.3965\mathbf{k})$$

$$\mathbf{P} = -8000\mathbf{k} \text{ lb}$$

Utilizando la forma de determinante para los productos cruz, se tiene

$$\Sigma \mathbf{M}_O = T_{AD}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0.5077 & -0.6093 & 0.6093 \end{vmatrix} + T_{CE}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ -0.4626 & -0.7930 & 0.3965 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8000 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Desarrollando los determinantes e igualando las componentes x y z (las componentes y son iguales a cero, como se esperaba), da

$$\Sigma M_x = 0 \qquad 1.828T_{AD} + 2.379T_{CE} - 40\,000 = 0$$

$$\Sigma M_z = 0 \qquad -1.523T_{AD} + 2.776T_{CE} = 0$$

de donde se obtiene

$$T_{AD} = 12\,770 \text{ lb} \qquad T_{CE} = 7010 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Después de calcular las tensiones, las reacciones en O se pueden calcular utilizando la ecuación de fuerzas $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad O_x + 0.5077T_{AD} - 0.4626T_{CE} = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad O_y - 0.6093T_{AD} - 0.7930T_{CE} = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \qquad O_z + 0.6093T_{AD} + 0.3965T_{CE} - 8000 = 0$$

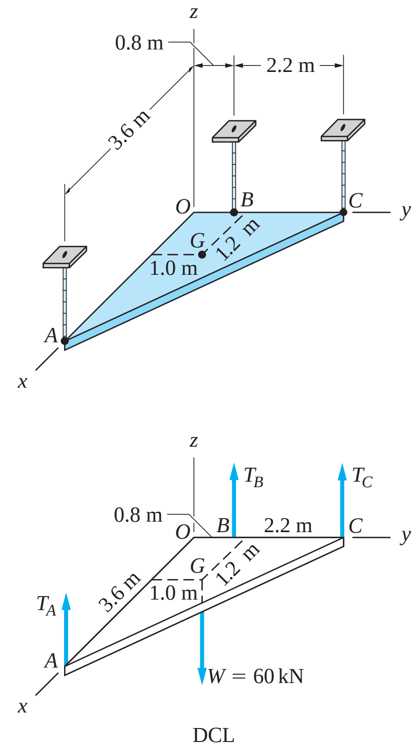
Sustituyendo los valores antes encontrados de T_{AD} y T_{CE}, se obtiene

$$O_x = -3240 \text{ lb} \qquad O_y = 13\,340 \text{ lb} \qquad O_z = -2560 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Los valores negativos de O_x y O_z indican que las direcciones de estas componentes son opuestas a las indicadas en el DCL.

Problema de ejemplo 5.6

Una placa homogénea que pesa 60 kN tiene su centro de gravedad en G y está soportada en el plano horizontal por tres cables verticales. Calcule la tensión en cada cable utilizando el DCL dado.



Solución

Método de análisis

Como se muestra en el DCL, las fuerzas que mantienen la placa en equilibrio forman un sistema paralelo, que tiene tres ecuaciones de equilibrio independientes. Como también hay tres incógnitas (T_A, T_B y T_C), el problema está estáticamente determinado.

En un método de análisis se consideran las ecuaciones de momentos respecto a los ejes x y y ($\Sigma M_z = 0$ está trivialmente satisfecha ya que las fuerzas son paralelas al eje z) y la ecuación de fuerzas en la dirección z.

$$\Sigma M_x = 0\text{: contiene las incógnitas } T_B \text{ y } T_C$$
$$\Sigma M_y = 0\text{: contiene la incógnita } T_A$$
$$\Sigma F_z = 0\text{: contiene las incógnitas } T_A,\ T_B \text{ y } T_C$$

Primero, la ecuación $\Sigma M_y = 0$ se puede utilizar para encontrar T_A. Después, las otras dos ecuaciones se pueden resolver simultáneamente para T_B y T_C. Los detalles de este análisis, empleando una representación escalar, se muestran a continuación.

Detalles matemáticos

$$\Sigma M_y = 0 \quad 60(1.2) - 3.6T_A = 0 \qquad (1)$$

lo que da

$$T_A = 20.0 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad 0.8T_B + 3.0T_C - 60(1.0) = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad T_A + T_B + T_C - 60 = 0 \qquad (3)$$

Sustituyendo $T_A = 20.0$ kN y resolviendo las ecuaciones (2) y (3) se obtiene

$$T_B = 27.3 \text{ kN} \qquad T_C = 12.7 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

Otro método de análisis

En la solución anterior, se pudo encontrar T_A utilizando la ecuación $\Sigma M_y = 0$ debido a que T_B y T_C no tienen momento respecto al eje y. Estudiando el DCL, podrá observar que también es posible calcular T_B empleando una ecuación y T_C empleando también una ecuación.

Problema de ejemplo 5.7

La barra doblada de peso despreciable está soportada por una junta de rótula en O, un cable conectado entre A, E y un cojinete deslizante en D. Sobre la barra actúa una llave que consiste en la fuerza **P** y el par **C**, los dos paralelos al eje z. Determine las componentes de la reacción en el cojinete en D y la fuerza en el cable utilizando el DCL dado.

Solución

Método de análisis

El sistema de fuerzas en el DCL es el caso general. Por tanto, hay seis ecuaciones de equilibrio independientes disponibles para calcular las seis incógnitas (O_x, O_y, O_z, T_{AB}, D_x y D_z).

Con referencia al DCL, se considera la ecuación de momentos respecto a cada uno de los ejes coordenados:

$\Sigma M_x = 0$: contiene la incógnita D_z

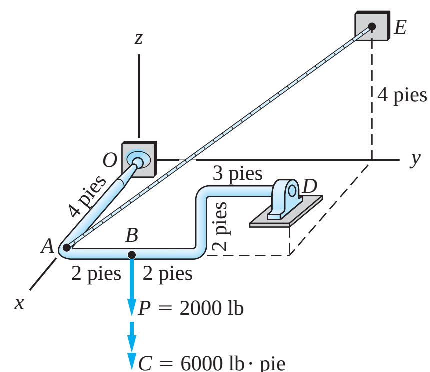
$\Sigma M_y = 0$: contiene las incógnitas T_{AE}, D_x y D_z

$\Sigma M_z = 0$: contiene las incógnitas T_{AE} y D_x

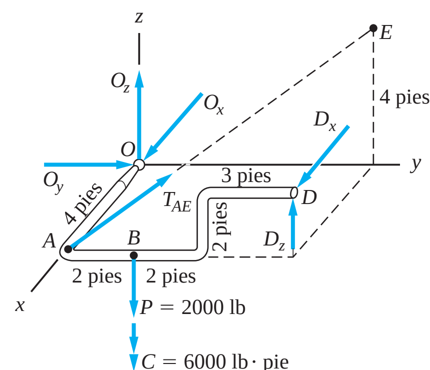
Por tanto, las tres incógnitas T_{AE}, D_x y D_z se pueden calcular a partir de estas ecuaciones de acuerdo con el esquema siguiente: primero se encuentra D_z a partir de $\Sigma M_x = 0$ y después se resuelven simultáneamente para D_x y T_{AE} las otras dos ecuaciones.

Detalles matemáticos

Si se emplea el análisis anterior, es conveniente utilizar el enfoque vectorial para deducir las ecuaciones de momentos $\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma M_x\mathbf{i} + \Sigma M_y\mathbf{j} + \Sigma M_z\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Los detalles son los siguientes:



$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{T}_{AE}) + (\mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{P}) + \mathbf{C} = \mathbf{0}$$



FBD

Con referencia al DCL, los vectores en la ecuación anterior son

$$\mathbf{r}_{OA} = 4\mathbf{i} \text{ pies} \qquad \mathbf{r}_{OD} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \text{ pies}$$

$$\mathbf{r}_{OB} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ pies}$$

$$\mathbf{P} = -2000\mathbf{k} \text{ lb} \qquad \mathbf{C} = -6000\mathbf{k} \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

$$\mathbf{T}_{AE} = T_{AE}\boldsymbol{\lambda}_{AE} = T_{AE}\frac{\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|} = T_{AE}\left(\frac{-4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{9}\right)$$

$$\mathbf{D} = D_x\mathbf{i} + D_z\mathbf{k}$$

Por tanto, $\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ se puede escribir en forma de determinante como

$$\frac{T_{AE}}{9}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 7 & 2 \\ D_x & 0 & D_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2000 \end{vmatrix} - 6000\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Desarrollando los determinantes e igualando las componentes x, y y z se obtienen las ecuaciones

$$\text{(componente } x\text{)} \qquad 7D_z - 4000 = 0$$

$$\text{(componente } y\text{)} \qquad -1.778T_{AE} + 2D_x - 4D_z + 8000 = 0$$

$$\text{(componente } z\text{)} \qquad 3.111T_{AE} - 7D_x - 6000 = 0$$

La solución de estas ecuaciones da

$$D_z = 571 \text{ lb} \qquad T_{AE} = 4500 \text{ lb} \qquad D_x = 1140 \text{ lb}$$ *Respuesta*

Si se desea, las reacciones O_x, O_y y O_z ahora se podrían encontrar a partir de la ecuación de fuerzas $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Debe observarse que T_{AE} también se podría obtener a partir de una sola ecuación escalar de equilibrio $\Sigma M_{OD} = 0$.

Problemas

En cada uno de los problemas siguientes se da el diagrama de cuerpo libre. Escriba las ecuaciones de equilibrio y calcule las incógnitas indicadas.

5.13 En el problema de ejemplo 5.4, determine la tensión T_{AC} utilizando la ecuación de $\Sigma M_{DB} = 0$.

5.14 En el problema de ejemplo 5.5, calcule la tensión T_{AD} utilizando una ecuación escalar de equilibrio.

5.15 En el problema de ejemplo 5.5, determine O_y con una ecuación escalar de equilibrio.

5.16 Determine la tensión T_B en el problema de ejemplo 5.6 empleado una ecuación escalar de equilibrio.

5.17 Calcule la tensión T_{AE} en el problema de ejemplo 5.7 utilizando una ecuación escalar de equilibrio.

5.18 Una placa homogénea de 40 kg está suspendida de cuatro cables. Determine la tensión en cada uno.

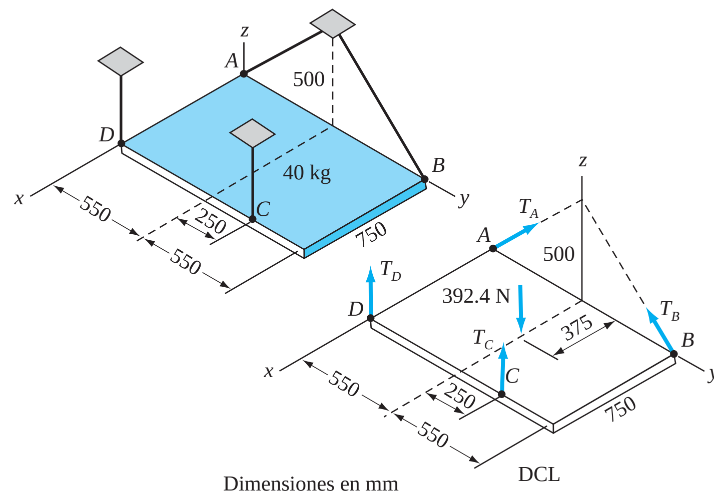


Fig. P5.18

5.19 La barra doblada está soportada por cojinetes deslizantes en *A*, *B* y *C*. Determine las reacciones causadas en los cojinetes por el par de 1200 lb · pie. Exprese las respuestas en forma vectorial.

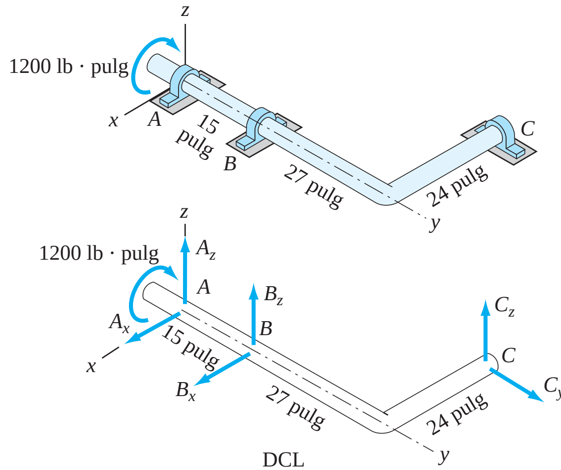


Fig. P5.19

5.20 La barra compuesta está soportada por un cojinete de empuje en *A*, un cojinete deslizante en *B* y el cable *CD*. Determine la tensión en el cable y la magnitud de la reacción en el cojinete en *A*. Ignore el peso de la barra.

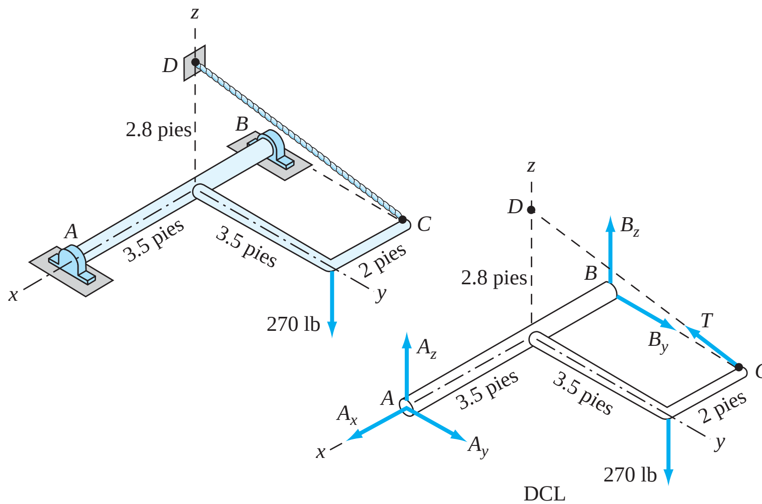


Fig. P5.20

5.21 Una puerta homogénea de peso $W = 60$ lb se mantiene en el plano horizontal por una bisagra de empuje en *O*, otra en *A* y el puntal *BC*. Determine todas las fuerzas que actúan sobre la puerta.

5.22 El brazo ligero *AB* está unido al muro vertical por una junta de rótula en *A* y soportado por dos cables en *B*. Una fuerza $\mathbf{P} = 12\mathbf{i} - 16\mathbf{k}$ kN se aplica en *B*. Observe

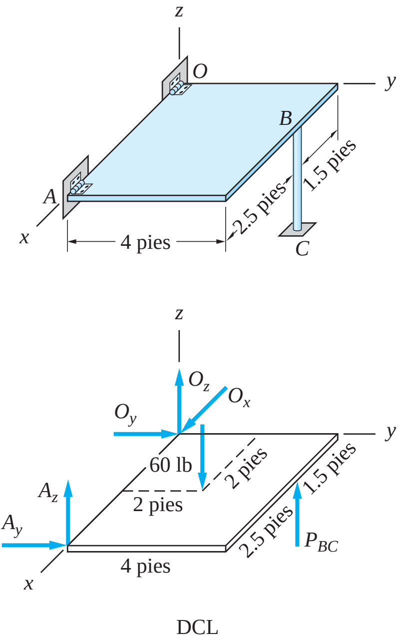


Fig. P5.21

que R_A, la reacción en A, actúa a lo largo del brazo debido a que es un cuerpo de dos fuerzas. Calcule las tensiones en los cables y R_A.

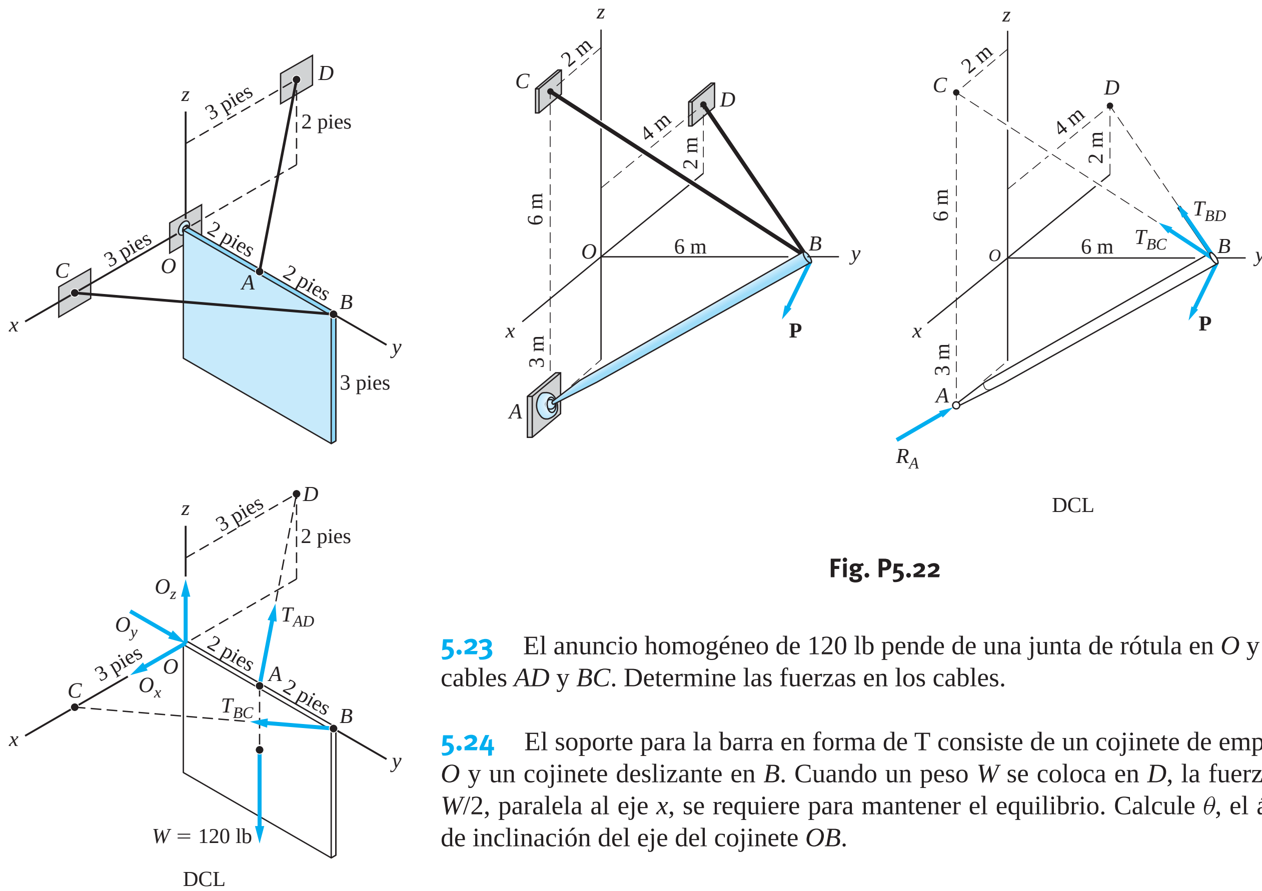


Fig. P5.22

Fig. P5.23

5.23 El anuncio homogéneo de 120 lb pende de una junta de rótula en O y de los cables AD y BC. Determine las fuerzas en los cables.

5.24 El soporte para la barra en forma de T consiste de un cojinete de empuje en O y un cojinete deslizante en B. Cuando un peso W se coloca en D, la fuerza $P = W/2$, paralela al eje x, se requiere para mantener el equilibrio. Calcule θ, el ángulo de inclinación del eje del cojinete OB.

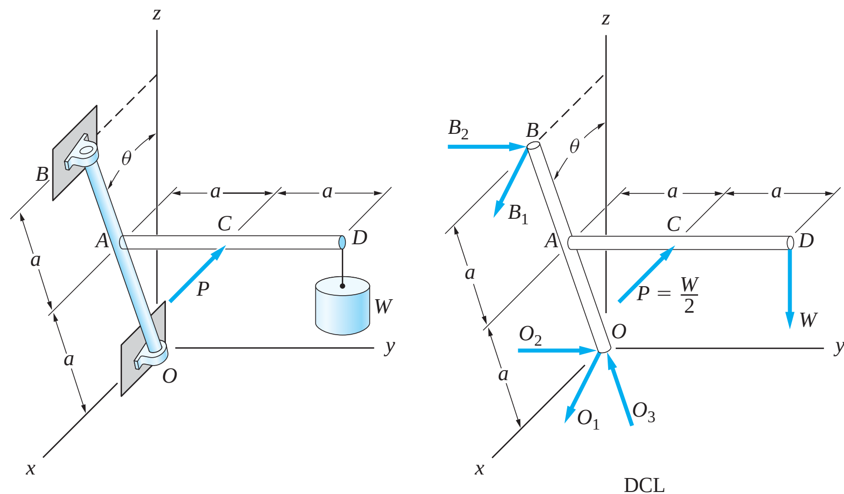


Fig. P5.24

5.25 La armadura espacial está soportada por juntas de rótula en B, D y F. Determine las fuerzas en los miembros AB, AC y AD.

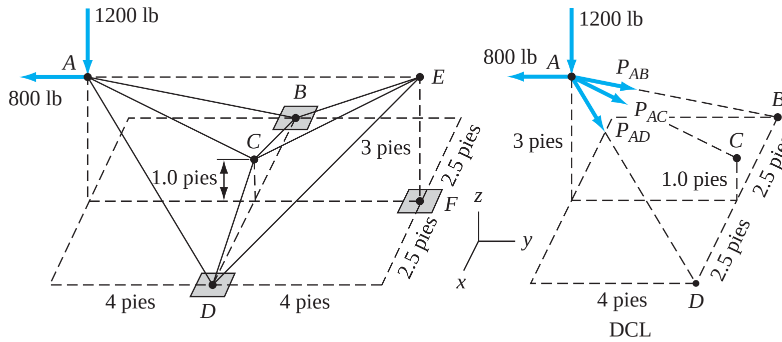


Fig. P5.25

5.26 Para la armadura descrita en el problema 5.25, encuentre las fuerzas en los miembros *BC* y *CE*.

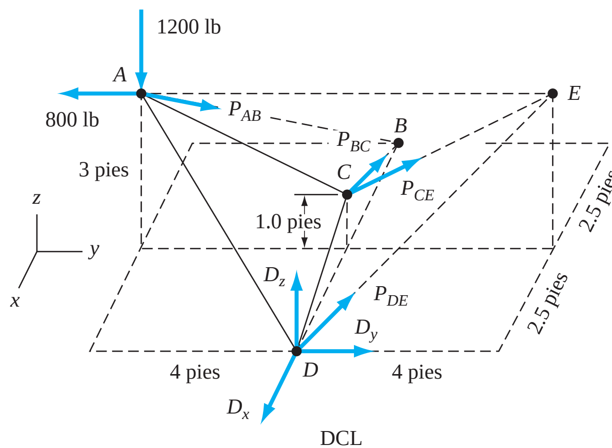


Fig. P5.26

5.7 *Análisis de equilibrio*

El método para analizar cuerpos rígidos sometidos a sistemas de fuerzas tridimensionales es el mismo que se utilizó en el capítulo 4 para cargas coplanares.

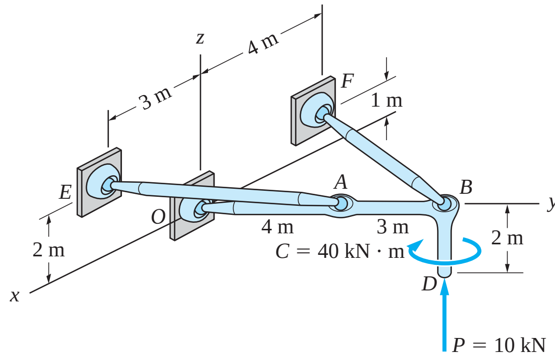
1. Se dibujan los diagramas de cuerpo libre.
2. Se escriben las ecuaciones de equilibrio.
3. Se obtienen las incógnitas resolviendo las ecuaciones.

La sección 5.3 se concentró sobre la elaboración de los DCL y la sección 5.6 se dedicó a escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio a partir de los DCL dados. Los siguientes problemas de ejemplo de esta sección ilustran el análisis completo de problemas de equilibrio tridimensional, iniciando con el trazo de los DCL y terminando con la solución. Se consideran los análisis de cuerpos simples y conectados.

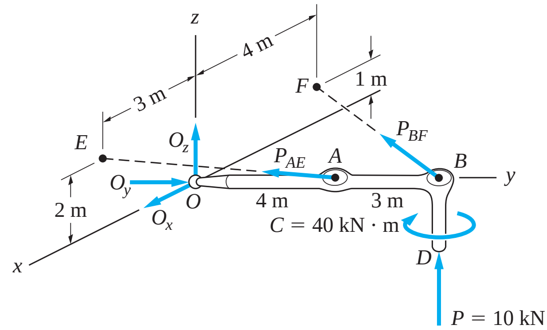
Se reitera que usted debe tener cuidado al dibujar los diagramas de cuerpo libre. Los bosquejos de problemas tridimensionales mal realizados son muy difíciles de leer; en consecuencia, son una fuente importante de errores en la deducción de las ecuaciones de equilibrio.

Problema de ejemplo 5.8

Determine las fuerzas que actúan sobre la barra doblada *OBD* en la figura (a). La barra está cargada por la llave que consiste en la fuerza *P* y el par *C*. Ignore los pesos de los miembros y suponga que todas las conexiones son juntas de rótula.



(a)



(b)

Solución

Método de análisis

El primer paso es dibujar el DCL de la barra *OBD*, que se muestra en la figura (b). Las reacciones en la rótula en *O* están identificadas O_x, O_y y O_z. Observe que se ha partido del hecho de que los puntales *AF* y *BF* son cuerpos de dos fuerzas, cada uno suponiendo que actúa a tensión.

Se observa que el DCL contiene cinco incógnitas (P_{AE}, P_{BF}, O_x, O_y y O_z). Como también hay cinco ecuaciones de equilibrio independientes, el problema está estáticamente determinado.

Con referencia al DCL en la figura (b), se consideran las ecuaciones de momentos respecto a los ejes *x* y *z* ($\Sigma M_y = 0$ está trivialmente satisfecha):

$$\Sigma M_x = 0\text{: contiene las incógnitas } P_{AE} \text{ y } P_{BF}$$

$$\Sigma M_z = 0\text{: contiene las incógnitas } P_{AE} \text{ y } P_{BF}$$

Por tanto, estas dos ecuaciones se pueden resolver simultáneamente para obtener P_{AE} y P_{BF}. Después de determinar estas dos incógnitas, se puede utilizar la ecuación de fuerzas $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ para encontrar las tres incógnitas restantes: O_x, O_y y O_z.

Detalles matemáticos

Se elige escribir los momentos respecto a los ejes *x* y *z* empleando la expresión vectorial $\Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma M_x\mathbf{i} + \Sigma M_y\mathbf{j} + \Sigma M_z\mathbf{k}$.

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{P}_{AE}) + (\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{P}_{BF}) + (\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{P}) + \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

Los vectores que aparecen en esta ecuación son

$$\mathbf{r}_{OA} = 4\mathbf{j}\text{ m} \qquad \mathbf{r}_{OB} = 7\mathbf{j}\text{ m} \qquad \mathbf{P} = 10\mathbf{k}\text{ kN} \qquad \mathbf{C} = -40\mathbf{k}\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{P}_{AE} = P_{AE}\boldsymbol{\lambda}_{AE} = P_{AE}\frac{\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|} = P_{AE}\left(\frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{5.385}\right)$$

$$\mathbf{P}_{BF} = P_{BF}\boldsymbol{\lambda}_{BF} = P_{BF}\frac{\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{BF}|} = P_{BF}\left(\frac{-4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}}{8.124}\right)$$

Expresando los productos cruz en forma de determinante, la ecuación de equilibrio $\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ se convierte en

$$\frac{P_{AE}}{5.385}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 4 & 0\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix} + \frac{P_{BF}}{8.124}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 7 & 0\\ -4 & -7 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{vmatrix} - 40\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Desarrollando los determinantes e igualando las componentes x y z (no hay componente y), se obtiene

$$\begin{aligned}&(\text{componente } x) \qquad 1.486P_{AE} + 0.862P_{BF} + 70 = 0\\ &(\text{componente } z) \qquad -2.228P_{AE} + 3.447P_{BF} - 40 = 0\end{aligned}$$

Resolviendo simultáneamente, se obtiene

$P_{AE} = -39.16$ kN $\qquad P_{BF} = -13.70$ kN $\qquad$ *Respuesta*

El signo de menos indica que el sentido de cada fuerza es opuesto al supuesto en el DCL. En forma vectorial, las dos fuerzas son

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{AE} &= P_{AE}\boldsymbol{\lambda}_{AE} = -39.16\left(\frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{5.385}\right)\\ &= -21.82\mathbf{i} + 29.09\mathbf{j} - 14.54\mathbf{k}\text{ kN}\\ \mathbf{P}_{BF} &= P_{BF}\boldsymbol{\lambda}_{BF} = -13.70\left(\frac{-4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}}{8.124}\right)\\ &= 6.75\mathbf{i} + 11.80\mathbf{j} - 1.69\mathbf{k}\text{ kN}\end{aligned}$$

Sumando fuerzas da

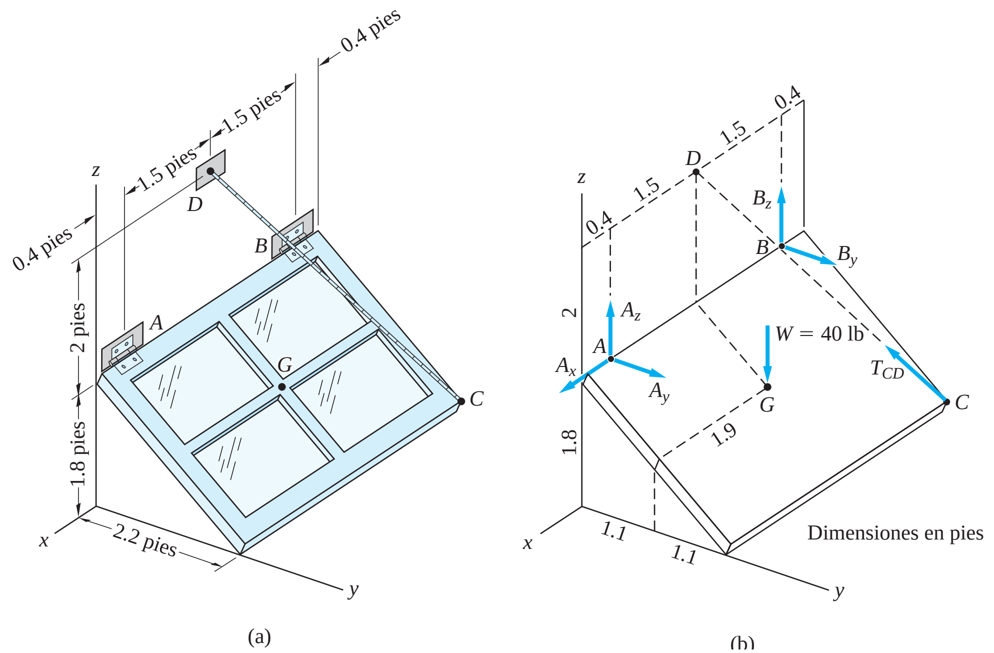
$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{P}_{AE} + \mathbf{P}_{BF} + \mathbf{P} + (O_x\mathbf{i} + O_y\mathbf{j} + O_z\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

Sustituyendo las expresiones para $\mathbf{P}_{AE}$, $\mathbf{P}_{BF}$ y $\mathbf{P}$, y resolviendo, da

$O_x = 15.1$ kN $\qquad O_y = -40.9$ kN $\qquad O_z = 6.2$ kN $\qquad$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 5.9

La ventana en la figura (a) pesa 40 lb; su centro de gravedad G está ubicado en el centro geométrico. Encuentre todas las fuerzas que actúan sobre la ventana cuando se mantiene abierta en la posición indicada por la cuerda unida a C. Suponga que la bisagra en A puede proporcionar un empuje axial pero no la bisagra en B.



Solución

Método de análisis

Se inicia dibujando en DCL de la ventana, consulte la figura (b). Además de su peso de 40 lb y la tensión T_{CD} en la cuerda, la ventana está sometida a las reacciones en las bisagras en A y B. Observe que un empuje axial (componente de la fuerza en la dirección x) se muestra sólo para la bisagra en A.

El DCL contiene seis incógnitas: A_x, A_y, A_z, B_y, B_z y T_{CD}. Como el sistema de fuerzas es el caso general, también hay seis ecuaciones de equilibrio independientes, lo que significa que el problema está estáticamente determinado.

En punto A tiene una función importante en el análisis de este problema, ya que tres de las incógnitas (A_x, A_y y A_z) pasan por el punto A. Con referencia al DCL, se examinan las ecuaciones de momentos siguientes:

$\Sigma(M_A)_x = 0$: contiene la incógnita T_{CD}

$\Sigma(M_A)_y = 0$: contiene las incógnitas T_{CD} y B_z (B_y es paralela a este eje)

$\Sigma(M_A)_z = 0$: contiene las incógnitas T_{CD} y B_y (B_z es paralela a este eje)

Estas tres ecuaciones escalares se pueden resolver para obtener las incógnitas T_{CD}, B_y y B_z. Una vez que se conocen estos valores, las tres componentes en A (A_x, A_y y A_z) se pueden encontrar con la ecuación de fuerzas $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Detalles matemáticos

Se utilizará la representación vectorial para determinar las ecuaciones de momentos respecto a los ejes que pasan por A; es decir, $\Sigma\mathbf{M}_A = (\Sigma M_A)_x\mathbf{i} + (\Sigma M_A)_y\mathbf{j} + (\Sigma M_A)_z\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{T}_{CD}) + (\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{r}_{AG} \times \mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

Escribiendo las fuerzas y vectores de posición en forma rectangular, se obtiene

$$\mathbf{T}_{CD} = T_{CD}\boldsymbol{\lambda}_{CD} = T_{CD}\frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = T_{CD}\left(\frac{1.9\mathbf{i} - 2.2\mathbf{j} + 3.8\mathbf{k}}{4.784}\right)$$

$$\mathbf{B} = B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} \qquad \mathbf{W} = -40\mathbf{k}\text{ lb}$$

$$\mathbf{r}_{AD} = -1.5\mathbf{i} + 2\mathbf{k}\text{ ft} \qquad \mathbf{r}_{AB} = -3\mathbf{i}\text{ pies}$$

$$\mathbf{r}_{AG} = -1.5\mathbf{i} + 1.1\mathbf{j} - 0.9\mathbf{k}\text{ pies}$$

Entonces, la forma de determinante de la ecuación $\Sigma\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ es

$$\frac{T_{CD}}{4.784}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1.5 & 0 & 2 \\ 1.9 & -2.2 & 3.8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1.5 & 1.1 & -0.9 \\ 0 & 0 & -40 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Desarrollando los determinantes anteriores y agrupando componentes iguales, se obtiene

$$\begin{aligned} &(\text{componente } x) \quad 0.9197T_{CD} \qquad\qquad\qquad -44.0 = 0 \\ &(\text{componente } y) \quad 1.9858T_{CD} \qquad +3B_z - 60.0 = 0 \\ &(\text{componente } z) \quad 0.6898T_{CD} - 3B_y \qquad\qquad = 0 \end{aligned}$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene

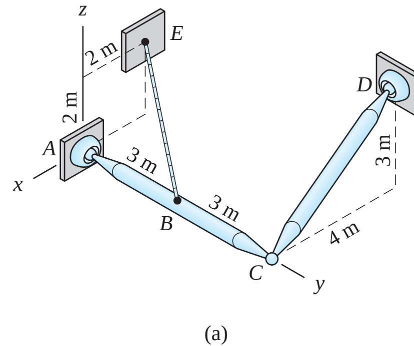
$T_{CD} = 47.84$ lb $\qquad B_y = 11.00$ lb $\qquad B_z = -11.67$ lb $\qquad$ *Respuesta*

Omitiendo detalles, las tres incógnitas restantes se determinan a partir de la ecuación de fuerzas $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ que son

$A_x = -19.00$ lb $\qquad A_y = 11.00$ lb $\qquad A_z = 13.67$ lb $\qquad$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 5.10

Las dos barras *AC* y *CD* son homogéneas y pesan 200 N/m. Las juntas *A*, *C* y *D* son de rótula y un cable está unido entre *B* y *E*. Determine todas las fuerzas que actúan sobre la barra *AC*.



(a)

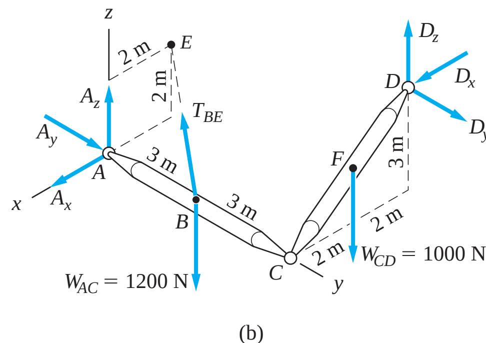
Solución

Método de análisis

Como sabe, existen muchas formas para calcular las fuerzas desconocidas que actúan sobre cuerpos que están conectados entre sí. Sin embargo, considerar el DCL de todo el conjunto es un buen punto de partida.

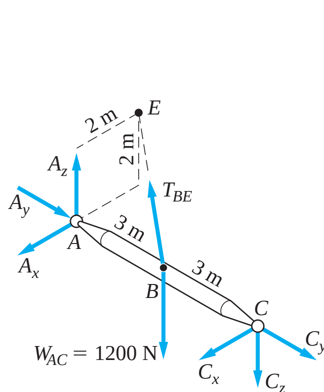
El DCL de todo el conjunto se muestra en la figura (b). Los pesos de las barras, W_{AC} y W_{CD}, se calcularon multiplicando el peso por longitud unitaria (200 N/m) por la longitud de cada barra. Las componentes de las reacciones en *A* son A_x, A_y y A_z; las componentes de la reacción en *D* son D_x, D_y y D_z; T_{BE} es la tensión en el cable.

Se observa que el DCL en la figura (b) contiene siete incógnitas (tres componentes de fuerza en *A* y tres componentes de fuerza en *D*, y la tensión en T_{BE}). Como sólo hay seis ecuaciones de equilibrio independientes (el sistema de fuerzas representa el caso general), no se pueden calcular todas las incógnitas sin desarmar el conjunto. Sin embargo, se observa que T_{BE} es la única incógnita que no interseca el eje *AD*. Por tanto, se puede encontrar T_{BE} a partir de la ecuación de momentos $\Sigma M_{AD} = 0$.

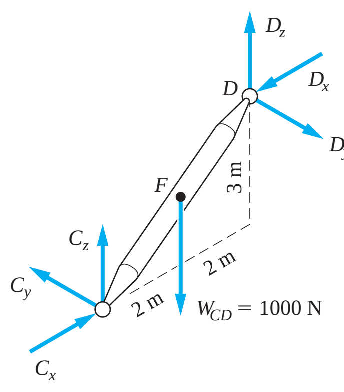


(b)

Luego se trazan los DCL de las barras *AC* y C*D* por separado, consulte las figuras (c) y (d). Las componentes de la fuerza en *A* en la figura (c) y las componentes de la fuerza en *D* en la figura (d) deben actuar en las mismas direcciones que en la figura (b). Además, las componentes de la reacción en *C* (C_x, C_y y C_z) en la figura (c) deben ser iguales en magnitud, pero en sentido opuesto, a las componentes correspondientes en la figura (d). Se observa que hay diez incógnitas en este problema: tres en cada punto en *A*, *C* y *D* y la tensión T_{BE}. El número total de ecuaciones de equilibrio independientes también es diez: cinco para cada una de las barras (el sistema de fuerzas actuando sobre cada barra representa el caso especial en el que las fuerzas intersecan un eje). Por tanto, este problema está estáticamente determinado.



(c)



(d)

Con referencia al DCL en la figura (d), C_y se puede calcular utilizando la ecuación de momentos $\Sigma(M_D)_z = 0$. Luego, considere el DCL en la figura (c). Como ya se determinó T_{BE} y C_y, sólo quedan cinco incógnitas: A_x, A_y, A_z, C_x y C_z. Por tanto, cualquiera de las cinco ecuaciones independientes para este DCL se puede utilizar para determinar estas incógnitas.

Detalles matemáticos

Con referencia al DCL de todo el conjunto en la figura (b) y empleando triples productos escalares para evaluar los momentos respecto al eje *AD*, se obtiene

$$\Sigma M_{AD} = 0$$

$$(\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{T}_{BE} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{AD}) + (\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{W}_{AC} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{AD}) + (\mathbf{r}_{AF} \times \mathbf{W}_{CD} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{AD}) = 0$$

Los vectores que aparecen en esta ecuación son

$$\mathbf{r}_{AB} = 3\mathbf{j}\text{ m} \qquad \mathbf{r}_{AF} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}\text{ m}$$

$$\mathbf{W}_{AC} = -1200\mathbf{k}\text{ N} \qquad \mathbf{W}_{CD} = -1000\mathbf{k}\text{ N}$$

$$\mathbf{T}_{BE} = T_{BE}\boldsymbol{\lambda}_{BE} = T_{BE}\frac{\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BE}|} = T_{BE}\left(\frac{-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{4.123}\right)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{-4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{7.810}$$

Entonces, la ecuación $\Sigma M_{AD} = 0$ se convierte en

$$\frac{1}{7.810}\frac{T_{BE}}{4.123}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} + \frac{1}{7.810}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1200 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$
$$+ \frac{1}{7.810}\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1.5 \\ 0 & 0 & -1000 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando los determinantes y resolviendo da

$$T_{BE} = 18\,140 \text{ N}$$ *Respuesta*

Utilizando el DCL de la barra *CD* en la figura (d),

$\Sigma(M_D)_z = 0$ da $C_y = 0$ *Respuesta*

Como ya se mencionó, con T_{BE} y C_y ya calculadas, se puede utilizar cualquiera de las cinco ecuaciones disponibles para encontrar las cinco fuerzas desconocidas restantes en el DCL de la barra *AC* en la figura (c). Un método para encontrar las fuerzas en *A* y *C* se resume a continuación; los detalles matemáticos se dejan como ejercicio.

$\Sigma F_y = 0$ da $A_y = 13\,200$ N *Respuesta*

$\Sigma(M_C)_x = 0$ da $A_z = 3800$ N *Respuesta*

$\Sigma(M_C)_z = 0$ da $A_x = 4400$ N *Respuesta*

$\Sigma F_x = 0$ da $C_x = 4400$ N *Respuesta*

$\Sigma F_z = 0$ da $C_z = 3800$ N *Respuesta*

Problemas

5.27 Calcule todas las fuerzas que actúan sobre la barra *AB* descrita en el problema 5.1.

5.28 Determine las fuerzas en los miembros *AD*, *BD* y *CD* de la armadura espacial en el problema 5.3.

5.29 Encuentre la tensión en el cable *BE* que soporta la barra *ABCD* descrita en el problema 5.6.

5.30 Para la estructura en el problema 5.9, determine las reacciones en *C* y *D*.

5.31 Calcule la reacción en *D* para la estructura descrita en el problema 5.11.

Fig. P5.32

Fig. P5.33, P5.34

Fig. P5.35

5.32 El marco está soportado por una junta de rótula en *A* y un cojinete deslizante en *C*. El puntal *EF* tiene una junta de rótula en cada extremo. El cable *EBD* pasa sobre una polea pequeña en *B* y soporta un peso de 600 lb en *D*. Ignorando los pesos de los miembros, determine la fuerza en *EF* y la magnitud de la reacción en *C*.

5.33 Determine la tensión en cada una de las cuerdas que soportan la caja de 600 lb.

5.34 Utilizando sólo una ecuación de equilibrio, calcule la fuerza en la cuerda *AD* del problema 5.33.

5.35 La barra homogénea *AB* de 25 kg está soportada por una junta de rótula en *A*. El extremo *B*, que está apoyado contra un muro vertical sin fricción, evita que se deslice por la fuerza horizontal *P*. Determine *P* y la fuerza ejercida por el muro en *B*.

5.36 El eje *AB* está soportado por un cojinete de empuje en *A* y uno deslizante en *B*. Determine la fuerza en el cable *CD* y las reacciones en los cojinetes en *A* y *B* causadas por la fuerza vertical de 90 N aplicada en *E*. Ignore los pesos.

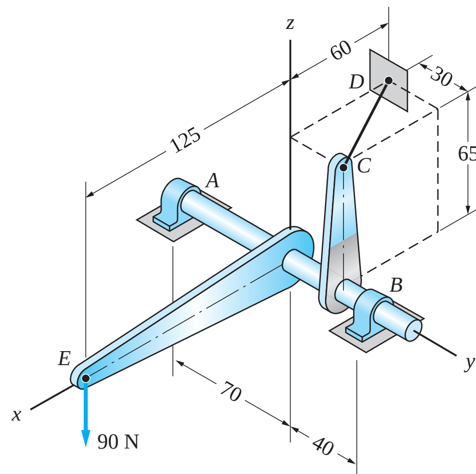


Fig. P5.36

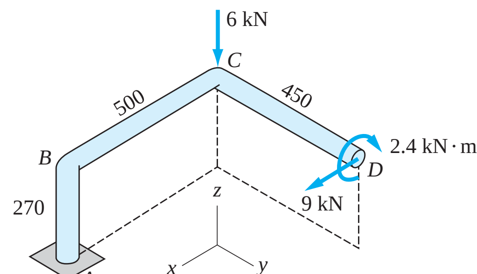


Fig. P5.37

5.37 La barra *ABCD* está empotrada en *A*. Calcule la fuerza y el par ejercidos por el empotramiento sobre la barra. Ignore el peso de la barra y exprese las respuestas en forma vectorial.

5.38 La masa total de la viga en forma de L de sección transversal constante es 1470 kg. La viga se sube por tres cables verticales unidos en *O*, *A* y *B*. Determine las distancias *a* y *b* para las cuales las tensiones en los cables son iguales.

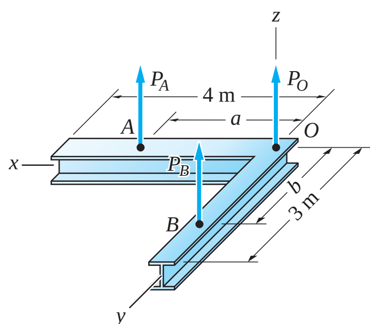


Fig. P5.38

5.39 La manivela está soportada por un cojinete de empuje en *A*, uno deslizante en *B* y una superficie sin fricción en *D*. Calcule las reacciones en *A*, *B* y *D* si $P = 200$ lb y $C = 800$ lb · pie. El peso de la manivela se puede ignorar.

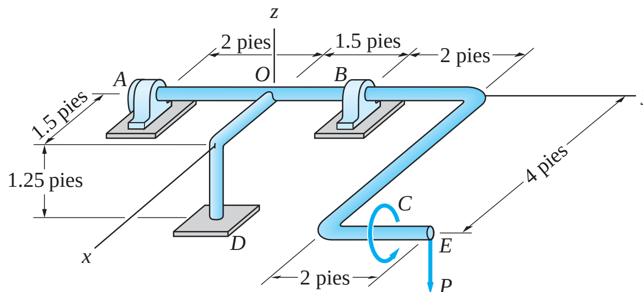


Fig. P5.39

5.40 Un peso de 120 lb está unido al cable que está enrollado alrededor del cilindro homogéneo de 50 lb. El eje unido al cilindro está soportado por un cojinete de empuje en *A* y uno deslizante en *B*. El cilindro se mantiene en equilibrio por la

fuerza vertical *P* que actúa sobre la manija de la manivela. Determine *P* y las reacciones en *A* y *B*. Ignore los pesos de la manivela y del eje.

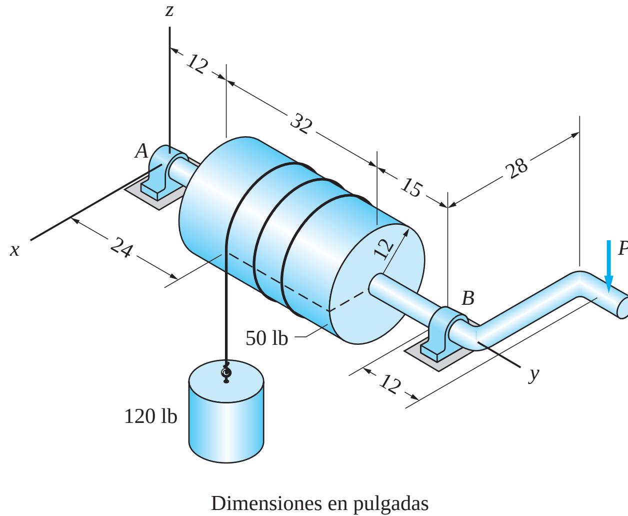


Fig. P5.40

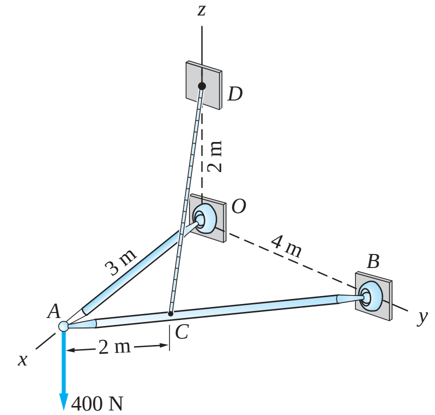


Fig. P5.41

5.41 Calcule la fuerza en el cable *CD* y la reacción en *O*. Suponga que *O*, *A* y *B* son juntas de rótula e ignore los pesos de los miembros.

5.42 La placa homogénea de 48 lb está soldada al eje vertical *AB* de peso despreciable. El conjunto está soportado por un cojinete deslizante en *A* y uno de empuje en *B*. Determine la fuerza en el cable *CD* y la magnitud de la reacción en el cojinete en *A*.

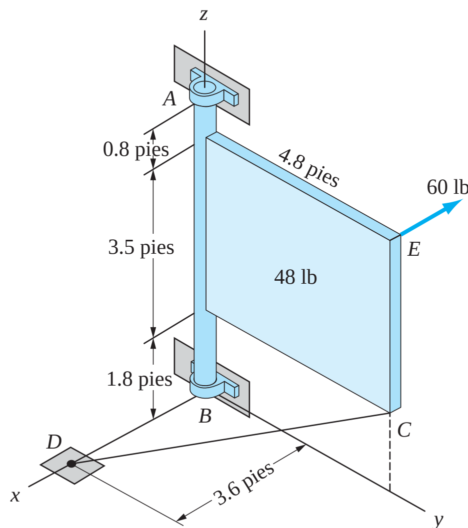


Fig. P5.42

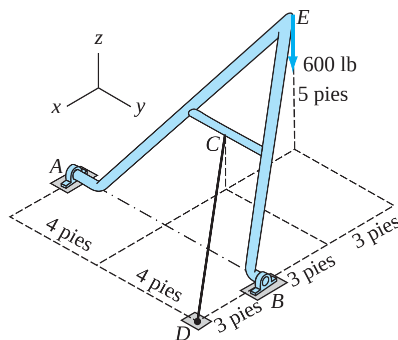


Fig. P5.43

5.43 El marco en forma de A está soportado por un cojinete de empuje en *A*, uno deslizante en *B* y el cable *CD*. Calcule la tensión en el cable y las componentes de la reacción en el cojinete en *B* ocasionada por la carga de 600 lb.

5.44 Un montacargas se forma conectando las barras *BD* y *BE* al miembro *ABC*. Ignorando los pesos de los miembros y suponiendo que todas las conexiones son juntas de rótula, determine las magnitudes de las fuerzas en las barras *BD* y *BE* en términos de la carga aplicada *P*.

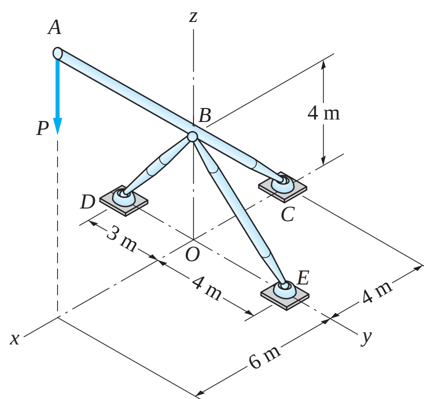


Fig. P5.44

5.45 El brazo de la manivela *OD* del malacate está conectado por una junta universal en *D* al conjunto eje-polea. El malacate está soportado por cojinetes deslizantes en *B* y *E* y por un cojinete de empuje en *G*. Determine la fuerza *P* que mantendrá en reposo el malacate y calcule las magnitudes de las reacciones correspondientes en los cojinetes. Ignore los pesos de los miembros.

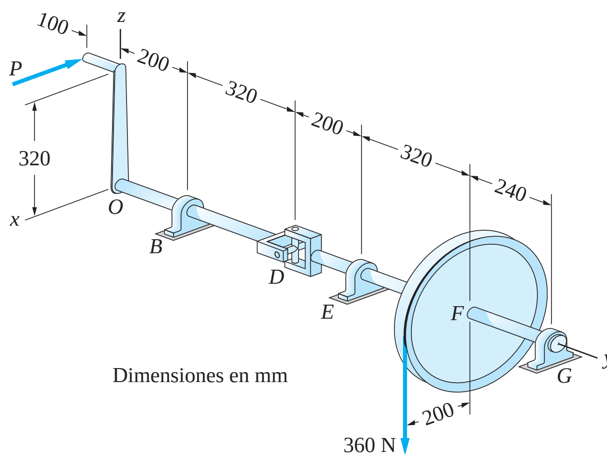


Fig. P5.45

5.46 La puerta homogénea de 40 lb está rígidamente unida a la barra doblada *ABC*. El conjunto está soportado por un cojinete de empuje en *A* y uno deslizante en *C*. Determine la fuerza vertical *P* requerida para mantener la puerta en equilibrio en la posición indicada. Ignore el peso de la barra *ABC*.

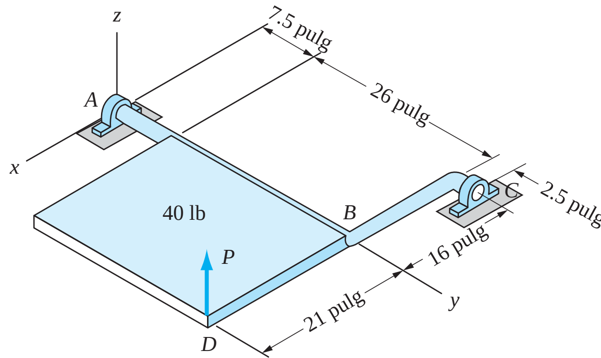


Fig. P5.46

5.47 El marco está empotrado en el muro en *D* y *G*. Los miembros transversales *AE* y *BF* pasan por agujeros sin fricción en *A*, *B*, *E* y *F*. Los pesos de los miembros son despreciables. Determine las reacciones en *D*.

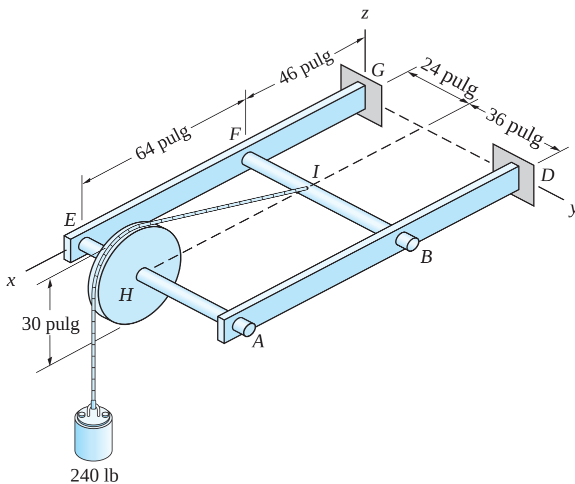


Fig. P5.47

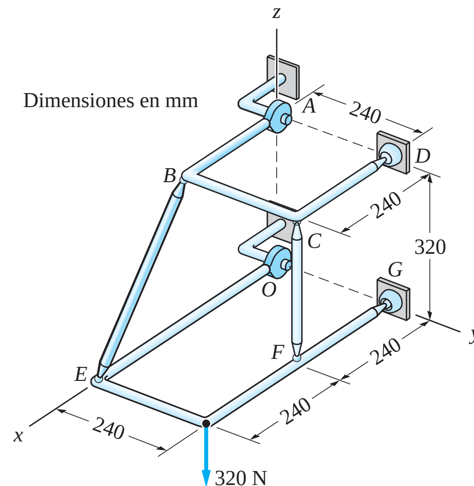


Fig. P5.48

5.48 Todas las conexiones de la estructura son juntas de rótula, excepto los cojinetes deslizantes en *A* y *O*. Los pesos de los miembros se pueden ignorar. Calcule las fuerzas en los miembros *BE* y *CF*.

5.49 Determine las reacciones en las juntas de rótula D, E y F de la armadura espacial ilustrada. Exprese las respuestas en forma vectorial.

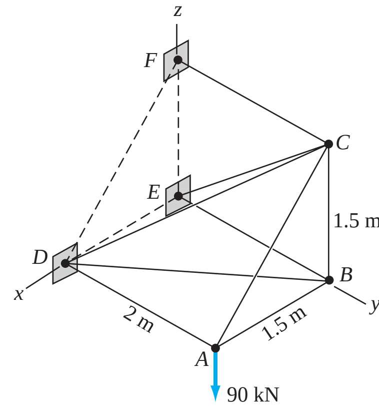


Fig. P5.49

Repaso de ecuaciones

Ecuaciones de equilibrio en tres dimensiones

Caso general $\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ (6 ecuaciones)

Sistema de fuerzas concurrentes $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (3 ecuaciones)

Todas las fuerzas paralelas al eje z $\Sigma F_z = \Sigma M_x = \Sigma M_y = 0$ (3 ecuaciones)

Todas las fuerzas intersecan el eje z $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ (5 ecuaciones)

Problemas de repaso

5.50 La armadura espacial está soportada por cables verticales en *A*, *B* y *C*. Calcule las fuerzas en los miembros *CB* y *CD* de la armadura.

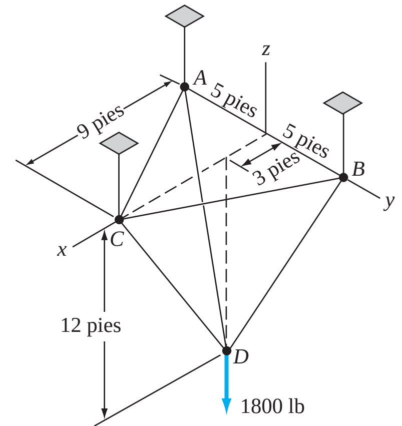


Fig. P5.50

5.51 La barra doblada está soportada por una junta de rótula en *O*, un cable en *B* y un cojinete deslizante en *D*. Ignorando el peso de la barra, calcule la tensión en el cable y la magnitud de la reacción en el cojinete en *D*.

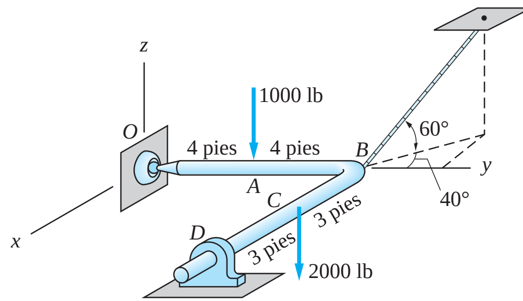


Fig. P5.51

5.52 Encuentre la carga máxima *P* que puede soportar el trípode si la fuerza en cualquier pata está limitada a 2000 lb. Suponga que las patas son cuerpos de dos fuerzas.

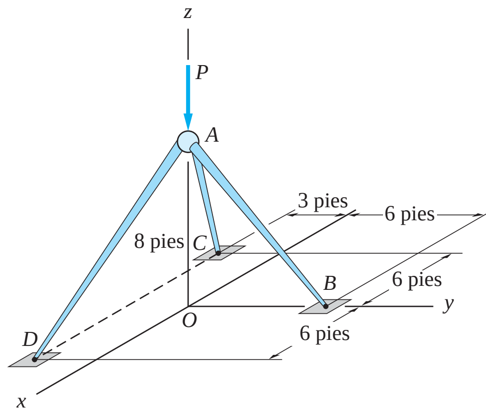


Fig. P5.52

5.53 El mástil vertical *OA*, que pesa 1.5 kN, está soportado por una junta de rótula en *O* y por los cables *AB* y *AC*. Calcule la tensión en cada cable, cuando se aplica la fuerza de 20 kN.

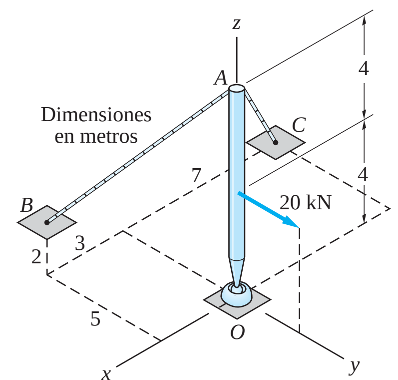


Fig. P5.53

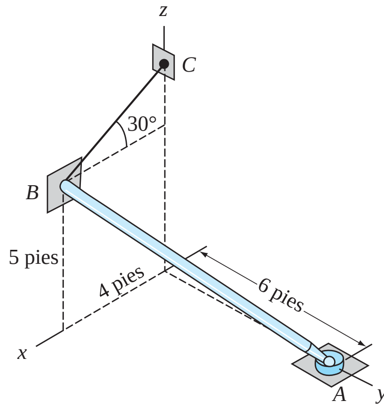


Fig. P5.54

5.54 La barra homogénea *AB* pesa 80 lb. El extremo *B* está apoyado contra un muro vertical y el extremo *A* está soportado por una junta de rótula. Determine la tensión en el cable *BC* y la reacción en el muro en *B*. Ignore la fricción.

5.55 La caja de 500 kg está soportada por tres cables. Encuentre la tensión en el cable *AD*.

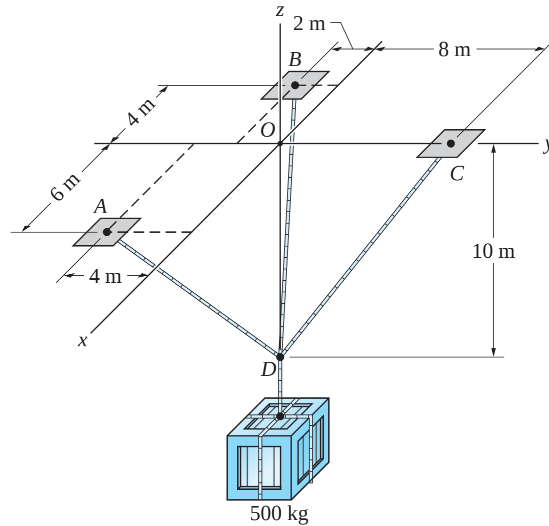


Fig. P5.55

5.56 Las barras uniformes *AB* y *BC* pesan cada una 4 lb/pie. Calcule la tensión en el cable *DE* y las magnitudes de las reacciones en las rótulas en *A*, *B* y *C*.

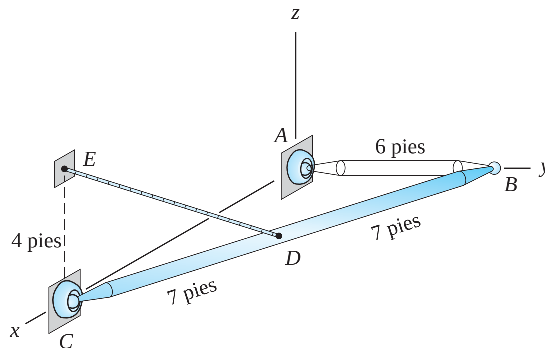


Fig. P5.56

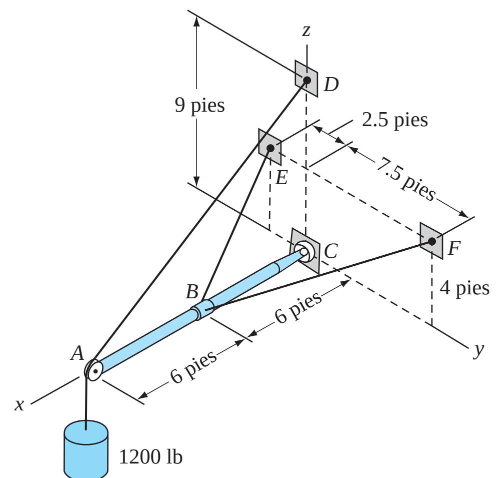


Fig. P5.57

5.57 El peso de 1200 lb pende de un cable que pasa sobre una pequeña polea unida a la barra *ABC*. La barra está soportada por una junta de rótula en *C* y dos cables unidos en *B*. Ignorando el peso de la barra, determine la tensión en el cable *BE*.

5.58 Una barra homogénea *AB* de 860 kg está soportada por una junta de rótula en *A* y dos cables unidos a *B*. Encuentre la tensión en el cable *CB*.

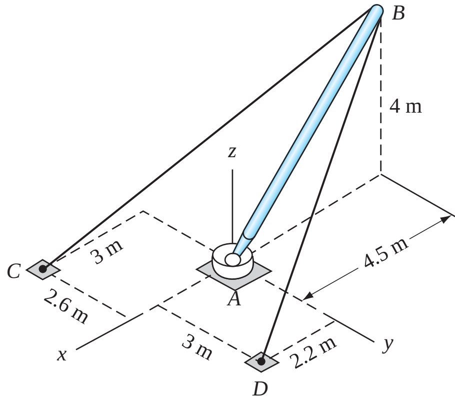


Fig. P5.58

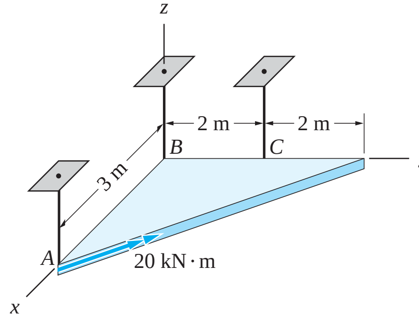


Fig. P5.59

5.59 Una placa triangular está soportada por tres barras verticales, cada una puede soportar una fuerza de tensión o compresión. Calcule la fuerza en cada barra cuando se aplica el par de 20 kN · m. Ignore el peso de la placa.

5.60 Las conexiones en los extremos de las barras *AB* y *BC* son juntas de rótula. Ignorando los pesos de las barras, determine la fuerza en el cable *DE* y la reacción en *A*.

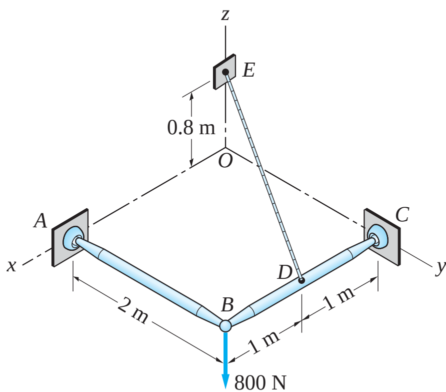


Fig. P5.60

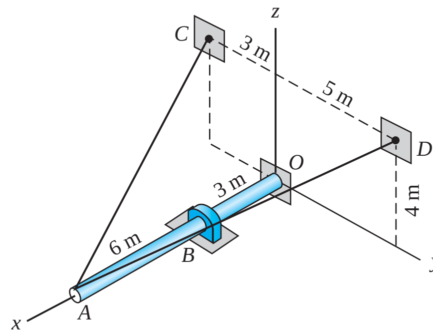


Fig. P5.61

5.61 La barra *ABO* de 150 kg está soportada por dos cables en *A* y un cojinete deslizante en *B*. El extremo de la barra presiona contra una superficie sin fricción en *O*. Encuentre las tensiones en los cables y la fuerza de contacto en *O*.

5.62 El eje está soportado por un cojinete de empuje en *A* y uno deslizante en *B*. El cable *CD* impide la rotación del eje. Calcule la tensión en el cable y la magnitud de la reacción en el cojinete en *B* causada por el par de 50 lb · pie.

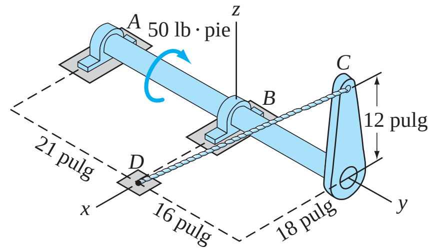
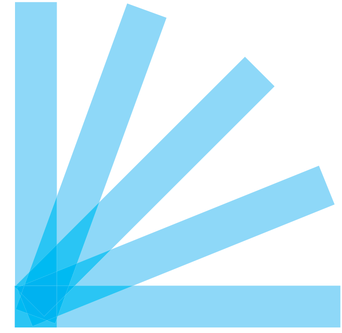


Fig. P5.62



6 Vigas y cables



Los cables son los componentes estructurales principales de un puente colgante. En este capítulo se muestra cómo determinar la tensión en un cable ante una variedad de condiciones de carga. George Doyle/ Stockbyte/Getty Images

*6.1 Introducción

En este capítulo se introducen los análisis de vigas y cables flexibles, dos temas importantes de la mecánica estructural. El análisis de vigas que soportan cargas transversales trata del cálculo de fuerzas y pares internos. Como las fuerzas y pares internos pueden variar de una manera complicada con la distancia a lo largo de una viga, se pondrá énfasis considerable en los métodos de cálculo y en las representaciones gráficas de los resultados.

El análisis de cables flexibles también puede volverse muy complejo; la fuente de la dificultad se encuentra en la geometría del cable. Dado que un cable puede soportar sólo una fuerza de tensión, éste debe ajustar su forma de manera que la tensión interna esté en equilibrio con las cargas aplicadas. Por tanto, la geometría del cable no siempre se conoce al inicio del análisis. Cuando se desconoce la forma del cable, la solución invariablemente conduce a ecuaciones no lineales, que se pueden resolver sólo de manera numérica.

PARTE A: *Vigas*

*6.2 *Sistemas de fuerzas internas*

La determinación de fuerzas internas es un paso fundamental en el diseño de miembros que soportan cargas. Sólo después de efectuar este cálculo es que un ingeniero puede seleccionar las dimensiones apropiadas para un miembro o elegir el material con que se debe fabricar.

Si se conocen las fuerzas externas que mantienen un miembro en equilibrio, se pueden calcular las fuerzas internas mediante un análisis directo de equilibrio. Por ejemplo, considere la barra en la figura 6.1(a) que está cargada por las fuerzas externas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,…, $\mathbf{F}_5$. Para determinar el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la sección transversal identificada 1 (perpendicular al eje de la barra), primero se deben aislar las partes de la barra que se encuentren a cualquier lado de la sección 1. El diagrama de cuerpo libre (DCL) de la parte a la izquierda de la sección 1 se muestra en la figura 6.1(b). Además de las fuerzas externas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$, en este DCL se muestra el sistema resultante fuerza-par de las fuerzas internas que están distribuidas sobre la sección transversal: la fuerza resultante **R** que actúa en el centroide *C* de la sección transversal y el par resultante $\mathbf{C}^R$. Como se explicó en el capítulo 3, la fuerza resultante **R** se puede colocar en cualquier punto, siempre que se introduzca el par resultante apropiado. Sin embargo, ubicar **R** en el centroide de la sección transversal

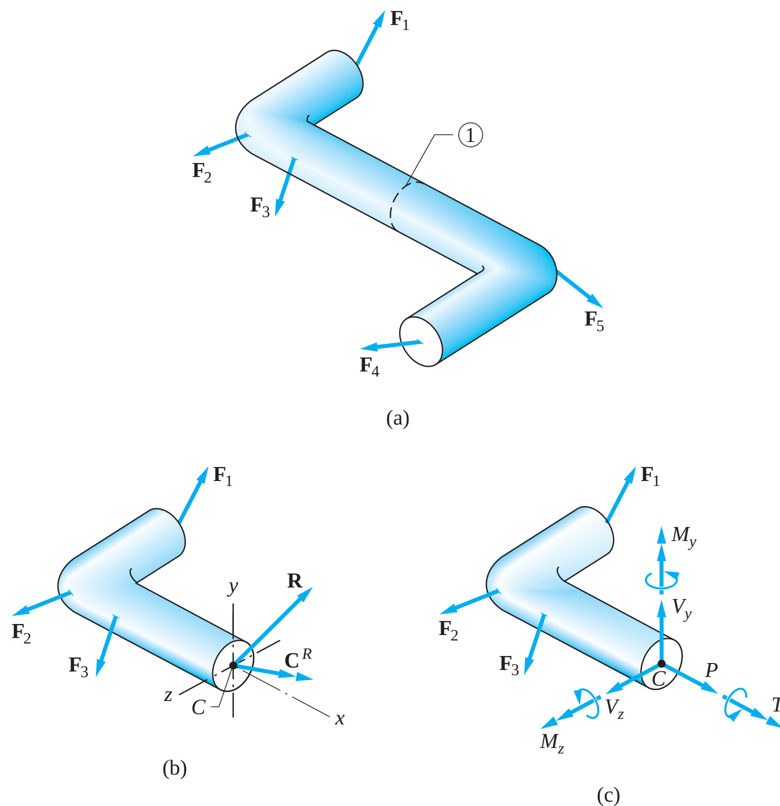


Fig. 6.1

es la práctica ingenieril estándar. Si $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ se conocen, se pueden utilizar las ecuaciones de equilibrio $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$ para calcular $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$.

Es convencional introducir el sistema de coordenadas centroidal ilustrado en la figura 6.1(b). El eje que es perpendicular a la sección transversal y que pasa por el centroide (eje x) se denomina *eje centroidal*. Las componentes de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}^R$ relativas a este sistema de coordenadas se identifican por las cantidades mostradas en la figura 6.1(c) y se les dan los nombres físicamente significativos siguientes:

P: la componente de fuerza que es perpendicular a la sección transversal, que tiende a alargar o acortar la barra, se denomina *fuerza normal*.

V_y y V_z: las componentes de fuerza que se encuentran en el plano de la sección transversal, que tienden a deslizar (cortar) las partes de la barra que se encuentran a cualquier lado de la sección transversal relativa a la otra, se denominan *fuerzas cortantes*.

T: la componente del par resultante que tiende a torcer la barra se denomina *momento de torsión* o *par de torsión*.

M_y y M_z: las componentes del par resultante que tienden a doblar la barra se denominan *momentos flexionantes*.

Las deformaciones producidas por estas fuerzas y pares internos se ilustran en la figura 6.2.

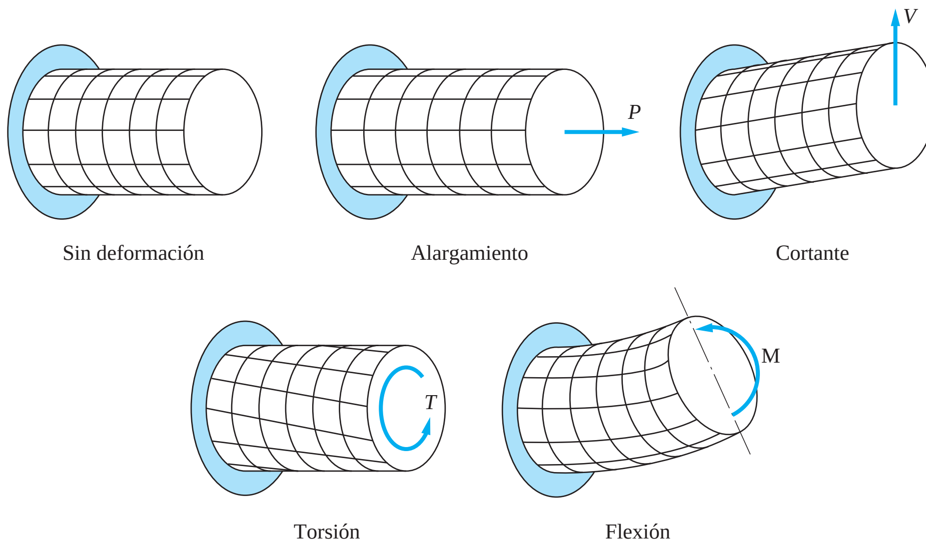


Fig. 6.2

En muchas aplicaciones las fuerzas externas son coplanares y se encuentran en un plano que contiene el eje centroidal. En la figura 6.3(a) se ilustra el caso en el que todas las fuerzas externas se encuentran en el plano x-y, donde el eje x coincide con el eje centroidal de la barra. En este caso especial, las únicas componentes del sistema de fuerzas internas que no son cero y que actúan sobre cualquier sección transversal, por ejemplo, la sección 1, son la fuerza normal P, la fuerza cortante V y el momento flexionante M, como se muestra en la figura 6.3(b).

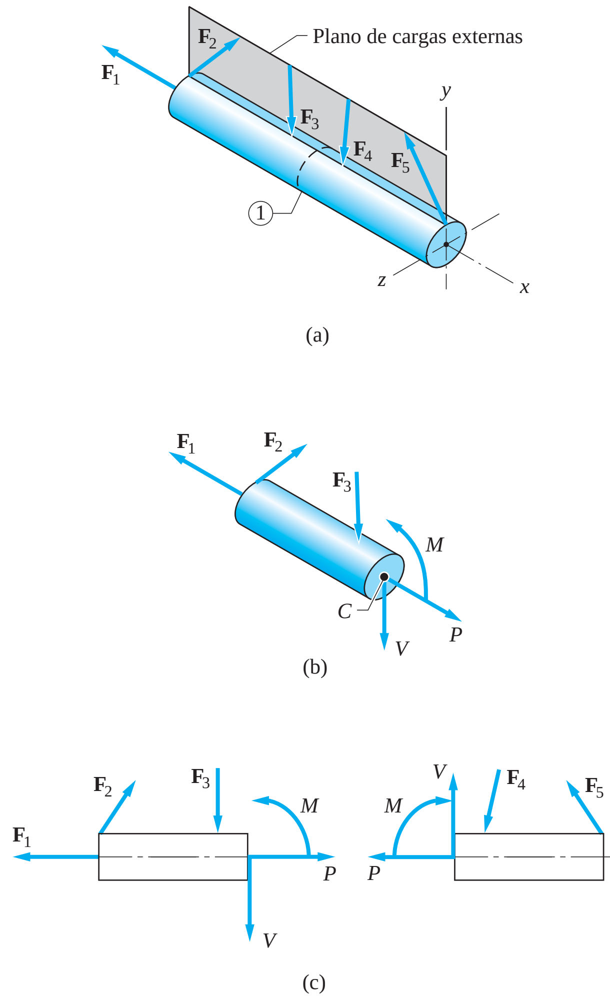
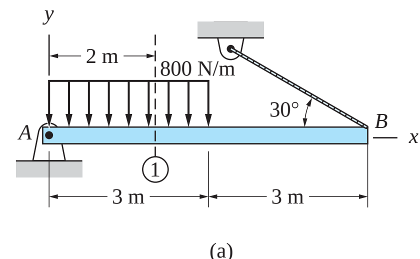


Fig. 6.3

Hasta este punto, nos hemos concentrado en el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la parte de la barra que se encuentra a la izquierda de la sección 1. Utilizando la tercera ley de Newton, estas fuerzas internas ocurren en pares iguales y opuestos sobre los dos lados de la sección transversal, como se muestra en la figura 6.3(c). En las secciones siguientes, enfocamos nuestra atención a calcular las fuerzas y pares internos en miembros sometidos a *fuerzas coplanares*.

Problema de ejemplo 6.1

La barra en la figura (a), soportada por un pasador en A y un cable en B, resiste una carga uniformemente distribuida sobre su mitad izquierda. Ignorando el peso de la barra, determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan sobre la sección transversal en 1 analizando: 1. el segmento de la barra a la izquierda de la sección 1, y 2. el segmento de la barra a la derecha de la sección 1.

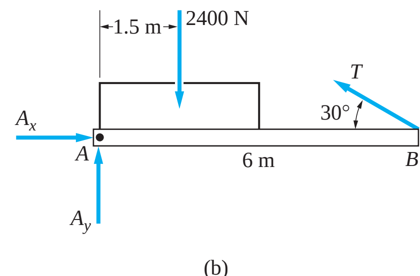


(a)

Solución

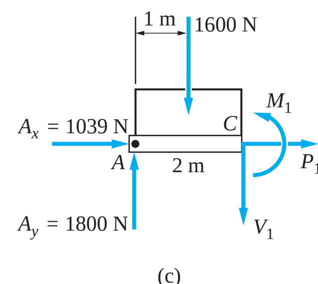
Cálculos preliminares

Se deben calcular las reacciones externas antes de que se pueda determinar el sistema de fuerzas internas. Como se muestra en el DCL en la figura (b), la barra está sometida a las fuerzas siguientes: las componentes A_x y A_y de la reacción en el pasador en A, la tensión T en el cable en B y la resultante de 2400 N de la carga uniformemente distribuida. En el análisis de equilibrio se determina las reacciones de la manera siguiente:



(b)

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad T \text{ sen } 30^\circ(6) - 2400(1.5) = 0$$
$$T = 1200 \text{ N}$$
$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad A_x - T\cos 30^\circ = 0$$
$$A_x = T\cos 30^\circ = 1200\cos 30^\circ$$
$$A_x = 1039 \text{ N}$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad A_y - 2400 + T\text{ sen } 30^\circ = 0$$
$$A_y = 2400 - T\text{ sen } 30^\circ = 2400 - 1200\text{ sen } 30^\circ$$
$$A_y = 1800 \text{ N}$$

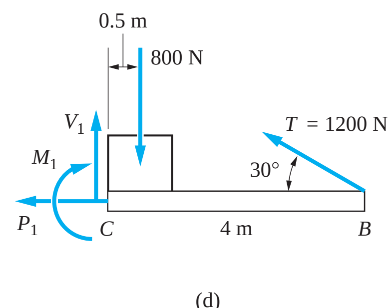


(c)

Como estas respuestas son positivas, cada una de las reacciones están dirigidas como se supuso en la figura (b).

Para determinar el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la sección transversal en 1, se deben aislar los segmentos de la barra que se encuentran a cualquier lado de la sección 1. Los DCL de los segmentos a la izquierda y a la derecha de la sección 1 se muestran en las figuras (c) y (d), respectivamente. Observe que al determinar las resultantes de cargas distribuidas, sólo se considera la parte de la carga que actúa sobre el segmento.

El sistema de fuerzas que actúa sobre la sección transversal en 1 consiste en la fuerza normal P_1, la fuerza cortante V_1 y el momento flexionante M_1. Para ser consistente con la tercera ley de Newton (reacciones iguales y opuestas), P_1, V_1 y M_1 en la figura (c) se muestran iguales en magnitud, pero dirigidas opuestamente a sus contrapartes en la figura (d). Para calcular P_1, V_1 y M_1 se puede utilizar cualquier DCL.



(d)

Parte 1

Aplicando las ecuaciones de equilibrio al DCL del segmento de la barra que se encuentra a la izquierda de la sección 1, figura (c), se obtiene

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad P_1 + 1039 = 0$$
$$P_1 = -1039 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 1800 - 1600 - V_1 = 0$$

$$V_1 = 1800 - 1600 = 200 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad \circlearrowleft + \quad -1800(2) + 1600(1) + M_1 = 0$$

$$M_1 = 3600 - 1600 = 2000 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Respuesta}$$

El signo negativo en P_1 indica que su sentido es opuesto al que se muestra en el DCL.

Parte 2

Aplicando las ecuaciones de equilibrio al DCL del segmento de barra a la derecha de la sección 1, figura (d), se obtiene

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad -P_1 - 1200 \cos 30^\circ = 0$$

$$P_1 = -1200 \cos 30^\circ = -1039 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad V_1 + 1200 \operatorname{sen} 30^\circ - 800 = 0$$

$$V_1 = -1200 \operatorname{sen} 30^\circ + 800 = 200 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

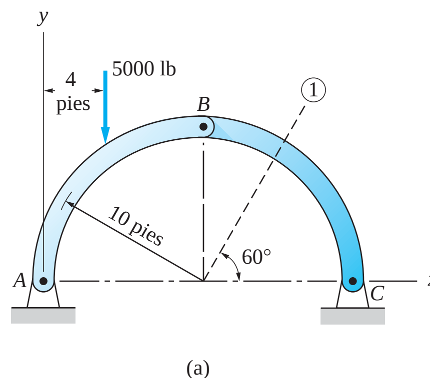
$$\Sigma M_C = 0 \quad \circlearrowleft + \quad -M_1 - 800(0.5) + 1200 \operatorname{sen} 30^\circ (4) = 0$$

$$M_1 = -800(0.5) + 1200 \operatorname{sen} 30^\circ (4) = 2000 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Respuesta}$$

Estas respuestas concuerdan, por supuesto, con las obtenidas en la parte 1.

Problema de ejemplo **6.2**

El arco circular articulado soporta una carga vertical de 5000 lb, como se muestra en la figura (a). Ignorando los pesos de los miembros, determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan sobre la sección transversal en 1.



(a)

Solución

El DCL del arco completo se muestra en la figura (b). Las fuerzas A_x y A_y son las componentes de las reacciones en el pasador en A y R_C es la reacción en el pasador en C. Reconociendo que el miembro BC es de dos fuerzas, se sabe que R_C está dirigida a lo largo de la línea BC. En general, todas las reacciones externas se deben calcular antes de determinar los sistemas de fuerzas internas. Sin embargo, en este problema, sólo se necesita calcular R_C. Del DCL en la figura (b) se obtiene

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft{+} \quad R_C \operatorname{sen} 45^\circ(20) - 5000(4) = 0$$

$$R_C = 1414 \text{ lb}$$

Luego se considera el DCL de la parte CD ilustrado en la figura (c). Las fuerzas D_x y D_y son las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante que actúa sobre la sección transversal y M_1 es el momento flexionante. Se podrían calcular D_x, D_y y M_1 reconociendo que su resultante es una sola fuerza que es igual y opuesta a R_C. Sin embargo, es más simple calcular estas incógnitas utilizando las ecuaciones de equilibrio siguientes:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad D_x - 1414 \cos 45^\circ = 0 \qquad D_x = 1000 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad -D_y + 1414 \operatorname{sen} 45^\circ = 0 \qquad D_y = 1000 \text{ lb}$$

$$\Sigma M_D = 0 \quad \circlearrowleft{+} \quad M_1 - 1414 \cos 45^\circ(8.66) - 1414 \operatorname{sen} 45^\circ(5.00) = 0$$

$$M_1 = 3660 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textit{Respuesta}$$

El DCL en la figura (d) muestra la fuerza resultante actuando sobre la sección transversal en términos de su componente normal P_1 y de su componente cortante V_1. Al comparar las figuras (c) y (d), se obtiene

$$P_1 = D_y \cos 60^\circ + D_x \operatorname{sen} 60^\circ$$

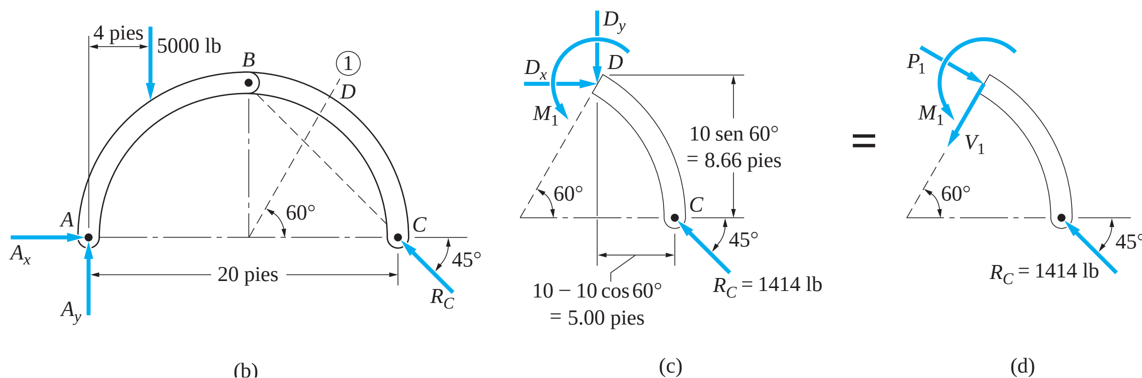
$$= 1000 \cos 60^\circ + 1000 \operatorname{sen} 60^\circ = 1366 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

y

$$V_1 = D_y \operatorname{sen} 60^\circ - D_x \cos 60^\circ$$

$$= 1000 \operatorname{sen} 60^\circ - 1000 \cos 60^\circ = 366 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Como P_1, V_1 y M_1 resultaron positivos, cada uno está dirigido como se indica en la figura (d).



Problemas

En los problemas siguientes el sistema de fuerzas internas se debe representar como una fuerza normal P, una fuerza cortante V y un momento flexionante M. Ignore los pesos de los miembros.

6.1-6.3 Determine el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la sección 1 analizando el DCL del: (a) segmento *AD* y (b) segmento *DB*.

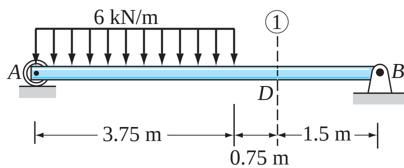


Fig. P6.1

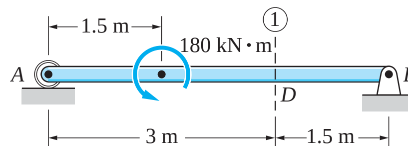


Fig. P6.2

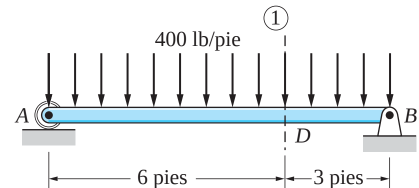


Fig. P6.3

6.4-6.6 Encuentre los sistemas de fuerzas internas que actúan sobre las secciones 1 y 2.

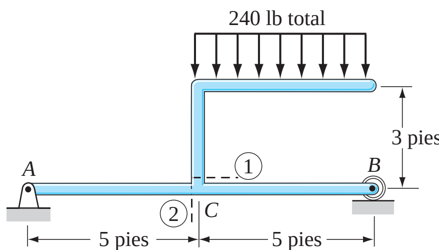


Fig. P6.4

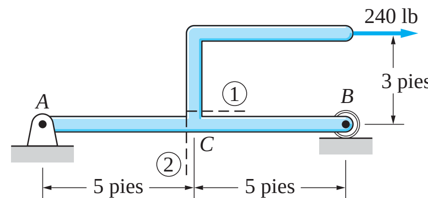


Fig. P6.5

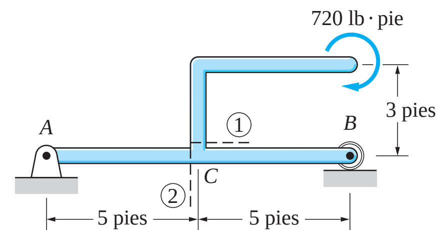


Fig. P6.6

6.7 Las tres vigas en voladizo idénticas soportan cargas verticales que están distribuidas de manera diferente. Se sabe que la viga (a) falla debido a que el momento flexionante máximo interno alcanza su valor crítico cuando $P_1 = 360$ lb. Calcule los valores de P_2 y P_3 que ocasionarán la falla de las otras dos vigas.

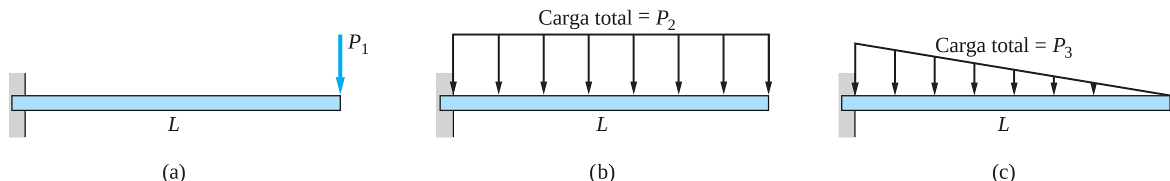


Fig. P6.7

6.8 Encontrar los sistemas de fuerzas internas que actúan en las secciones 1 y 2 para el perno de argolla que se muestra.

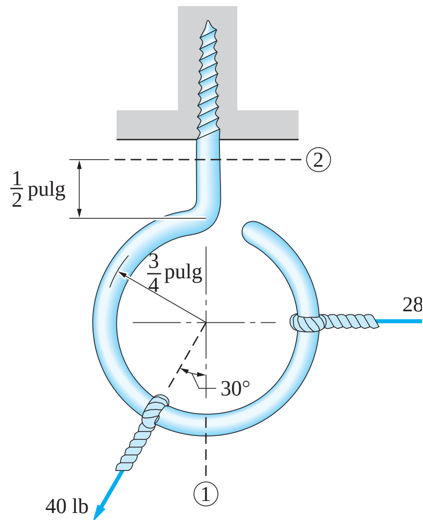


Fig. P6.8

6.9 Para el componente estructural ilustrado, determine los sistemas de fuerzas internas que actúan sobre las secciones 1 y 2.

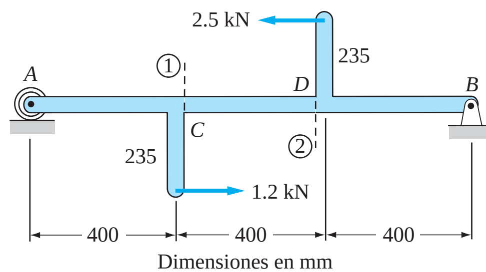


Fig. P6.9

6.10 Las dos barras, articuladas entre sí en *B*, están soportadas por una superficie sin fricción en *A* y un empotramiento en *C*. Ignorando los pesos de las barras, determine los sistemas de fuerzas internas que actúan sobre las secciones 1 y 2.

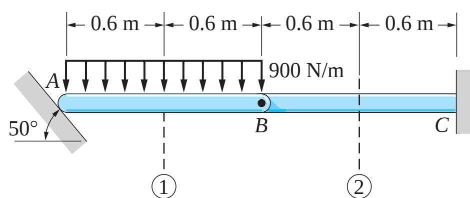


Fig. P6.10

6.11 Determine el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la sección 1 (justo debajo de *D*) del marco conectado con pasadores.

6.12 Determine los sistemas de fuerzas internas que actúan sobre la sección 2 (justo a la derecha de la carga de 600 N) del marco conectado con pasadores.

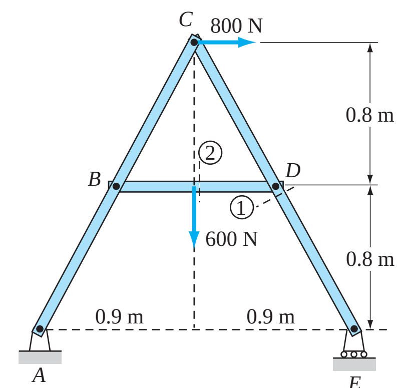


Fig. P6.11, P6.12

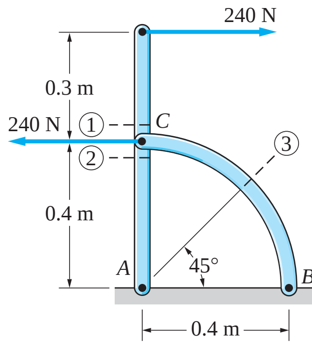


Fig. P6.13, P6.14

6.13 Determine los sistemas de fuerzas internas que actúan sobre las secciones 1 y 2 para el marco conectado con pasadores. Las secciones se ubican justo arriba y debajo del pasador *C*.

6.14 Encuentre el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la sección 3 para el marco conectado con pasadores.

6.15 Calcule los sistemas de fuerzas internas que actúan sobre las secciones 1 y 2, que están adyacentes al punto *C*.

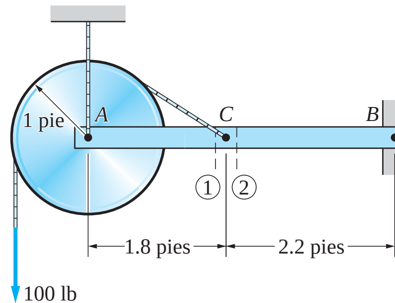


Fig. P6.15

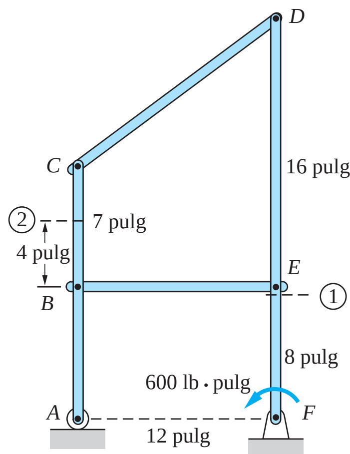


Fig. p6.16

6.16 El par de 600 lb · pulg se aplica al miembro *DEF* del marco conectado con pasadores. Encuentre los sistemas de fuerzas que actúan sobre las secciones 1 y 2.

6.17 Una persona de peso *W* sube por una escalera colocada sobre una superficie sin fricción. Encuentre el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la sección 1 como una función de *x* (la coordenada de posición de la persona).

6.18 Para la escalera en el problema 6.17, encuentre el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la sección 2, suponiendo que $x < a/2$.

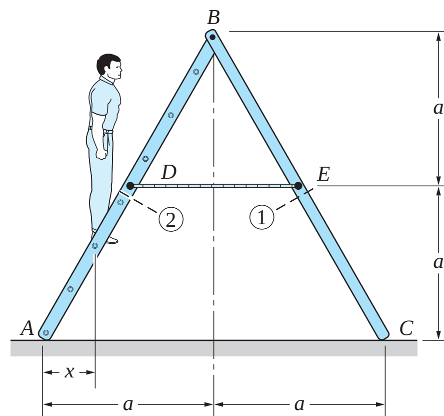


Fig. P6.17, P6.18

6.19 Determine el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la sección 1 del arco circular.

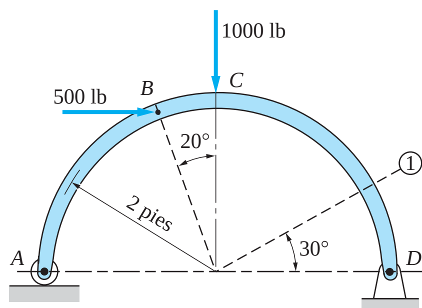


Fig. P6.19

***6.20** La ecuación del arco parabólico es $y = (36 - x^2)/6$, donde las unidades de x y y son pies. Calcule el sistema de fuerzas internas que actúa sobre la sección 1.

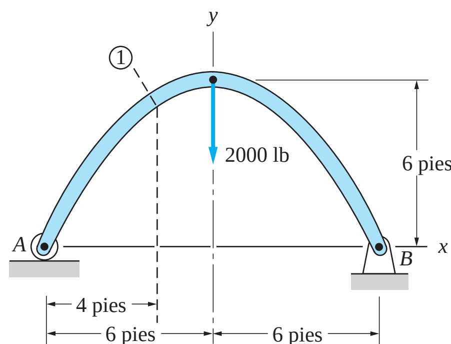


Fig. P6.20

*6.3 Análisis de fuerzas internas

a. Cargas y soportes

El término *viga* se reserva para una barra esbelta que está sometida a cargas transversales (las fuerzas aplicadas son perpendiculares a la barra). En este capítulo, se consideran sólo las cargas que también son coplanares. Como se explicó en el apartado 6.2, el sistema de fuerzas internas causado por cargas coplanares se puede representar como una fuerza normal, una fuerza cortante y un momento flexionante actuando sobre la sección transversal.

En la figura 6.4 se ilustran varios ejemplos de soportes y cargas coplanares de vigas que se presentan en el diseño estructural. También se muestran los diagramas de cuerpo libre de las vigas, en los que se presentan las cargas aplicadas y las reacciones en los soportes. Las reacciones para vigas estáticamente determinadas, figura 6.4(a) a (c), se pueden determinar con el análisis de equilibrio. El cálculo de las reacciones para vigas estáticamente indeterminadas, fig. 6.4(d) a (f), requiere de un análisis que está fuera del alcance de este libro.

Vigas estáticamente determinadas	Vigas estáticamente indeterminadas
(a) Viga simplemente apoyada	(d) Viga continua
(b) Viga con voladizo	(e) Viga en voladizo con soporte
(c) Viga en voladizo	(f) Viga doblemente empotrada

b. *Convención de signos*

Por consistencia, es necesario adoptar convenciones de signos para las cargas aplicadas, fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Se utilizarán las convenciones que se muestran en la figura 6.5, en donde se suponen que son *positivos* las o los:

- Fuerzas externas que están dirigidas hacia abajo; pares externos que están dirigidos en sentido de las manecillas del reloj.
- Fuerzas cortantes que tienden a girar un elemento de una viga en sentido de las manecillas del reloj.
- Momentos flexionantes que tienden a flexionar un elemento de una viga cóncavo hacia arriba (la viga “sonríe”).

	Positivo	Negativo
Cargas externas	P w C	P w C
Fuerza cortante	V V	V V
Momento flexionante	M M	M M

Fig. 6.5 Convenciones de signos para cargas externas, fuerza cortante y momento flexionante.

La desventaja principal de las convenciones anteriores es que dependen de adjetivos como "hacia abajo", "en sentido de las manecillas del reloj", etcétera. Para eliminar este obstáculo, en ocasiones se emplea una convención basada en un sistema de coordenadas cartesiano.

c. *Ecuaciones y diagramas de fuerza cortante y momento flexionante*

La determinación del sistema de fuerzas internas en una sección transversal *dada* en un miembro se analizó en la apartado 6.2. El objetivo del análisis de vigas es determinar la fuerza cortante y el momento flexionante en *cada* sección transversal de una viga. Se pone atención particular a encontrar los valores y las ubicaciones de la fuerza cortante máxima y del momento flexionante máximo. Los resultados permiten que los ingenieros seleccionen una viga adecuada que pueda soportar las cargas aplicadas.

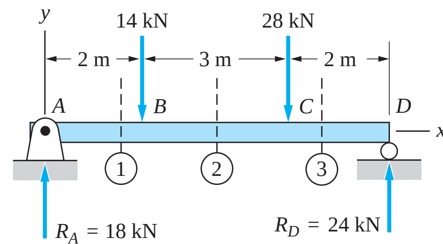
Las ecuaciones que describen la variación de la fuerza cortante (V) y del momento flexionante (M) con ubicación de la sección transversal se denominan *de fuerza cortante y momento flexionante* o simplemente, V y M. Estas ecuaciones siempre dependen de las convenciones de signos, como las que se muestran en la figura 6.5.

Cuando las ecuaciones V y M se grafican a escala, los resultados se denominan *diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante* o simplemente, V y M. Después que se han graficado éstos, la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo suelen determinarse por inspección o con un cálculo simple.

En los problemas de ejemplo siguientes, se explican los procedimientos para deducir las ecuaciones V y M, y para trazar los diagramas V y M.

Problema de ejemplo 6.3

La viga apoyada simplemente que se muestra en la figura (a) soporta dos cargas concentradas. 1. Deduzca las expresiones para la fuerza cortante y el momento flexionante para cada segmento de la viga. 2. Bosqueje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Ignore el peso de la viga. Observe que las reacciones en los soportes en A y D ya se calcularon y se muestran en la figura (a).



(a)

Solución

Parte 1

La determinación de las expresiones para V y M para cada uno de los tres segmentos de la viga (AB, BC y CD) se explica a continuación.

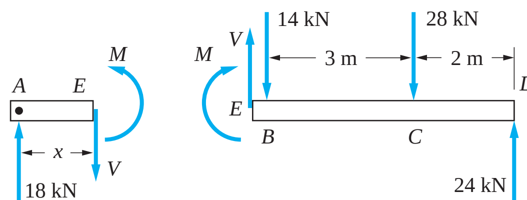
Segmento AB ($0 < x < 2$m) En la figura (b) se muestran los DCL para las dos partes de la viga que están separados por la sección 1, ubicada dentro del segmento AB. Observe que se muestran V y M actuando en sus direcciones positivas de acuerdo con las convenciones de signos en la figura 6.5. Como V y M son iguales en magnitud y opuestamente dirigidas en los dos DCL, se pueden calcular utilizando cualquier DCL. El análisis de la parte del DCL a la izquierda de la sección 1 da

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 18 - V = 0$$

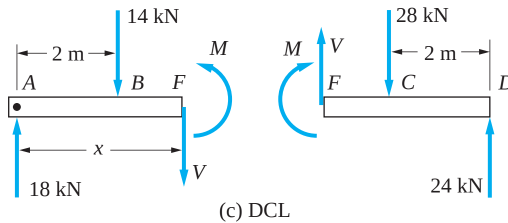
$$V = +18 \text{ kN}$$ *Respuesta*

$$\Sigma M_E = 0 \quad \circlearrowleft+ \quad -18x + M = 0$$

$$M = +18x \text{ kN} \cdot \text{m}$$ *Respuesta*



(b) DCL



(c) DCL

Segmento BC ($2\text{m} < x < 5\text{m}$) En la figura (c) se muestran los DCL para las dos partes de la viga que están separadas por la sección 2, una sección arbitraria dentro del segmento *BC*. Una vez más, *V* y *M* se suponen positivos de acuerdo con las convenciones de signos en la figura 6.5. El análisis de la parte a la izquierda de la sección 2 da

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 18 - 14 - V = 0$$

$$V = +18 - 14 = +4 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma M_F = 0 \quad \circlearrowleft + \quad -18x + 14(x - 2) + M = 0$$

$$M = +18x - 14(x - 2) = 4x + 28 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Respuesta}$$

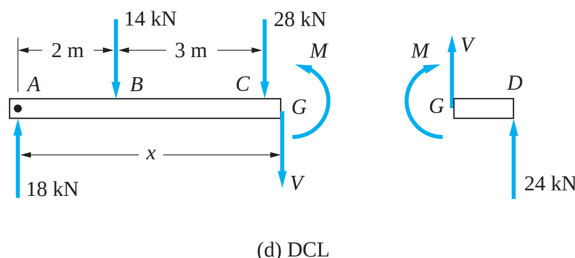
Segmento CD ($5\text{m} < x < 7\text{m}$) La sección 3 se utiliza para encontrar la fuerza cortante y el momento flexionante en el segmento *CD*. Los DCL en la figura (d) de nuevo muestran *V* y *M* actuando en sus direcciones positivas. Analizando la parte de la viga a la izquierda de la sección 3, se obtiene

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 18 - 14 - 28 - V = 0$$

$$V = +18 - 14 - 28 = -24 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\Sigma M_G = 0 \quad \circlearrowleft + \quad -18x + 14(x - 2) + 28(x - 5) + M = 0$$

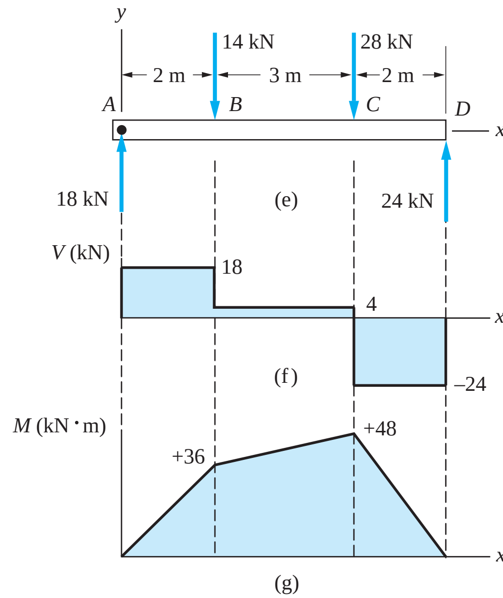
$$M = +18x - 14(x - 2) - 28(x - 5) = -24x + 168 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Respuesta}$$



(d) DCL

Parte 2

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en las figuras (f) y (g) son los trazos de las expresiones para *V* y *M* deducidos en la parte 1. Al colocar estos trazos directamente debajo del bosquejo de la viga en la figura (e), se establece una relación visual clara entre los diagramas y las ubicaciones sobre la viga.



Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante

Una inspección de los diagramas V revela que la fuerza cortante máxima en la viga es −24 kN y que ocurre en cada sección transversal de la viga en el segmento CD. En los diagramas M se observa que el momento flexionante máximo es +48 kN · m, que ocurre debajo de la carga de 28 kN en C. Observe que en cada fuerza concentrada el diagrama V "salta" en una cantidad igual a la fuerza. Además, hay una discontinuidad en la pendiente del diagrama M en cada fuerza concentrada.

Problema de ejemplo 6.4

La viga simplemente apoyada ilustrada en la figura (a) está cargada por un par en sentido de las manecillas del reloj C_0 en B. 1. Deduzca las ecuaciones de fuerza cortante y momento flexionante, y 2. trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Ignore el peso de la viga. Las reacciones en los apoyos A y C ya se calcularon y sus valores se muestran en la figura (a).

Solución

Parte 1

Debido a la presencia del par C_0, se deben analizar los segmentos AB y BC por separado.

Segmento AB ($0 < x < 3L/4$) En la figura (b) se muestra el DCL de la parte de la viga a la izquierda de la sección 1 (también se podría utilizar la parte a la derecha). Observe que V y M se supone que actúan en sus direcciones positivas de acuerdo con las convenciones de signos en la figura 6.5. Las ecuaciones de equilibrio para esta parte de la viga dan

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad -\frac{C_0}{L} - V = 0$$

$$V = -\frac{C_0}{L}$$ *Respuesta*

$$\Sigma M_D = 0 \quad \circlearrowleft\!+ \quad \frac{C_0}{L}x + M = 0$$

$$M = -\frac{C_0 x}{L}$$ *Respuesta*

Segmento BC *($3L/4 < x < L$)* En la figura (c) se muestra el DCL de la parte de la viga a la izquierda de la sección 2 (la parte derecha también se podría utilizar). Una vez más, V y M se supone que actúan en sus direcciones positivas. Aplicando las ecuaciones de equilibrio al segmento, se obtiene

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad -\frac{C_0}{L} - V = 0$$

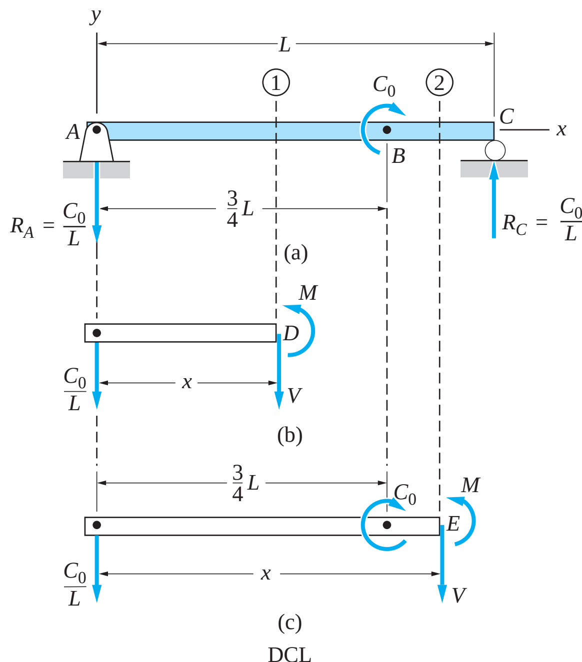
$$V = -\frac{C_0}{L}$$ *Respuesta*

$$\Sigma M_E = 0 \quad \circlearrowleft\!+ \quad \frac{C_0}{L}x - C_0 + M = 0$$

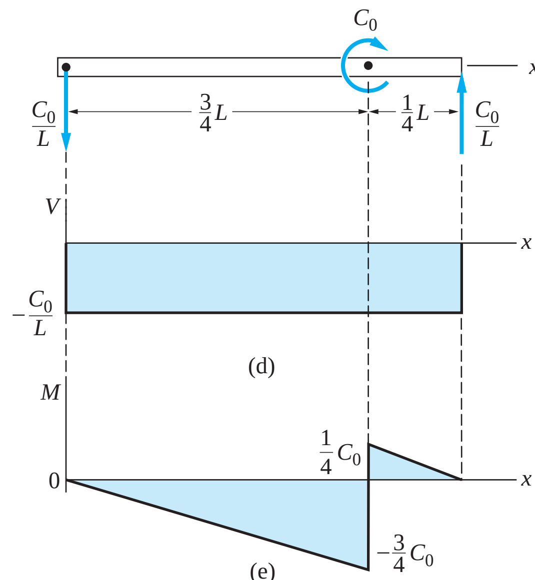
$$M = -\frac{C_0}{L}x + C_0$$ *Respuesta*

Parte 2

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que se muestran en las figuras (d) y (e), se obtienen trazando las expresiones para V y M determinadas en la parte 1. Del diagrama V, se observa que la fuerza cortante es la misma para todas las secciones transversales de la viga. El diagrama M presenta un salto de magnitud C_0 en el punto de aplicación del par.



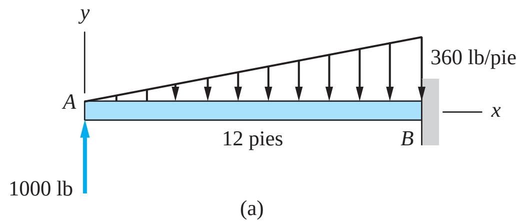
DCL



Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante

Problema de ejemplo **6.5**

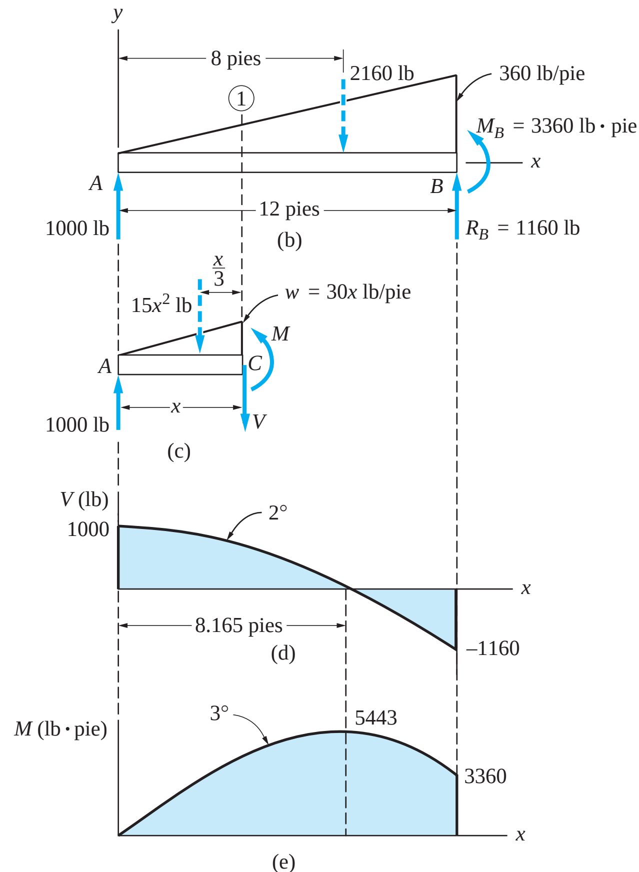
La viga en voladizo en la figura (a) soporta una carga triangular, cuya intensidad varía de cero en el extremo izquierdo a 360 lb/pie en el extremo derecho. Además, una carga vertical hacia arriba de 1000 lb actúa en el extremo libre de la viga. 1. Deduzca las ecuaciones de fuerza cortante y momento flexionante, y 2. trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Ignore el peso de la viga.



(a)

Solución

El DCL de la viga se muestra en la figura (b). Observe que la carga triangular se remplazó por su resultante, que es la fuerza 0.5(12)(360) = 2160 lb (área debajo el diagrama de carga) actuando en el centroide del diagrama de carga. Las reacciones en los soportes *A* y *B* ahora se pueden calcular con las ecuaciones de equilibrio; los resultados se muestran en la figura (b).



Como la carga es continua, la viga no se tiene que dividir en segmentos. Por tanto, sólo se aplica una expresión para V y una expresión para M para toda la viga.

Parte 1

En la figura (c) se muestra el DCL de la parte de la viga que se encuentra a la izquierda de la sección 1. Asignando w como la intensidad de la carga en la sección 1, como se muestra en la figura (b), se obtiene a partir de triángulos similares, $w/x = 360/12$ o $w = 30x$ lb/pie. Ahora la carga triangular en la figura (c) se puede remplazar por su fuerza resultante $15x^2$ lb actuando en el centroide del diagrama de cargas, que está ubicado a $x/3$ pies de la sección 1. La fuerza cortante V y el momento flexionante M actuando en la sección 1 se muestran actuando en sus direcciones positivas de acuerdo con la convención de signos en la figura 6.5. El análisis de equilibrio del DCL en la figura (c) da

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad 1000 - 15x^2 - V = 0$$

$$V = 1000 - 15x^2 \text{ lb}$$ *Respuesta*

$$\Sigma M_C = 0 \quad \circlearrowleft + \quad -1000x + 15x^2\left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

$$M = 1000x - 5x^3 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$ *Respuesta*

Parte 2

Al trazar las expresiones para V y M determinadas en la parte 1 se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que se muestran en las figuras (d) y (e). Observe que el diagrama de fuerza cortante es una parábola y que el diagrama de momento flexionante es un polinomio de tercer grado en x.

La ubicación de la sección donde la fuerza cortante es cero se determina de

$$V = 1000 - 15x^2 = 0$$

lo que da

$$x = 8.165 \text{ pies}$$

El momento flexionante máximo ocurre donde la pendiente del diagrama M es cero; es decir, donde $dM/dx = 0$. Diferenciando la expresión para M, se obtiene

$$\frac{dM}{dx} = 1000 - 15x^2 = 0$$

lo que de nuevo da $x = 8.165$ pies. (En el apartado siguiente se demuestra que la pendiente del diagrama de momento flexionante siempre es cero en una sección donde la fuerza cortante desaparece.) Sustituyendo este valor de x en la expresión para M, se determina que el momento flexionante máximo es

$$M_{max} = 1000(8.165) - 5(8.165)^3 = 5443 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Problemas

6.21-6.38 Para la viga que se muestra, deduzca las expresiones para V y M; trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Ignore el peso de la viga.

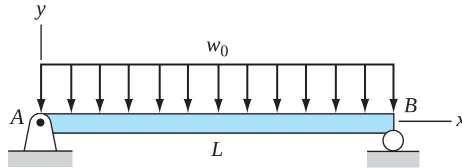


Fig. P6.21

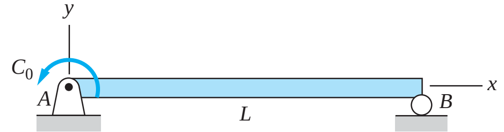


Fig. P6.22

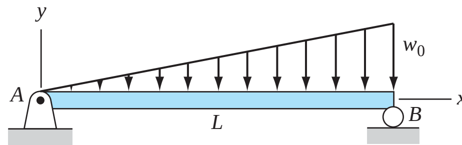


Fig. P6.23

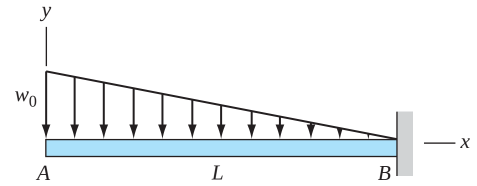


Fig. P6.24

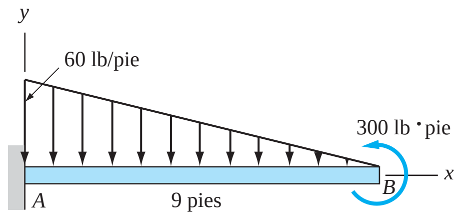


Fig. P6.25

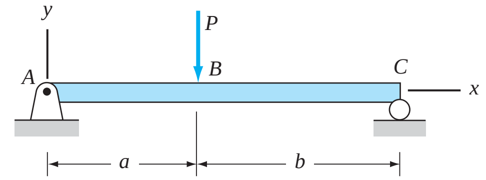


Fig. P6.26

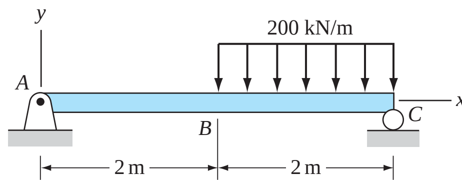


Fig. P6.27

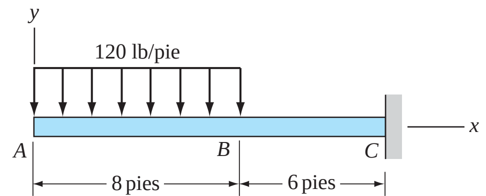


Fig. P6.28

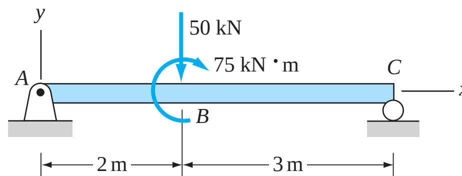


Fig. P6.29

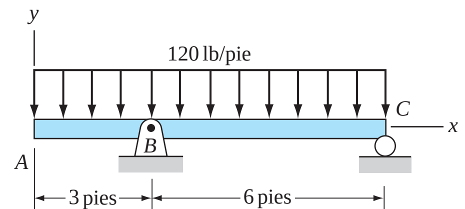


Fig. P6.30

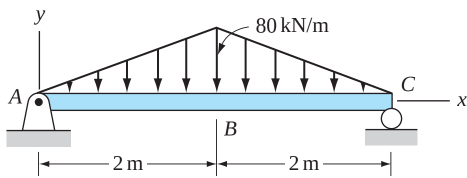


Fig. P6.31

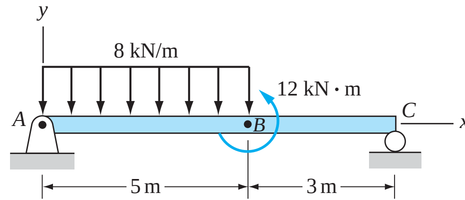


Fig. P6.32

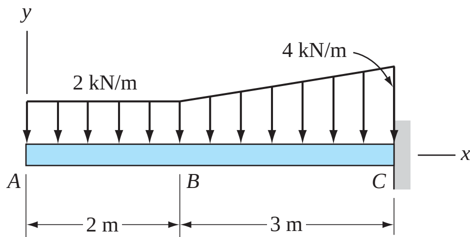


Fig. P6.33

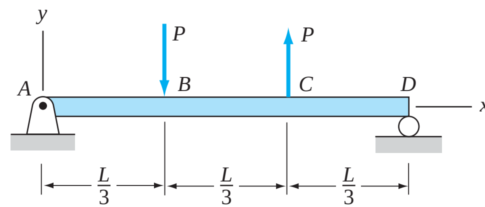


Fig. P6.34

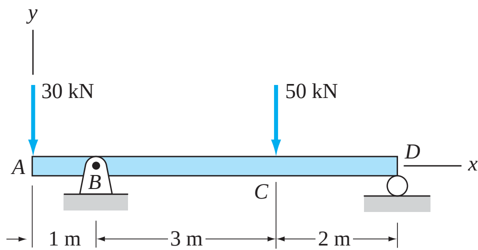


Fig. P6.35

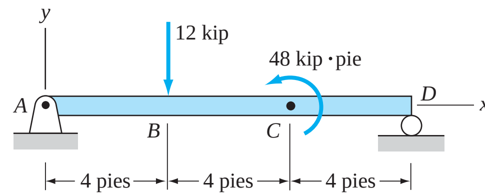


Fig. P6.36

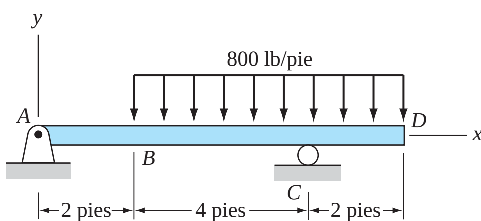


Fig. P6.37

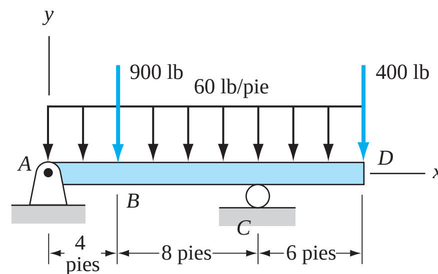


Fig. P6.38

6.39-6.40 Deduzca la fuerza cortante y el momento flexionante como funciones del ángulo θ para el arco ilustrado. Ignore el peso del arco.

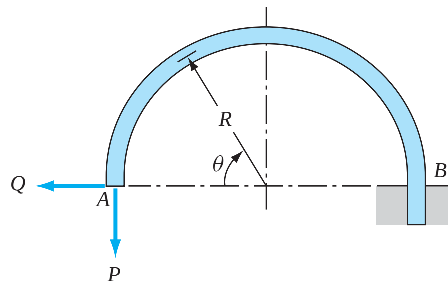


Fig. P6.39

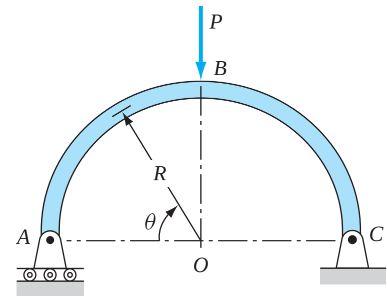
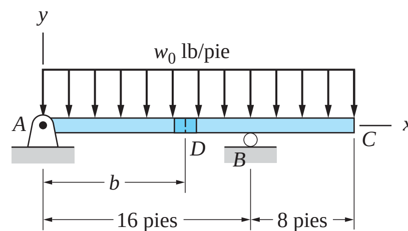
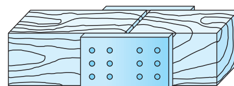


Fig. P6.40

6.41 La viga de un piso de madera de 24 pies está diseñada para soportar una carga uniformemente distribuida. Como sólo se dispone de vigas de 16 pies, la viga se fabricará con dos piezas conectadas por una junta articulada (clavada) D. Determine la distancia b para la posición más óptima de la junta D, si se sabe que las juntas articuladas (clavadas) son resistentes al cortante pero débiles en flexión.





Detalle de la junta en D

Fig. P6.41

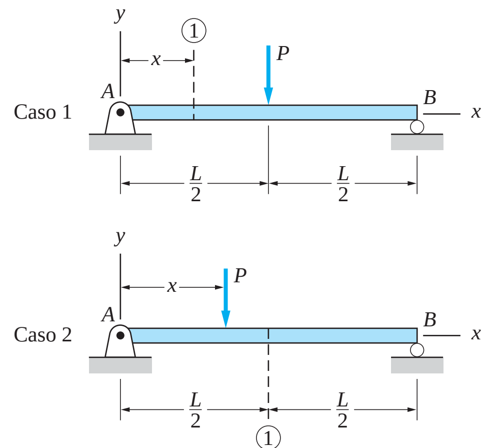


Fig. P6.42

6.42 Para la viga AB que se ilustra en los casos 1 y 2, deduzca y trace expresiones para la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan sobre la sección 1 en términos de la distancia x ($0 < x < L$). [Nota: el caso 1 resulta en los diagramas V y M convencionales, en donde las cargas están fijas y la ubicación de la sección varía; los diagramas para el caso 2 (denominados *diagramas de influencia*) muestran la variación de V y M en una sección fija conforme varía la ubicación de la carga.]

*6.4 Método del área para dibujar diagramas V y M

Existen relaciones útiles entre el diagrama de carga, el diagrama de fuerza cortante y el diagrama de momento flexionante, que se pueden deducir a partir de las ecuaciones de equilibrio. Utilizando estas relaciones se puede trazar el diagrama de fuerza directamente del diagrama de carga y luego trazar el diagrama de momento flexionante directamente del diagrama de fuerza cortante. Esta técnica, denominada *método del área*, permite dibujar los diagramas V y M sin tener que escribir las tediosas ecuaciones V y M. Primero se consideran las vigas sometidas a cargas distribuidas y luego se analizan las fuerzas concentradas y los pares.

a. Carga distribuida

Considere la viga en la figura 6.6(a) que está sometida a una carga lineal de intensidad $w(x)$, donde $w(x)$ se supone que es una función continua. El diagrama de cuerpo libre de un elemento infinitesimal de la viga, ubicado a la distancia x desde el extremo izquierdo, se muestra en la figura 6.6(b). Además de la carga distribuida $w(x)$, el segmento soporta una fuerza cortante y un momento flexionante en cada sección de extremo, que se denotan por V y M en el extremo izquierdo, y por $V + dV$ y $M + dM$ en el extremo derecho. Las diferencias infinitesimales dV y dM representan los cambios que ocurren sobre la longitud diferencial dx del elemento. Observe que todas las fuerzas y momentos flexionantes se supone que actúan en las direcciones positivas, según se definió en la figura 6.5.

La ecuación de equilibrio de fuerzas para el elemento es

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad V - w\,dx - (V + dV) = 0$$

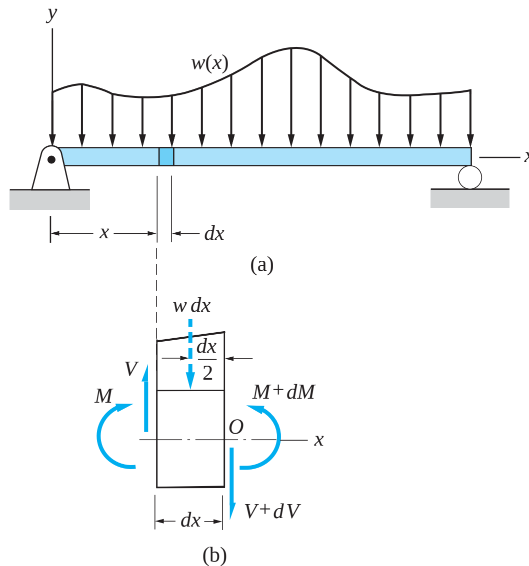


Fig. 6.6

de donde se obtiene

$$w = -\frac{dV}{dx} \tag{6.1}$$

La ecuación de equilibrio de momentos da

$$\Sigma M_O = 0 \quad \circlearrowleft + \quad -M - V\,dx + (M + dM) + w\,dx\frac{dx}{2} = 0$$

Después de cancelar M y dividir entre dx, se obtiene

$$-V + \frac{dM}{dx} + \frac{w\,dx}{2} = 0$$

Como dx es infinitesimal, el último término se puede omitir (ésta no es una aproximación), lo que da

$$V = \frac{dM}{dx} \tag{6.2}$$

Las ecuaciones (6.1) y (6.2) se denominan *ecuaciones diferenciales de equilibrio* para vigas. Los cinco teoremas siguientes que relacionan los diagramas de carga, de fuerza cortante y de momento flexionante se deducen de estas ecuaciones.

1. La intensidad de carga en cualquier sección de una viga es igual al negativo de la pendiente del diagrama de fuerza cortante en esa sección.
   Demostración: se deduce directamente de la ecuación (6.1).
2. La fuerza cortante en cualquier sección es igual a la pendiente del diagrama de momento flexionante en esa sección.
   Demostración: se deduce directamente de la ecuación (6.2).
3. La diferencia entre la fuerza cortante en dos secciones de una viga es igual al negativo del área debajo el diagrama de carga entre esas dos secciones.
   Demostración: integrando la ecuación (6.1) entre las secciones A y B en la figura 6.7, se obtiene

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{dV}{dx}dx = V_B - V_A = -\int_{x_A}^{x_B} w\,dx$$

   Reconociendo que la integral en el lado derecho de esta ecuación representa el área abajo del diagrama de carga entre A y B, se obtiene

$$V_B - V_A = -\text{área del diagrama } w\,\Big]_A^B \qquad \text{lo que queríamos demostrar}$$

   Para fineºs de cálculo, una forma más conveniente de esta ecuación es

$$V_B = V_A - \text{área del diagrama } w\,\Big]_A^B \tag{6.3}$$

   Observe que los signos en la ecuación (6.3) son correctos sólo si $x_B > x_A$.
4. La diferencia entre los momentos flexionantes en dos secciones de una viga es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre esas dos secciones.

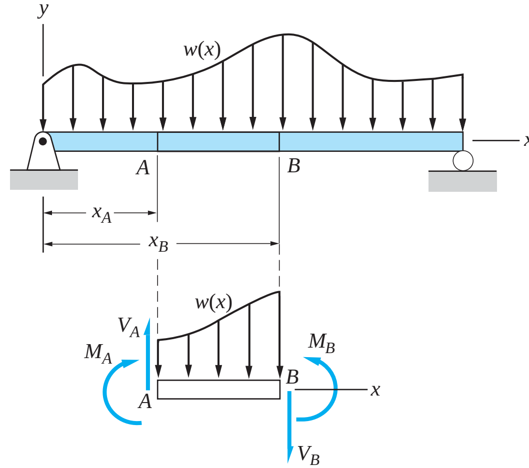


Fig. 6.7

Demostración: integrando la ecuación (6.2) entre las secciones A y B (consulte la figura 6.7), se obtiene

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{dM}{dx} dx = M_B - M_A = \int_{x_A}^{x_B} V\, dx$$

Como el lado derecho de esta ecuación es el área del diagrama de fuerza cortante entre A y B, se obtiene

$$M_B - M_A = \text{área del diagrama } V \Big]_A^B \qquad \text{lo que queríamos demostrar}$$

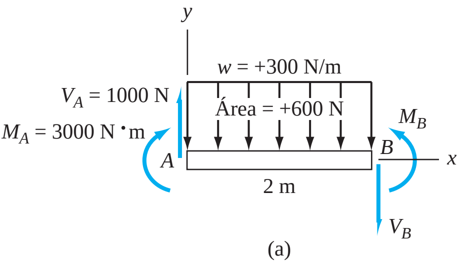
Es conveniente utilizar esta ecuación en la forma

$$M_B = M_A + \text{área del diagrama } V \Big]_A^B \tag{6.4}$$

Los signos en la ecuación (6.4) son correctos sólo si $x_B > x_A$.

5. Si el diagrama de carga es un polinomio de grado n, entonces el diagrama de fuerza cortante es un polinomio de grado $(n + 1)$ y el diagrama de momento flexionante es un polinomio de grado $(n + 2)$.
Demostración: se deduce directamente de la integración de las ecuaciones (6.1) y (6.2).

El método del área para trazar diagramas de fuerza cortante y momento flexionante es una aplicación directa de los teoremas anteriores. Por ejemplo, considere el segmento de viga que se muestra en la figura 6.8(a), que tiene una longitud de 2 m y está sometido a una carga uniformemente distribuida $w = 300$ N/m. En la figura 6.8(a) se muestran los pasos necesarios en la elaboración de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el segmento, dado que la fuerza cortante y el momento flexionante en el extremo izquierdo son $V_A = +1000$ N y $M_A = +3000$ N · m.



(a)

$w = +300$ N/m (constante)	w (N/m); 300; +600 N; A; 2 m; B; x
$V_A = +1000$ N (dato)	V (N); 1000; A; B; x
$V_B = V_A -$ área del diagrama $w]_A^B$ $= 1000 - 600 = +400$ N	V (N); 1000; 400; A; B; x
$dV/dx = -w = -300$ N/m (constante) El diagrama V es una línea recta	V (N); 1000; +1400 N · m; 400; A; 2 m; B; x
$M_A = +3000$ N · m (dato)	M (N · m); 3000; A; B; x
$M_B = M_A +$ área del diagrama $V]_A^B$ $= 3000 + 1400 = +4400$ N · m	M (N · m); 3000; 4400; A; B; x
$(dM/dx)_A = V_A = +1000$ N $(dM/dx)_B = V_B = +400$ N	M (N · m); A; B; x
El diagrama M es una parábola	M (N · m); 3000; 4400; A; B; x

(b)

Fig. 6.8 Elaboración de diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para un segmento de viga.

b. Fuerzas y pares concentrados

El método del área para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante descrito antes para cargas distribuidas se puede ampliar a vigas cargadas por fuerzas concentradas y/o pares. En la figura 6.9 se muestra el diagrama de cuerpo libre de un elemento de viga de longitud infinitesimal dx que contiene el punto A donde se aplican una fuerza concentrada P_A y un par concentrado. La fuerza cortante y el momento actuando en el lado izquierdo del elemento se denotan por V_A^- y M_A^-, en tanto que la notación V_A^+ y M_A^+ se utilizan para el lado derecho del elemento. Observe que todas las fuerzas y momentos en la figura 6.9 se suponen positivos de acuerdo con las convenciones de signos en la figura 6.5.

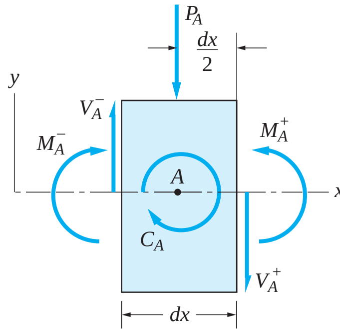


Fig. 6.9

La ecuación de equilibrio de fuerzas da

$$\Sigma F_y = 0 \quad \overset{+}{\uparrow} \quad V_A^- - P_A - V_A^+ = 0$$

$$V_A^+ = V_A^- - P_A \tag{6.5}$$

La ecuación (6.5) indica que una fuerza concentrada positiva causa una discontinuidad de un salto negativo en el diagrama de fuerza cortante en A (un par concentrado no afecta el diagrama de fuerza cortante).

La ecuación de equilibrio de momentos da

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft^{+} \quad M_A^+ - M_A^- - C_A - V_A^+ \frac{dx}{2} - V_A^- \frac{dx}{2} = 0$$

Cancelando los dos últimos términos debido a que son infinitesimales (esto no es una aproximación), se obtiene

$$M_A^+ = M_A^- + C_A \tag{6.6}$$

Así pues, un par concentrado positivo causa un salto positivo en el diagrama de momento flexionante.

c. Resumen

Las ecuaciones (6.1) a (6.6), que se repiten a continuación, constituyen la base del método del área para trazar diagramas de fuerza cortante y momento flexionante sin deducir las expresiones para V y M. El método del área es útil sólo si las áreas bajo los diagramas de carga y fuerza cortante se pueden calcular con facilidad.

$$w = -\frac{dV}{dx} \tag{6.1}$$

$$V = \frac{dM}{dx} \tag{6.2}$$

$$V_B = V_A - \text{área del diagrama } w\Big]_A^B \tag{6.3}$$

$$M_B = M_A + \text{área del diagrama } V\Big]_A^B \tag{6.4}$$

$$V_A^+ = V_A^- - P_A \tag{6.5}$$

$$M_A^+ = M_A^- + C_A \tag{6.6}$$

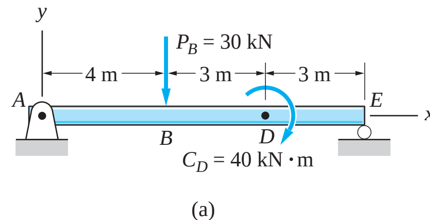
Procedimiento para el método del área En los pasos siguientes se resume el procedimiento para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante mediante el método del área:

- Calcule las reacciones en los soportes a partir del diagrama de cuerpo libre (DCL) de toda la viga.
- Trace el diagrama de carga de la viga (que en esencia es un DCL) mostrando los valores de las cargas, incluyendo las reacciones en los soportes. Utilice las convenciones de signos en la figura 6.5 para determinar el signo correcto de cada carga.
- Trabajando de izquierda a derecha, trace los diagramas V y M para cada segmento de la viga utilizando las ecuaciones (6.1) a (6.6).
- Cuando llegue al extremo derecho de la viga, compruebe si los valores calculados de V y M son consistentes con las condiciones de extremo. Si no lo son, quiere decir que cometió un error en los cálculos.

A primera vista, utilizando el método del área puede parecer más laborioso que trazar las ecuaciones de fuerza cortante y momento flexionante. Sin embargo, con la práctica se encontrará que el método del área no sólo es mucho más rápido, sino también menos susceptible a errores numéricos (debido a la naturaleza comprobatoria propia de los cálculos).

Problema de ejemplo **6.6**

La viga apoyada simplemente en la figura (a) soporta una fuerza concentrada de 30 kN en B y un par de 40 kN · m en D. Bosqueje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante mediante el método del área. Ignore el peso de la viga.



(a)

Solución

Diagrama de carga

El diagrama de carga para la viga se muestra en la figura (b). Las reacciones en A y E se determinan del análisis de equilibrio. El valor numérico de cada fuerza y del par es seguido por un signo más o un signo menos entre paréntesis, lo que indica su signo según se establece en la convención de signos en la figura 6.5.

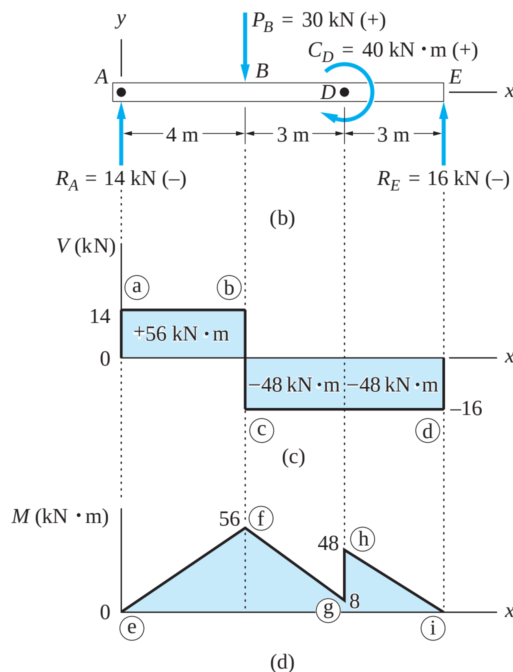


Diagrama de fuerza cortante

Ahora se explican los pasos seguidos en la elaboración del diagrama de fuerza cortante en la figura (c). Del diagrama de carga, se observa que hay fuerzas concentradas en A, B y E que ocasionarán saltos en el diagrama de fuerza cortante en estos

puntos. Por tanto, nuestro análisis de la fuerza cortante debe hacer distinciones entre las secciones de la viga inmediatamente a la izquierda y derecha de cada uno de estos puntos.

Se inicia observando que $V_A^- = 0$ debido a que no se aplica carga a la izquierda de A. Después se procede a lo largo de la viga de izquierda a derecha, trazando sobre la marcha el diagrama:

$$V_A^+ = V_A^- - R_A = 0 - (-14) = +14 \text{ kN}$$

Trace el punto a.

$$V_B^- = V_A^+ - \text{área del diagrama } w\Big]_A^B = 14 - 0 = -14 \text{ kN}$$

Trace el punto b.

Como $w = -dV/dx = 0$ entre A y B, la pendiente del diagrama V es cero entre estos puntos.

Conecte a *y* b *con una línea recta horizontal.*

$$V_B^+ = V_B^- - P_B = 14 - (+30) = -16 \text{ kN}$$

Trace el punto c.

$$V_E^- = V_B^+ - \text{área del diagrama } w\Big]_B^E = -16 - 0 = -16 \text{ kN}$$

Trace el punto d.

Observando que $w = -dV/dx = 0$ entre B y E, se concluye que la pendiente del diagrama V es cero en el segmento BE.

Conecte c *y* d *con una línea recta horizontal.*

Como no hay carga a la derecha de E, se debe determinar que $V_E^+ = 0$.

$$V_E^+ = V_E^- - R_E = -16 - (-16) = 0 \qquad \textit{¡Se comprueba!}$$

Diagrama de momento flexionante

Ahora se explican los pasos necesarios para trazar el diagrama de momento flexionante ilustrado en la figura (d). Como el par aplicado se sabe que ocasiona un salto en el diagrama de momento flexionante en D, se debe distinguir entre los momentos flexionantes en secciones justo a la izquierda y derecha de D. Antes de continuar, se calculan las áreas abajo del diagrama de fuerza cortante para los diferentes segmentos de la viga. Los resultados de estos cálculos se muestran en la figura (c). Observe que las áreas son positivas o bien negativas, dependiendo del signo de la fuerza cortante.

Se inicia el trazo del diagrama de momento flexionante observando que $M_A = 0$ (no hay par aplicado en A).

Trace el punto e.

Procediendo a lo largo de la viga de izquierda a derecha, se genera el diagrama de momento en la figura (d) de la manera siguiente:

$$M_B = M_A + \text{área del diagrama} V \Big]_A^B = 0 + (+56) = 56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Trace el punto f.

El diagrama V muestra que la fuerza cortante entre A y B es constante y positiva. Por tanto, la pendiente del diagrama M entre estas dos secciones también es constante y positiva (recuerde que $dM/dx = V$).

Conecte e *y* f *con una línea recta.*

$$M_D^- = M_B + \text{área del diagrama} V \Big]_B^D = 56 + (-48) = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Trace el punto g.

Como la pendiente del diagrama V entre B y D es negativa y constante, el diagrama M tiene pendiente constante y negativa en este segmento.

Conecte f *y* g *con una línea recta.*

$$M_D^+ = M_D^- + C_D = 8 + (+40) = 48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Trace el punto h.

Luego, se observa que $M_E = 0$ (no hay par aplicado en E). Nuestros cálculos basados en el área del diagrama V deben verificar este resultado.

$$M_E = M_D^+ + \text{área del diagrama} V \Big]_D^E = 48 + (-48) = 0$$ *¡Se comprueba!*

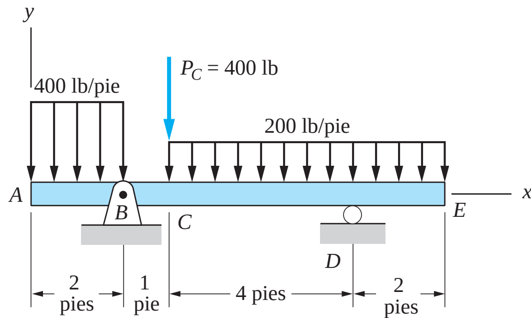
Trace el punto i.

La fuerza cortante entre D y E es negativa y constante, lo que significa que la pendiente del diagrama M para este segmento también es constante y negativa.

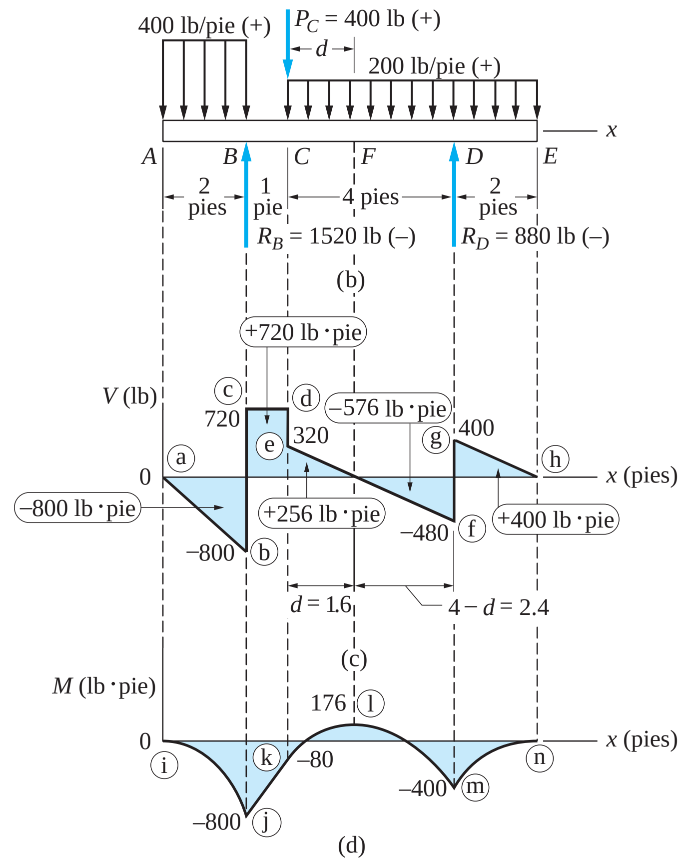
Conecte h *e* i *con una línea recta.*

Problema de ejemplo 6.7

La viga con voladizos en la figura (a) soporta dos cargas uniformemente distribuidas y una carga concentrada. Utilizando el método del área, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga. Ignore el peso de la viga.



(a)



Solución

Diagrama de carga

El diagrama de carga para la viga se muestra en la figura (b); las reacciones en *B* y *D* se determinan mediante el análisis de equilibrio. Cada uno de los valores numéricos se sigue por un signo más o un signo menos entre paréntesis, determinado por las convenciones de signos establecidas en la figura 6.5. La importancia de la sección identificada *F* será aparente en el análisis siguiente.

Diagrama de fuerza cortante

Ahora se explican en forma detallada los pasos requeridos para trazar el diagrama de fuerza cortante ilustrado en la figura (c). Del diagrama de carga, se observa que hay fuerzas concentradas en *B*, *C* y *D*, lo que significa que habrá saltos en el diagrama de cortante en estos puntos. Por tanto, se debe distinguir entre la fuerza cortante inmediatamente a la izquierda y a la derecha de cada uno de estos puntos.

Se inicia el trazo del diagrama V observando que $V_A = 0$ ya que no hay fuerza aplicada en A.

Trace el punto a.

$$V_B^- = V_A - \text{área del diagrama } w\Big]_A^B = 0 - (+400)(2) = -800 \text{ lb}$$

Trace el punto b.

Se observa de la figura (b) que la carga aplicada entre A y B es constante y positiva, por lo que la pendiente del diagrama cortante entre las dos secciones transversales es constante y negativa (recuerde que $dV/dx = -w$).

Conecte a *y* b *con una línea recta.*

$$V_B^+ = V_B^- - R_B = -800 - (-1520) = 720 \text{ lb}$$

Trace el punto c.

$$V_C^- = V_B^+ - \text{área del diagrama } w\Big]_B^C = 720 - 0 = 720 \text{ lb}$$

Trace el punto d.

Como $w = -dV/dx = 0$ entre B y C, la pendiente del diagrama V es cero en este segmento.

Conecte c *y* d *con una línea recta horizontal.*

$$V_C^+ = V_C^- - P_C = 720 - (+400) = 320 \text{ lb}$$

Trace el punto e.

$$V_D^- = V_C^+ - \text{área del diagrama } w\Big]_C^D = 320 - (+200)4 = -480 \text{ lb}$$

Trace el punto f.

Como la carga entre C y D es constante y positiva, la pendiente del diagrama V entre estas dos secciones es constante y negativa.

Conecte e *y* f *con una línea recta.*

Nuestros cálculos han identificado un punto de interés adicional: el punto donde la fuerza cortante es cero, identificada como F en el diagrama de carga en la figura (b). La ubicación de F se puede encontrar de

$$V_F = V_C^+ - \text{área del diagrama } w\Big]_C^F = 320 - (+200)d = 0$$

lo que da $d = 1.60$ pies, como se muestra en la figura (c),

Continuando a lo largo de la viga, se tiene

$$V_D^+ = V_D^- - R_D = -480 - (-880) = 400 \text{ lb}$$

Trace el punto g.

Luego, se observa que $V_E = 0$ (no hay fuerza actuando en E). El cálculo basado en el área del diagrama de carga debe verificar este resultado:

$$V_E = V_D^+ - \text{área del diagrama } w \Big]_D^E = 400 - (+200)2 = 0 \quad \textit{¡Se comprueba!}$$

Trace el punto h.

De la figura (b), se observa que la carga aplicada entre D y F es constante y positiva. Por tanto la pendiente del diagrama V entre estas dos secciones transversales es constante y negativa.

Conecte g *y* h *con una línea recta.*

Esto completa el trazo del diagrama de fuerza cortante.

Diagrama de momento flexionante

Ahora se explican los pasos requeridos para trazar el diagrama de momento flexionante ilustrado en la figura (d). Como no hay pares aplicados, no habrá saltos en el diagrama M. Las áreas del diagrama de fuerza cortante para los diferentes segmentos de la viga se muestran en la figura (c).

Se inicia observando que $M_A = 0$ ya que no se aplica algún par en A.

Trace el punto i.

Continuando de izquierda a derecha a lo largo de la viga, se traza el diagrama de momento flexionante como sigue:

$$M_B = M_A + \text{área del diagrama } V \Big]_A^B = 0 + (-800) = -800 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Trace el punto j.

En la figura (c) se observa que el diagrama V entre A y B es un polinomio de primer grado (línea recta inclinada). Por tanto, el diagrama M entre estas dos secciones transversales es un polinomio de segundo grado; es decir, una parábola. De $dM/dx = V$, se observa que la pendiente del diagrama M es cero en A y −800 lb/pie en B.

Conecte i *y* j *con una parábola que tenga pendiente cero en* i *y pendiente negativa en* j*. La parábola será cóncava hacia abajo.*

$$M_C = M_B + \text{área del diagrama } V \Big]_B^C = -800 + (+720) = -80 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Trace el punto k.

Como el diagrama V es constante y positivo entre B y C, la pendiente del diagrama M es constante y positiva entre estas dos secciones transversales.

Conecte j *y* k *con una línea recta.*

$$M_F = M_C + \text{área del diagrama } V \Big]_C^F = -80 + (+256) = +176 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Trace el punto l.

Utilizando $V = dM/dx$, sabemos que la pendiente del diagrama M es $+320$ lb/pie en C y cero en F, y que la curva es una parábola entre estas dos secciones transversales.

Conecte k *y* l *con una parábola que tenga pendiente positiva en* k *y pendiente cero en* l. *La parábola será cóncava hacia abajo.*

$$M_D = M_F + \text{área del diagrama } V\Big]_F^D = 176 + (-576) = -400 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Trace el punto m.

El diagrama M entre F y D es de nuevo una parábola, con una pendiente cero en F y -480 lb/pie en D.

Conecte l *y* m *con una parábola que tenga pendiente cero en* l *y pendiente negativa en* m. *La parábola será cóncava hacia abajo.*

Después, se observa que $M_E = 0$, ya que no se aplica ningún par en E. Nuestro cálculo basado en el área del diagrama V debe verificar este resultado.

$$M_E = M_D + \text{área del diagrama } V\Big]_D^E = -400 + (+400) = 0 \qquad \textit{¡Se comprueba!}$$

Trace el punto n.

De los argumentos familiares, el diagrama M entre D y E es una parábola con pendiente igual a $+400$ lb/pie en D y pendiente cero en E.

Conecte m *y* n *con una parábola que tenga pendiente positiva en* m *y pendiente cero en* n. *La parábola será cóncava hacia abajo.*

Esto completa el trazo del diagrama de momento flexionante. Es obvio en la figura (d) que la pendiente del diagrama M es discontinua en j y m. No tan obvio es la discontinuidad en la pendiente en k: de $dm/dx = V$, se observa que la pendiente del diagrama M a la izquierda de k es igual a $+720$ lb/pie, en tanto que a la derecha de k la pendiente es igual a $+320$ lb/pie. Observe que la pendiente del diagrama M es continua en 1 debido a que la fuerza cortante tiene el mismo valor (cero) a la izquierda y a la derecha de 1.

Problemas

6.43-6.56 Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga ilustrada mediante el método del área. Ignore el peso de la viga.

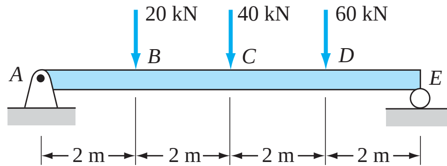


Fig. P6.43

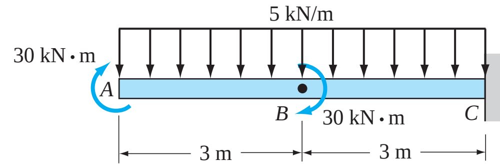


Fig. P6.44

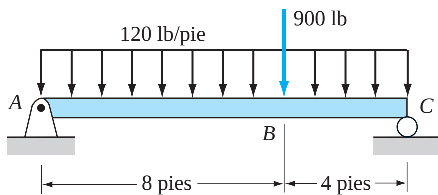


Fig. P6.45

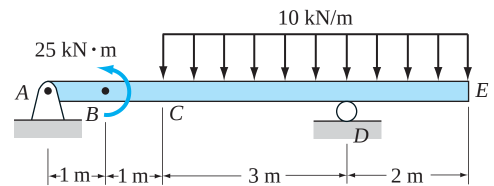


Fig. P6.46

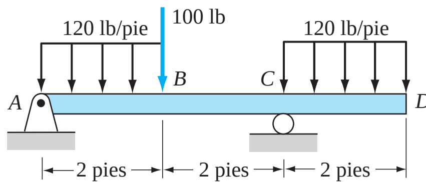


Fig. P6.47

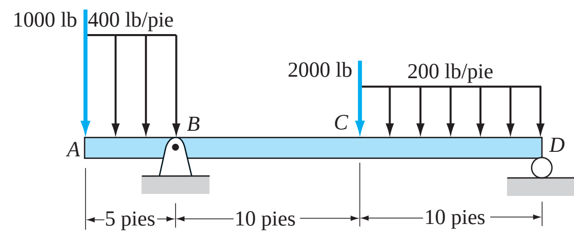


Fig. P6.48

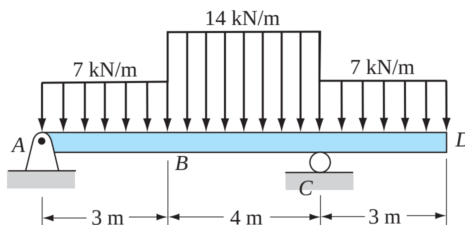


Fig. P6.49

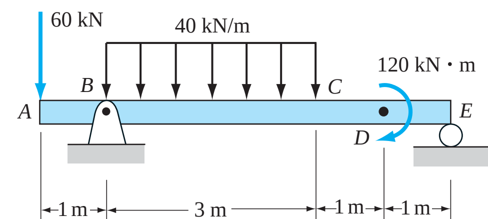


Fig. P6.50

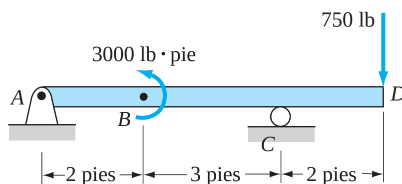


Fig. P6.51

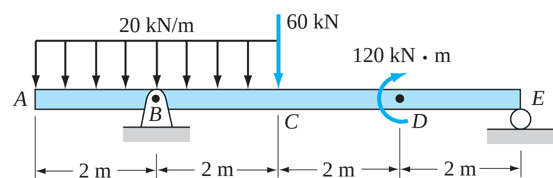


Fig. P6.52

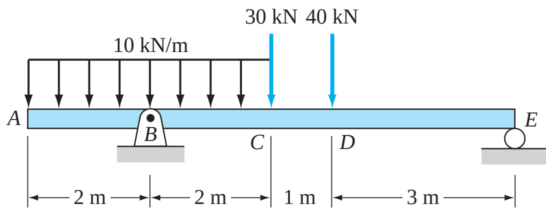


Fig. P6.53

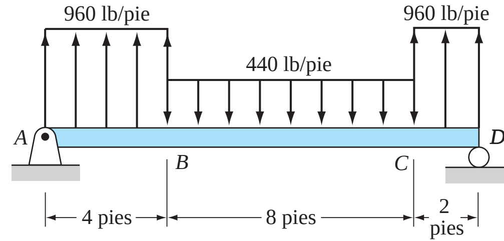


Fig. P6.54

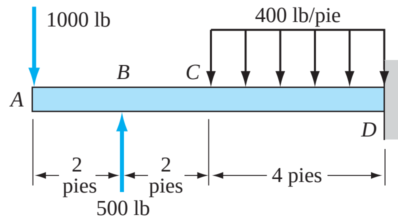


Fig. P6.55

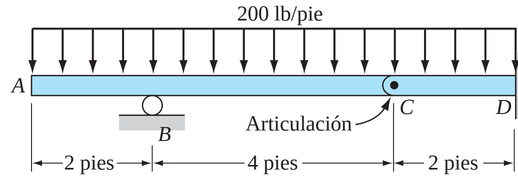


Fig. P6.56

6.57-6.61 Trace los diagramas de carga y momento flexionante que correspondan al diagrama de fuerza cortante indicado. Suponga que no se aplican pares a la viga.

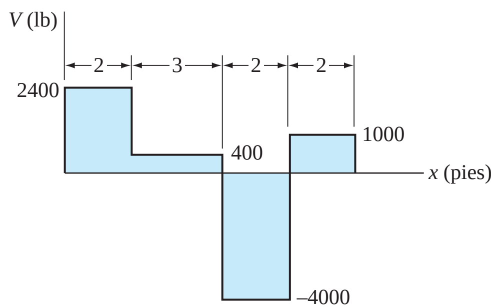


Fig. P6.57

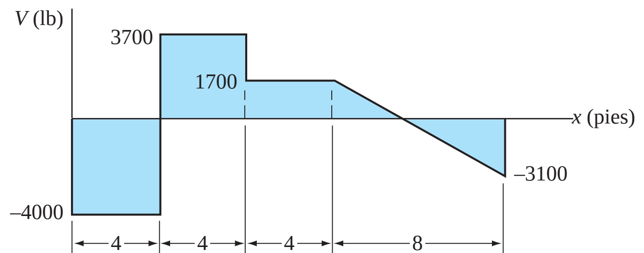


Fig. P6.58

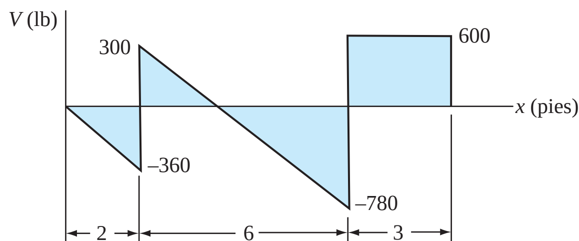


Fig. P6.59

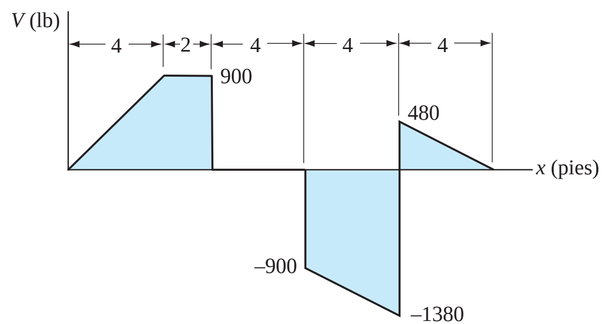


Fig. P6.60

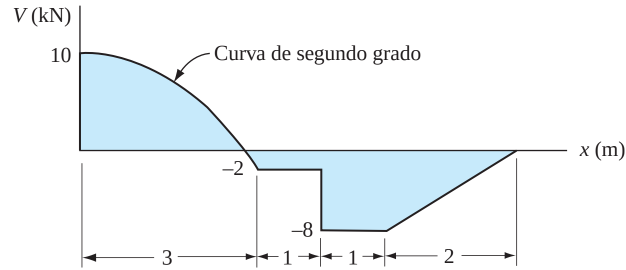


Fig. P6.61

PARTE B: *Cables*

*6.5 *Cables ante cargas distribuidas*

a. *Análisis general*

Los cables flexibles se utilizan en numerosas aplicaciones ingenieriles. Ejemplos comunes son las líneas de transmisión de energía eléctrica y los puentes colgantes. El término *flexible* significa que los cables no pueden desarrollar fuerzas internas que no sean de tensiones. En capítulos anteriores se abordaron los cables como miembros de dos fuerzas; es decir, se ignoraron los pesos de los cables y la carga consistió sólo de fuerzas en los extremos. Aquí se consideran los efectos de las fuerzas distribuidas, como el peso del cable o el peso de una estructura suspendida del cable. Las cargas concentradas se analizan en la sección siguiente.

En la figura 6.10(a) se muestra un cable que pende de sus puntos extremos *A* y *B*. A fin de soportar una carga distribuida de intensidad *w*, el cable debe adoptar una forma curva. Resulta que la ecuación que describe esta forma se simplifica si se coloca el origen del sistema de coordenadas *xy* en el punto más bajo *O* del cable. Si se designa *s* como la distancia medida a lo largo del cable desde *O*. La forma del cable y la ubicación del punto *O* por lo general se desconocen al inicio del análisis.

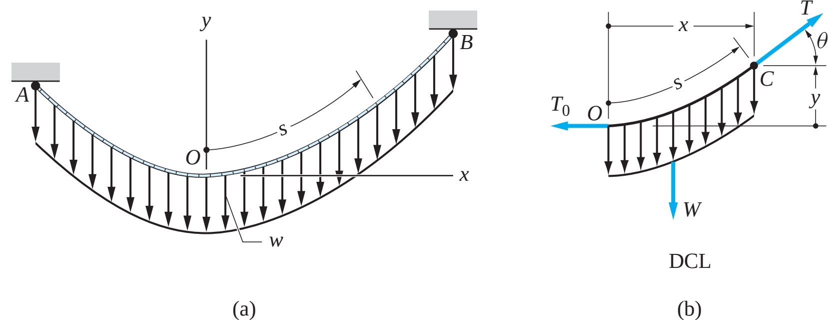


Fig. 6.10

Las unidades de la intensidad de carga w son lb/pie o N/m. La longitud se puede medir de dos maneras: a lo largo del eje x (w como una función de x) o a lo largo del cable (w como una función de s). Aunque estos dos casos se deben tratar por separado, primero consideramos los elementos de los análisis que son comunes para los dos.

El diagrama de cuerpo libre (DCL) de un segmento del cable, extendiéndose desde el punto más bajo O hasta un punto arbitrario C, se muestra en la figura 6.10(b). Las fuerzas de tensión en el cable en O y C se denotan por T_0 y T, respectivamente; W es la resultante de la carga distribuida y θ representa el ángulo de la pendiente del cable en C. Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas del segmento del cable son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\longrightarrow} \quad T\cos\theta - T_0 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad T\,\mathrm{sen}\,\theta - W = 0$$

de donde se obtiene

$$T\cos\theta = T_0 \qquad T\,\mathrm{sen}\,\theta = W \tag{6.7}$$

La primera de las ecuaciones (6.7) muestra que la componente horizontal de la fuerza en el cable, que es $T\cos\theta$, es constante en todo el cable. La solución de las ecuaciones (6.7) para θ y T da

$$\tan\theta = \frac{W}{T_0} \qquad T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \tag{6.8}$$

b. *Cable parabólico*

Aquí se analiza el caso especial en el que la carga está distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal; es decir, $w(x) = w_0$, donde w_0 es la intensidad de carga constante. Este caso se origina, por ejemplo, en los cables principales de un puente colgante [consulte la figura 6.11(a)] donde w_0 representa el peso de la calzada por longitud unitaria. Se supone que la calzada está conectada a los cables principales por una gran cantidad de cables verticales y que el peso de todos los cables es despreciable comparado con el peso de la calzada.

Tomando las ecuaciones (6.8) como punto de partida, ahora se deducen varias ecuaciones útiles que describen la geometría del cable y la variación de la fuerza de tensión dentro del cable.

θ y T como funciones de x y T_0 Como la resultante de la carga que se muestra en la figura 6.11(b) es $W = w_0x$, las ecuaciones (6.8) se transforman en

$$\tan\theta = \frac{w_0x}{T_0} \qquad T = \sqrt{T_0^2 + (w_0x)^2} \tag{6.9}$$

y como una función de x y T_0 Sustituyendo $\tan\theta = dy/dx$, la primera de las ecuaciones (6.9) se puede escribir como $dy/dx = w_0x/T_0$. Al integrar, se obtiene

$$y = \frac{w_0x^2}{2T_0} \tag{6.10}$$

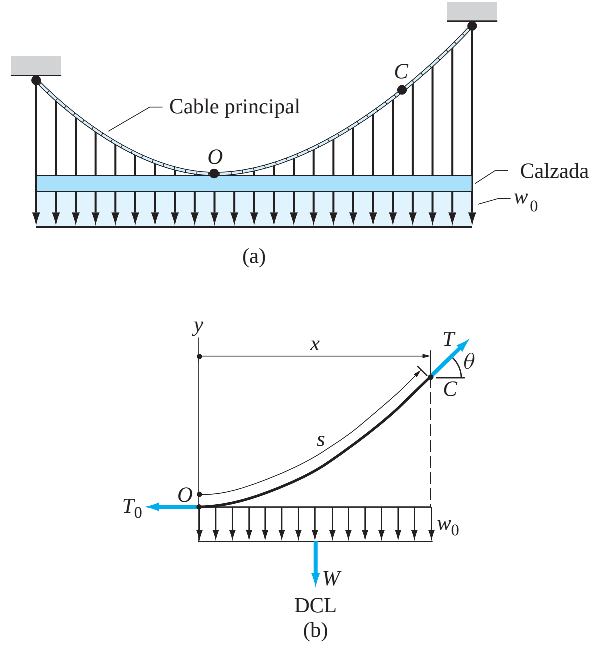


Fig. 6.11

donde la constante de integración se igualó a cero para satisfacer la condición $y = 0$ cuando $x = 0$. La ecuación (6.10), que representa una parábola con su vértice en O, también se podría obtener de una ecuación de equilibrio de momentos utilizando el DCL en la figura 6.11(b).

***s* como una función de *x* y T_0** Con frecuencia es necesario calcular la longitud s del cable entre los puntos O y C en la figura 6.11(b). La longitud infinitesimal del cable es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{a}$$

Sustituyendo $dy/dx = w_0 x/T_0$ e integrando, se obtiene

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 x}{T_0}\right)^2}\,dx \tag{6.11}$$

Por tanto, la longitud del cable entre los puntos O y C es (consulte una tabla de integrales):

$$s(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{w_0 x}{T_0}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{T_0}{w_0}\right)\ln\left[\left(\frac{w_0 x}{T_0}\right) + \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 x}{T_0}\right)^2}\right] \tag{6.12}$$

c. Cable catenario

Considere un cable homogéneo que no soporta carga excepto su propio peso. En este caso, la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la longitud del cable; es decir, $w(s) = w_0$, donde w_0 es el peso del cable por longitud unitaria y la distancia s está medida a lo largo del cable. Por tanto, la resultante de la carga mostrada en la figura 6.10(b) es $W = w_0 s$. Ahora de las ecuaciones (6.8) se pueden deducir las relaciones útiles siguientes.

θ y T como funciones de s y T_0 Sustituyendo $W = w_0 s$ en las ecuaciones (6.8) da

$$\tan\theta = \frac{w_0 s}{T_0} \qquad T = \sqrt{T_0^2 + (w_0 s)^2} \tag{6.13}$$

s como una función de x y T_0 Se inicia con la ecuación (a), que se puede escribir como $(dy/dx)^2 = (ds/dx)^2 - 1$. Sustituyendo $dy/dx = \tan\theta = w_0 s/T_0$ y despejando dx, se obtiene

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{w_0 s}{T_0}\right)^2}} \tag{b}$$

Consultando una tabla de integrales, la ecuación (b) da

$$x(s) = \int_0^s dx = \frac{T_0}{w_0} \ln\left[\frac{w_0 s}{T_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 s}{T_0}\right)^2}\right] \tag{6.14}$$

Resolviendo esta ecuación para s da

$$s(x) = \frac{T_0}{w_0} \operatorname{senh} \frac{w_0 x}{T_0} \tag{6.15}$$

Las funciones senh u y cosh u, denominadas *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico*, respectivamente, se definen como

$$\operatorname{senh} u = \frac{1}{2}\left(e^u - e^{-u}\right) \qquad \cosh u = \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right)$$

Se puede observar que las reglas de la diferenciación son

$$\frac{d}{du}\operatorname{senh} u = \cosh u \qquad \frac{d}{du}\cosh u = \operatorname{senh} u$$

y como una función de x y T_0 Se sustituye la ecuación (6.15) en la primera ecuación de las ecuaciones (6.13), lo que da $\tan\theta = \operatorname{senh}(w_0 x/T_0)$. Utilizando $\tan\theta = dy/dx$, se obtiene

$$dy = \tan\theta\, dx = \operatorname{senh} \frac{w_0 x}{T_0}\, dx$$

lo que da

$$y(x) = \int_0^x dy = \frac{T_0}{w_0}\left(\cosh \frac{w_0 x}{T_0} - 1\right) \tag{6.16}$$

A la curva representada por la ecuación 6.16 se le llama **catenaria**.

Si la pendiente de la catenaria es pequeña en todas partes, entonces la curva difiere muy poco de una parábola. Como prueba de esta afirmación, se observa que si $\theta \ll 1$, entonces $dx = ds \cos\theta \approx ds$. En consecuencia, $w(s) \approx w(x)$, lo que significa que el peso del cable se puede aproximar por una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal. Esta aproximación suele simplificar la solución, debido a que el análisis de los cables parabólicos por lo general es más fácil que el de los cables catenarios.

T como una función de x y T_0 De acuerdo con la ecuación (6.7), la tensión en el cable es $T = T_0/\cos\theta$. Utilizando la relación geométrica $\cos\theta = dx/ds$, esto se convierte en $T = T_0\, ds/dx$. Al sustituir s de la ecuación (6.15), se obtiene

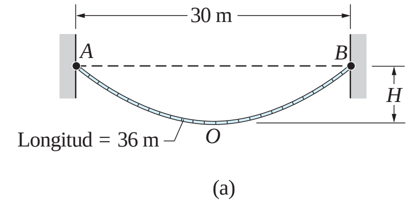
$$T = T_0 \cosh \frac{w_0 x}{T_0} \tag{6.17}$$

d. *Nota sobre la solución de problemas*

No existe un procedimiento estándar, paso a paso, para resolver problemas que comprendan cables flexibles. La razón es que el método de solución para cada problema depende en gran medida de la información que se da en el enunciado del problema. Sin embargo, las siguientes son dos directrices que se pueden aplicar en la mayoría de las situaciones y que pueden ser útiles.

1. No siempre es buena idea depender por completo de las ecuaciones (6.9) a (6.17). Con mucha frecuencia, un buen punto de partida es el diagrama de cuerpo libre del cable completo o una parte de él, similar a las figuras 6.10(b) o 6.11(b). Este DCL, en conjunto con las ecuaciones (6.9) a (6.17), se debe utilizar para formular un método de análisis antes de proceder con los cálculos reales.
2. Observe que el punto O, el origen del sistema de coordenadas y T_0 aparecen en todas las ecuaciones del cable. Si la ubicación del punto O y/o T_0 no se conocen, se deben determinar primero.

Problema de ejemplo **6.8**



(a)

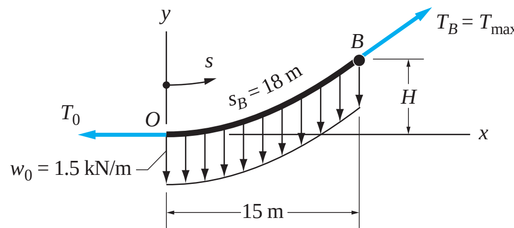
El cable de 36 m de longitud en la figura (a) pesa 1.5 kN/m. Determine la flecha H y la tensión máxima en el cable.

Solución

Método de análisis

Como la carga está distribuida a lo largo del cable, la forma del cable es una catenaria. Es obvio que el cable es simétrico respecto al punto medio de AB, lo que significa que la ubicación del punto más bajo O del cable se conoce. De la segunda de las ecuaciones (6.13), se observa que la tensión máxima en el cable ocurre en los puntos extremos, donde s es un máximo.

Ahora se traza el diagrama de cuerpo libre de la mitad derecha del cable, como se muestra en la figura (b). Si bien en la solución del problema se podría utilizar este DCL, es más fácil emplear las ecuaciones (6.15) a (6.17). Sin embargo, el DCL es conveniente para identificar los varios términos que aparecen en la solución.



(b) DCL del segmento OB

Al estudiar las ecuaciones (6.15) a (6.17), se concluye que la solución se puede obtener siguiendo los tres pasos siguientes.

Paso 1: Ecuación (6.15): sustituya $w_0 = 1.5$ kN/m y las coordenadas de B ($s = 18$ m, $x = 15$ m); despeje T_0.
Paso 2: Ecuación (6.16): sustituya $w_0 = 1.5$ kN/m, las coordenadas de B ($x = 15$ m, $y = H$) y el valor encontrado de T_0; despeje H.
Paso 3: Ecuación (6.17): sustituya $w_0 = 1.5$ kN/m, $x = 15$ m, $T = T_{max}$ y el valor determinado de T_0; despeje T_{max}.

Detalles matemáticos

Paso 1
La ecuación (6.15) es

$$s = \frac{T_0}{w_0} \operatorname{senh} \frac{w_0 x}{T_0}$$

$$18 = \frac{T_0}{1.5} \operatorname{senh} \frac{1.5(15)}{T_0}$$

Esta ecuación se debe resolver numéricamente. El resultado, que se puede verificar por sustitución, es $T_0 = 21.13$ kN.

Paso 2
La ecuación (6.16) es

$$y = \frac{T_0}{w_0}\left(\cosh\frac{w_0 x}{T_0} - 1\right)$$

$$H = \frac{21.13}{1.5}\left[\cosh\frac{1.5(15)}{21.13} - 1\right] = 8.77 \text{ m} \qquad \textit{Respuesta}$$

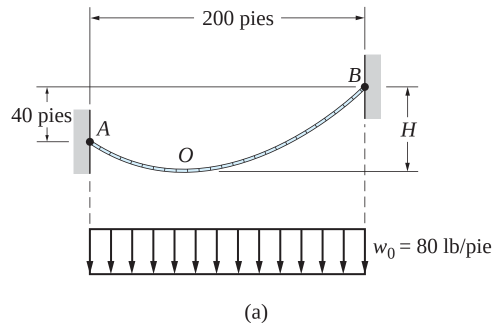
Paso 3
La ecuación (6.17) es

$$T = T_0 \cosh\frac{w_0 x}{T_0}$$

$$T_{max} = 21.13 \cosh\frac{1.5(15)}{21.13} = 34.3 \text{ kN} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo 6.9

En la figura (a) se muestra un cable que soporta la carga uniformemente distribuida $w_0 = 80$ lb/pie, donde la distancia está medida a lo largo de la horizontal. Determine el cable más corto para el que la tensión no exceda 10 000 lb y encuentre la distancia vertical correspondiente H.



(a)

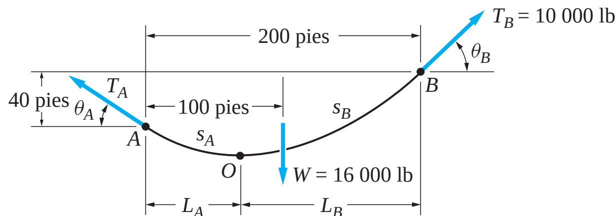
Solución

Método de análisis

Como la carga está distribuida uniformemente sobre la distancia horizontal, se sabe que la forma del cable es parabólica. También es aparente que la ubicación del punto más bajo O del cable y la tensión en el cable T_0 en ese punto no se conocen. Por tanto, el cálculo de estas incógnitas se aborda primero.

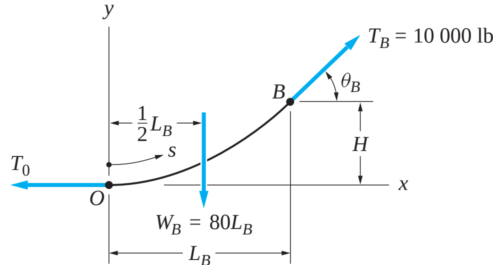
Un buen punto de partida es el diagrama de cuerpo libre del cable completo, como se muestra en la figura (b). Las fuerzas que aparecen en este diagrama son las tensiones en el cable en los puntos extremos (T_A y T_B) y la resultante de la carga distribuida: $W = (80 \text{ lb/pie})(200 \text{ pies}) = 16\,000$ lb. De acuerdo con la segunda

ecuación de las ecuaciones (6.9), la tensión en el cable aumenta con x (x se mide desde el vértice de la parábola). Se deduce que la tensión máxima en el cable ocurre en B; es decir, $T_B = 10\,000$ lb, como se muestra en la figura. El DCL en la figura (b) ahora contiene tres incógnitas: los ángulos de las pendientes θ_A y θ_B y la tensión T_A, que se podrían calcular todas a partir de las ecuaciones de equilibrio disponibles. Resulta que sólo se necesita θ_B, que se puede obtener de la ecuación de momentos $\Sigma M_A = 0$.



(b) DCL de todo el cable

Como paso siguiente, se traza el DCL de la parte del cable que se encuentra a la derecha del punto O, como se muestra en la figura (c). Suponiendo que θ_B ya se calculó, este DCL contiene tres incógnitas: L_B (que ubica el punto O), T_0 y H. Como también hay tres ecuaciones de equilibrio disponibles, todas las incógnitas ahora se pueden calcular. El paso final es calcular la longitud del cable con la ecuación (6.12).



(c) DCL del segmento OB

Detalles matemáticos

Del DCL de todo el cable en la figura (b), se obtiene

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad (10\,000 \operatorname{sen}\theta_B)(200) - (10\,000\cos\theta_B)(40) - (16\,000)(100) = 0$$

lo que se reduce a

$$\operatorname{sen}\theta_B - 0.2\cos\theta_B - 0.8 = 0$$

La raíz positiva menor de esta ecuación se puede encontrar por métodos numéricos. El resultado, que se puede verificar por sustitución, es $\theta_B = 62.98°$.

Del DCL del segmento OB en la figura (c) se obtiene

$$\Sigma F_x = 0 \qquad T_0 = T_B\cos\theta_B = 10\,000\cos 62.98^\circ = 4543 \text{ lb}$$

Observe que esta ecuación es idéntica a la primera ecuación de las ecuaciones (6.7). Utilizando el DCL en la figura (c), también se obtiene

$$\Sigma F_y = 0 \qquad 80L_B = T_B \operatorname{sen}\theta_B = 10\,000 \operatorname{sen} 62.98^\circ = 8908 \text{ lb}$$

Por tanto, $L_B = 8908/80 = 111.35$ pies y $L_A = 200 - 111.35 = 88.65$ pies. El DCL en la figura (c) también da

$$\Sigma M_O = 0 \quad \circlearrowleft + \quad T_B \operatorname{sen}\theta_B(L_B) - T_B \cos\theta_B(H) - 80L_B\frac{L_B}{2} = 0$$

lo que, al sustituir los valores de T_B, θ_B y L_B, da

$$10\,000 \operatorname{sen} 62.98^\circ(111.35) - 10\,000 \cos 62.98^\circ(H) - 80\frac{(111.35)^2}{2} = 0$$

Despejando H, se obtiene

$$H = 109.2 \text{ pies}$$ *Respuesta*

La longitud de cada uno de los segmentos del cable se puede calcular con la ecuación (6.12). Para el segmento OA, se sustituye $x = -L_A = -88.65$ pies, $w_0 = 80$ lb/pie y $T_0 = 4543$ lb. Por tanto, $w_0x/T_0 = 80(-88.65)/4543 = -1.5611$ y la ecuación (6.12) se convierte en

$$s(-L_A) = \frac{-88.65}{2}\sqrt{1 + (-1.5611)^2} + \frac{1}{2}\frac{4543}{80} \ln\left[(-1.5611) + \sqrt{1 + (-1.5611)^2}\right] = -117.0 \text{ pies}$$

El resultado negativo se debe a la convención de signos: la dirección positiva de s apunta hacia la derecha de O, en tanto que el punto A está a la izquierda de O. Por tanto, la longitud del segmento OA es $s_A = 117.0$ pies.

La longitud del segmento OB se obtiene utilizando $x = L_B = 111.35$ pies en la ecuación (6.12). Omitiendo los detalles de este cálculo, el resultado es $s_B = 163.1$ pies. De aquí, la longitud total del cable es

$$s_A + s_B = 117.0 + 163.1 = 280.1 \text{ pies}$$ *Respuesta*

Si la longitud del cable fuera menor que 280.1 pies, la tensión máxima en el cable sobrepasaría el valor límite de 10 000 lb.

Problemas

6.62 Demuestre que la tensión que actúa en un punto en un cable parabólico varía con las coordenadas *xy* del punto en la forma

$$T(x, y) = w_0 x \left[1 + (x/2y)^2\right]^{1/2} \qquad (x > 0)$$

6.63 La longitud *AB* del cable del puente colgante es $L = 120$ m con una flecha $H = 18$ m. El cable soporta una carga uniformemente distribuida de w_0 N/m a lo largo de la horizontal. Si la fuerza máxima permisible en el cable es 4 MN, determine el valor máximo de w_0.

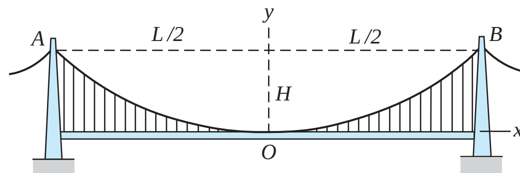


Fig. P6.63, P6.64

6.64 Los dos cables principales del puente colgante Akashi Kaiko en Japón tienen un claro $L = 1990$ m y una flecha $H = 233$ m. La carga en cada cable es $w_0 = 444.7$ kN/m (sin tráfico) a lo largo de la horizontal. Determine la fuerza máxima correspondiente en uno de los cables.

6.65 El cable *AB* soporta la carga uniformemente distribuida de 2 kN/m. Si la pendiente del cable en *A* es cero, calcule: (a) la fuerza máxima de tensión en el cable y (b) la longitud del cable.

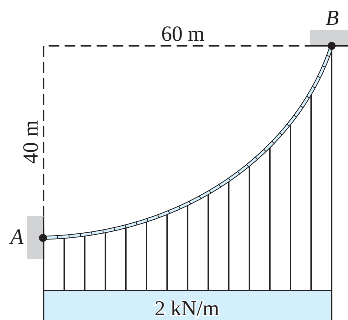


Fig. P6.65

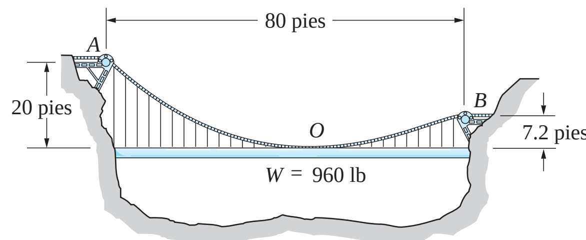


Fig. P6.66

6.66 Un tubo uniforme de 80 pies que pesa 960 lb está soportado por completo por un cable *AB* de peso despreciable. Determine la longitud del cable y la fuerza máxima en el cable. (Sugerencia: primero ubique el punto *O* donde el cable es tangente al tubo.)

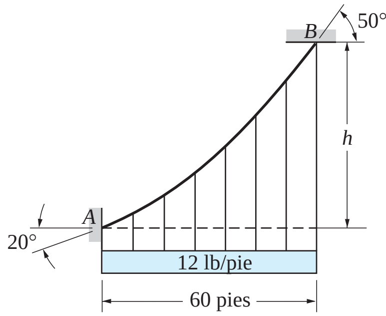


Fig. P6.67

6.67 El cable *AB* soporta una carga uniformemente distribuida de 12 lb/pie. Determine la fuerza máxima en el cable y la distancia *h*.

6.68 La cuerda unida al papalote pesa 0.4 oz/pie. Si la tensión en la cuerda es 2.8 lb en *O* y 3.2 lb en *B*, determine la longitud *s* de la cuerda y el peso *H* del papalote.

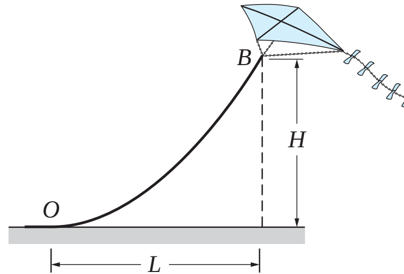


Fig. P6.68

6.69 Demuestre que la tensión que actúa en un punto en un cable catenario varía con la coordenada *y* del punto en la forma $T(y) = T_0 + w_0 y$.

6.70 Un cable uniforme que pesa 15 N/m pende de los puntos *A* y *B*. La fuerza en el cable en *B* se sabe que es de 500 N. Utilizando el resultado del problema 6.69, calcule: (a) la fuerza en el cable en *A* y (b) el claro *L*.

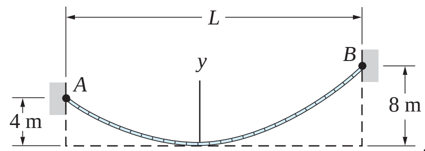


Fig. P6.70

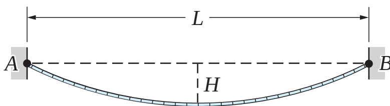


Fig. P6.71, P6.72

6.71 El claro *L* y la flecha *H* del cable *AB* son 100 m y 10 m, respectivamente. Si el cable pesa 50 N/m, determine la fuerza máxima en el cable utilizando (a) las ecuaciones de la catenaria y (b) la aproximación parabólica. (c) Calcule el error porcentual en la aproximación parabólica.

6.72 Determine la relación *H*/*L* que minimiza la fuerza máxima en el cable uniforme *AB* de un claro dado *L*. (Sugerencia: minimice la fuerza máxima respecto a T_0.)

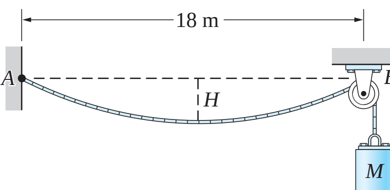


Fig. P6.73, P6.74

6.73 El cable de masa 1.8 kg/m está unido a un soporte rígido en *A* y pasa sobre una polea en *B*. Si la masa *M* = 40 kg está unida al extremo libre del cable, encuentre los dos valores de *H* para los que el cable estará en equilibrio. (Nota: el valor menor de *H* representa equilibrio *estable*.)

6.74 Un extremo del cable *AB* está fijo, en tanto que otro pasa sobre una polea lisa en *B*. Si la masa del cable es 1.5 kg/m y la flecha es *H* = 1.8 m, determine la masa *M* que está unida al extremo libre del cable.

6.75 El extremo de la manguera de jardín que pesa 0.5 lb/pie se jala con una fuerza de 40 lb inclinada 14° respecto a la horizontal. Determine la longitud *s* de la manguera que está levantada del suelo y la distancia horizontal correspondiente *L*.

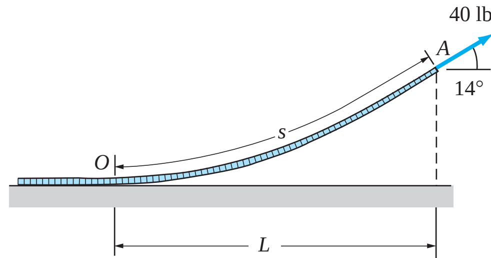


Fig. P6.75

6.76 La cinta de acero *AB* de 50 pies que pesa 2.4 lb se utiliza para medir la distancia horizontal entre los puntos *A* y *C*. Si en la báscula de resorte en *B* se lee 7.5 lb cuando la longitud de la cinta entre *A* y *C* es 36 pies, calcule la distancia horizontal L_{AC} entre *A* y *C* con cuatro dígitos significativos.

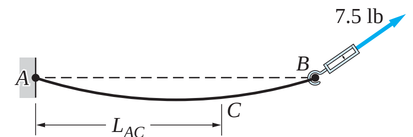


Fig. P6.76

6.77 El cable *AOB* pesa 5.2 N/m. Cuando la fuerza horizontal de 30 N se aplica al soporte de rodillo en *B*, la flecha en el cable es 5 m. Encuentre el claro *L* del cable.

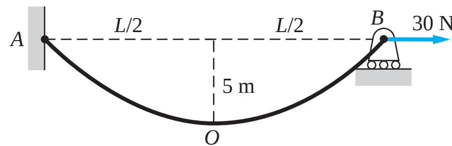


Fig. P6.77

6.78 La cadena *AB* pesa 5 lb/pie. Si la fuerza en la cadena en *B* es 800 lb, determine la longitud de la cadena.

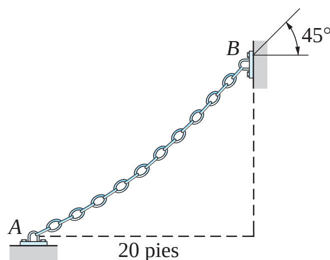


Fig. P6.78

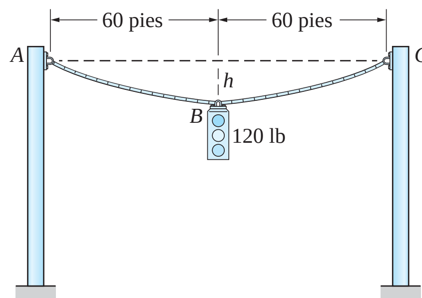


Fig. P6.79

6.79 El semáforo de 120 lb pende de dos cables idénticos *AB* y *BC*, cada uno con peso de 0.75 lb/pie. Si la fuerza horizontal máxima permisible ejercida por un cable sobre un poste vertical es 180 lb, determine la longitud más corta posible de cada cable y la distancia vertical correspondiente *h*.

*6.6 Cables ante cargas concentradas

a. Análisis general

En ocasiones se requiere que un cable soporte una variedad de cargas concentradas, como se muestra en la figura 6.12(a). Si el peso del cable es despreciable comparado con el de las cargas aplicadas, entonces cada segmento del cable es un miembro de dos fuerzas y la forma del cable consiste en una serie de líneas rectas. El análisis de un cable cargado de esta manera es similar al análisis de armaduras, excepto que en los cables las ubicaciones de los nodos (es decir, los puntos donde se aplican las cargas) a veces se desconocen. Igual que en el caso del análisis de armaduras, se puede utilizar el método de los nodos y/o el método de las secciones para determinar las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, con frecuencia es necesario incluir ecuaciones de restricciones geométricas a fin de tener ecuaciones suficientes para encontrar todas las incógnitas.

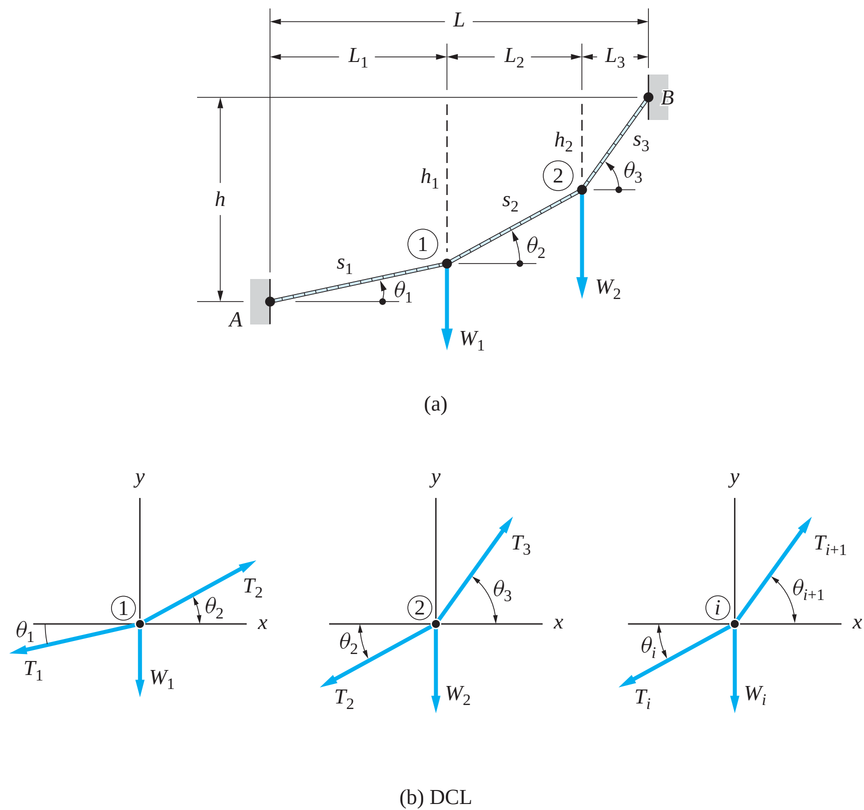


Fig. 6.12

Si un cable tiene n segmentos, entonces hay $(n-1)$ nodos. Por ejemplo, el cable en la figura 6.12(a) tiene $n = 3$ segmentos y $(n-1) = 2$ nodos, identificados 1 y 2. Se utiliza la notación siguiente: s_i es la longitud del segmento; L_i es el espaciamiento horizontal de las cargas y θ_i es el ángulo entre un segmento y la horizontal, donde $i = 1, 2, \ldots, n$ es el número de segmento. La posición vertical del nodo i-ésimo, medida *hacia abajo* desde el extremo B, se denota por h_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

En la figura 6.12(b) se muestran los DCL para los nodos 1, 2 y un nodo arbitrario i, $i = 1, 2,\ldots, n - 1$. El análisis de equilibrio de un cable con n segmentos comprende calcular la fuerza T_i y el ángulo de la pendiente θ_i de cada segmento del cable. Como el DCL de cada nodo produce dos ecuaciones de equilibrio, el número total de ecuaciones de equilibrio independientes para un cable con n segmentos es $2(n - 1)$. Las ecuaciones de equilibrio para el nodo i en la figura 6.12(b) son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad T_{i+1}\cos\theta_{i+1} - T_i\cos\theta_i = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad T_{i+1}\,\text{sen}\,\theta_{i+1} - T_i\,\text{sen}\,\theta_i - W_i = 0 \qquad \text{(b)}$$

donde $i = 1, 2,\ldots, n - 1$. De la ecuación (a) se observa que la componente horizontal $T_i \cos\theta_i$ es la misma para cada segmento. Identificando esta componente como T_0, se puede remplazar la ecuación (a) por

$$T_i\cos\theta_i = T_0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.18}$$

y la ecuación (b) se puede reescribir como

$$T_0(\tan\theta_{i+1} - \tan\theta_i) = W_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n - 1 \tag{6.19}$$

Observe que las ecuaciones (6.19) representan $(n - 1)$ ecuaciones que contienen las $(n + 1)$ incógnitas T_0, θ_1, $\theta_2,\ldots, \theta_n$. Por lo tanto, se deben obtener dos ecuaciones independientes adicionales antes de poder calcular todas las incógnitas.

La fuente de las ecuaciones adicionales depende principalmente de la naturaleza del problema. Es conveniente dividir los problemas en dos categorías dependiendo de si se dan los espaciamientos horizontales de las cargas (L_i) o si se dan las longitudes de los segmentos del cable (s_i) y para analizar cada categoría por separado (se supone que la posición relativa de los soportes, las distancias h y L en la figura 6.12(a), se conocen).

Como las ecuaciones (6.18) y (6.19) se dedujeron de la figura 6.12, en la figura también se definen las convenciones de signos que se utilizaron en las deducciones: *fuerzas de tensión* y *ángulos en sentido contrario al horario* medidos desde la horizontal son positivos y h es la distancia vertical medida *hacia abajo* desde el soporte derecho B. Estas convenciones también se aplican a las ecuaciones que se deducen en el resto de este apartado.

b. *Las separaciones horizontales entre las cargas están dadas*

Considere un cable con n segmentos para el cual se dan las separaciones horizontales de las cargas (L_1, $L_2,\ldots, L_n$). Para este caso, de la figura 6.12(a) se puede obtener la relación geométrica siguiente:

$$h = \sum_{i=1}^{n} L_i \tan\theta_i \tag{6.20}$$

Sin embargo, el problema aún no se puede resolver, a menos que se proporcione otro dato adicional de información. Esta información puede tomar varias formas. Por ejemplo, la tensión horizontal T_0 o la tensión máxima en el cable se pueden especificar (las dos condiciones son relevantes desde un punto de vista del diseño),

la posición vertical de uno de los nodos (por ejemplo, h_1) se puede prescribir, o la longitud total del cable se puede conocer.

Se debe destacar que, en general, el análisis comprende la solución de ecuaciones simultáneas no lineales en los ángulos θ_i. En muchos problemas esta dificultad se puede evitar considerando una ecuación de momentos apropiada utilizando el DCL de todo el cable (consulte el problema de ejemplo 6.10) o el DCL de una sección del cable que contenga dos o más nodos. Sin embargo, estas ecuaciones de equilibrio de momentos no son independientes de las ecuaciones (6.18)-(6.20).

c. *Las longitudes de los segmentos están dadas*

Considere ahora un cable con n segmentos para el cual se dan las longitudes de los segmentos $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Para este caso, la figura 6.12(a) produce dos relaciones geométricas independientes:

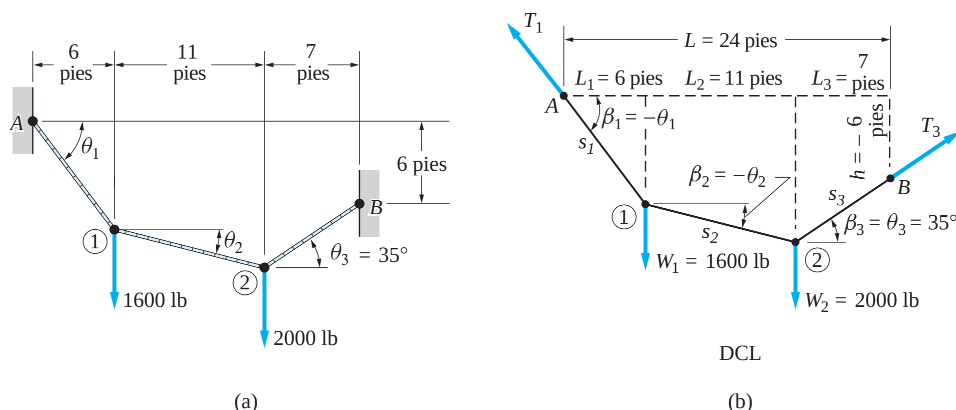
$$h = \sum_{i=1}^{n} s_i \operatorname{sen} \theta_i \qquad L = \sum_{i=1}^{n} s_i \cos \theta_i \tag{6.21}$$

Estas dos ecuaciones, junto con las $(n - 1)$ ecuaciones de equilibrio dadas en la ecuación (6.19), se pueden resolver para las $(n + 1)$ incógnitas sin necesidad de información adicional. Después de calcular $T_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, las fuerzas en los cables se pueden encontrar con la ecuación (6.18).

Por desgracia, en este caso no siempre es posible evitar la solución de ecuaciones simultáneas no lineales (una tarea muy difícil de realizar de manera analítica). Por tanto, puede ser necesario un programa de cómputo con capacidad de resolver ecuaciones simultáneas no lineales para resolver problemas en esta categoría.

Problema de ejemplo **6.10**

Para el cable cargado como se muestra en la figura (a), determine los ángulos β_1 y β_2, la fuerza en cada segmento y la longitud del cable.



(a) (b)

Solución

Método de análisis

El diagrama de cuerpo libre del cable completo se muestra en la figura (b), donde la identificación de las variables es consistente con la notación empleada en la figura 6.12 (recuerde que la dirección positiva para θ_1, θ_2 y θ_3 es en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la horizontal y h positiva se mide hacia abajo desde el extremo B).

Se observa que la información dada en la figura (a) incluye la separación horizontal de las cargas y el ángulo β_3. Por tanto, de acuerdo con el análisis en el apartado 6.6, el problema está estáticamente determinado y se puede obtener una solución escribiendo y resolviendo las ecuaciones (6.18) a (6.20). Sin embargo, en este problema la dificultad de resolver estas ecuaciones simultáneas no lineales se puede evitar.

Al examinar el DCL en la figura (b) se revela que T_3 se puede calcular a partir de la ecuación $\Sigma M_A = 0$. Las ecuaciones de equilibrio para los nodos 2 y 1 entonces determinarán las otras incógnitas sin tener que resolver las ecuaciones simultáneamente.

Detalles matemáticos

Del DCL del cable completo, figura (b), se obtiene

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad T_3 \operatorname{sen} 35^\circ(24) + T_3 \cos 35^\circ(6) - 1600(6) - 2000(17) = 0$$

lo que da

$$T_3 = 2334 \text{ lb}$$ *Respuesta*

La componente horizontal constante T_0 de la tensión en el cable ahora se puede determinar calculando la componente horizontal de T_3.

$$T_0 = T_3 \cos \theta_3 = 2334 \cos 35^\circ = 1912 \text{ lb}$$

Sustituyendo $i = 2$ en las ecuaciones (6.19), se obtiene la ecuación de equilibrio para el nodo 2:

$$T_0(\tan\theta_3 - \tan\theta_2) = W_2$$

$$1912(\tan 35^\circ - \tan\theta_2) = 2000$$

lo que da

$$\theta_2 = -19.08^\circ \qquad \text{o} \qquad \beta_2 = 19.08^\circ$$ *Respuesta*

Con $i = 1$, las ecuaciones (6.19) dan la ecuación de equilibrio para el nodo 1:

$$T_0(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = W_1$$

$$1912[\tan(-19.08^\circ) - \tan\theta_1] = 1600$$

lo que da

$$\theta_1 = -49.78^\circ \qquad \text{o} \qquad \beta_1 = 49.78^\circ$$ *Respuesta*

Las tensiones en el primer y segundo segmentos ahora se pueden encontrar con las ecuaciones (6.18):

$$T_1 = \frac{T_0}{\cos\theta_1} = \frac{1912}{\cos(-49.78^\circ)} = 2961 \text{ lb}$$ *Respuesta*

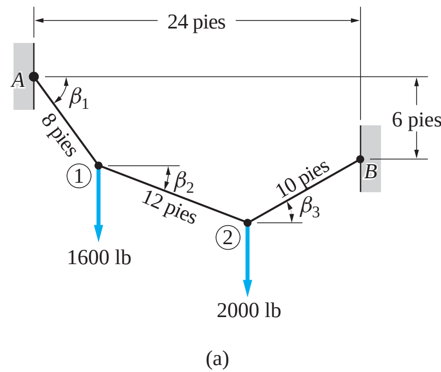
$$T_2 = \frac{T_0}{\cos\theta_2} = \frac{1912}{\cos(-19.08^\circ)} = 2023 \text{ lb}$$ *Respuesta*

La longitud total s del cable es

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 + s_3 \\ &= \frac{L_1}{\cos\beta_1} + \frac{L_2}{\cos\beta_2} + \frac{L_3}{\cos\beta_3} \\ &= \frac{6}{\cos 49.78^\circ} + \frac{11}{\cos 19.08^\circ} + \frac{7}{\cos 35^\circ} \\ &= 9.29 + 11.64 + 8.55 = 29.48 \text{ pies} \end{aligned}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 6.11

Para el cable cargado como se muestra en la figura (a), calcule los ángulos β_1, β_2 y β_3 y la fuerza en cada segmento del cable.

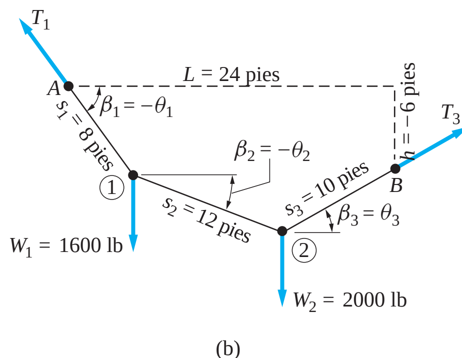


(a)

Solución

Método de análisis

El diagrama de cuerpo libre del cable completo se muestra en la figura (b). Su función principal es identificar las variables y aplicar las convenciones de signos definidas en la figura 6.12 (recuerde que las direcciones positivas para los ángulos θ son en sentido contrario de las manecillas del reloj y que h positiva se mide hacia abajo desde el extremo B).



(b)

Observe que se da la longitud de cada segmento del cable. Como se destacó en el apartado 6.6, en problemas de este tipo (y éste no es la excepción) es poco común obtener una solución sin tener que resolver ecuaciones simultáneas no lineales. Al inspeccionar la figura (a) se revela que dos o más ángulos desconocidos aparecerían en cada ecuación de equilibrio para el cable completo (ésta también sería la situación si se analiza el equilibrio de cualquier parte del cable). Por tanto, el método de solución más directo es escribir y resolver las ecuaciones (6.19) y (6.21), dando un total de cuatro ecuaciones que contienen las incógnitas T_0, θ_1, θ_2 y θ_3. Como las ecuaciones no son lineales, la solución se debe obtener numéricamente con un programa de cómputo con capacidad de resolver ecuaciones simultáneas no lineales.

Después de encontrar la solución, la fuerza en cada segmento se puede calcular con las ecuaciones (6.18).

Detalles matemáticos

Al sustituir los valores dados, las ecuaciones (6.19) dan

$$(i = 1) \qquad T_0(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = W_1$$

$$T_0(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = 1600 \tag{a}$$

y

$$(i = 2) \qquad T_0(\tan\theta_3 - \tan\theta_2) = W_2$$

$$T_0(\tan\theta_3 - \tan\theta_2) = 2000 \tag{b}$$

y las ecuaciones (6.21) se convierten en

$$s_1 \operatorname{sen}\theta_1 + s_2 \operatorname{sen}\theta_2 + s_3 \operatorname{sen}\theta_3 = h$$

$$8 \operatorname{sen}\theta_1 + 12 \operatorname{sen}\theta_2 + 10 \operatorname{sen}\theta_3 = -6 \tag{c}$$

y

$$s_1 \cos\theta_1 + s_2 \cos\theta_2 + s_3 \cos\theta_3 = L$$

$$8 \cos\theta_1 + 12 \cos\theta_2 + 10 \cos\theta_3 = 24 \tag{d}$$

La solución de las ecuaciones (a) a (d), que se puede verificar por sustitución, es

$$T_0 = 1789 \text{ lb}$$

$$\theta_1 = -53.62^\circ (= -\beta_1)$$

$$\theta_2 = -24.83^\circ (= -\beta_2)$$

$$\theta_3 = 33.23^\circ (= \beta_3)$$

Respuesta

Utilizando las ecuaciones (6.18), las tensiones en los segmentos del cable son

$$T_1 = \frac{T_0}{\cos\theta_1} = \frac{1789}{\cos(-53.62^\circ)} = 3020 \text{ lb}$$

$$T_2 = \frac{T_0}{\cos\theta_2} = \frac{1789}{\cos(-24.83^\circ)} = 1971 \text{ lb}$$

$$T_3 = \frac{T_0}{\cos\theta_3} = \frac{1789}{\cos 33.23^\circ} = 2140 \text{ lb}$$

Respuesta

Problemas

6.80 El cable que soporta cargas de 40 lb en B y C se mantiene en la posición indicada por la fuerza horizontal $P = 60$ lb aplicada en A. Determine h y las fuerzas en los segmentos BC y CD.

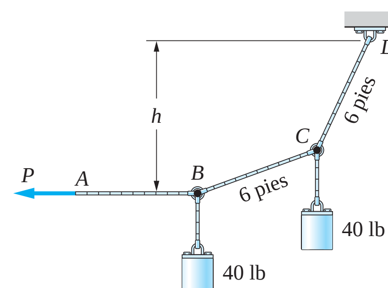


Fig. P6.80

6.81 El cable $ABCD$ se mantiene en la posición indicada por la fuerza horizontal P. Determine P, h y las fuerzas en los segmentos BC y CD del cable.

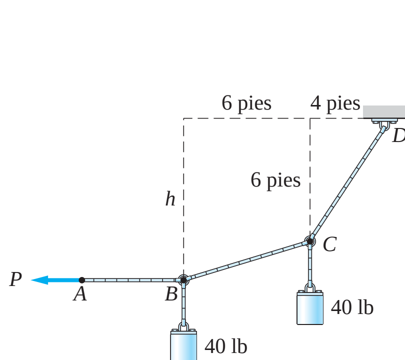


Fig. P6.81

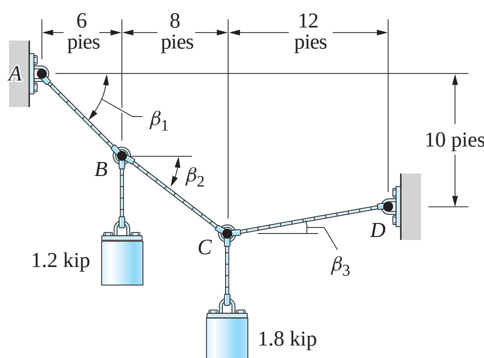


Fig. P6.82

6.82 Determine los ángulos β_2, β_3 y la fuerza en cada segmento del cable si $\beta_1 = 40°$.

6.83 El cable que soporta tres cargas de 400 lb tiene una flecha en C de $h_C = 16$ pies. Calcule la fuerza en cada segmento del cable.

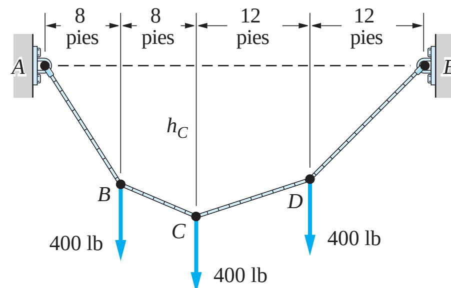


Fig. P6.83, P6.84

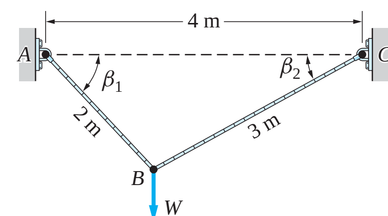


Fig. P6.85

6.84 El cable soporta tres cargas de 400 lb como se muestra. Si la tensión máxima permisible en el cable es 900 lb, encuentre la flecha menor posible h_C en C.

6.85 El cable ABC de 5 m de longitud soporta la fuerza W en B. Determine: (a) los ángulos β_1, β_2 y (2) la fuerza en cada segmento del cable en términos de W.

6.86 Cuando se aplica la carga de 12 kN y la fuerza desconocida P, el cable adopta la forma indicada. Determine P y la fuerza en cada segmento del cable.

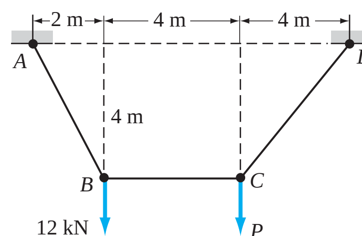


Fig. P6.86

6.87 El cable está sometido a una fuerza horizontal de 150 lb en B y a una fuerza vertical de 80 lb en C. Determine la fuerza en el segmento CD del cable y la distancia b.

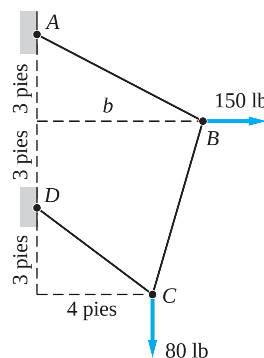


Fig. P6.87

6.88 El cable de 15 m de longitud soporta las cargas W_1 y W_2 como se indica. Encuentre la relación W_1/W_2 para la cual el segmento BC será horizontal; es decir, $\beta_2 = 0$.

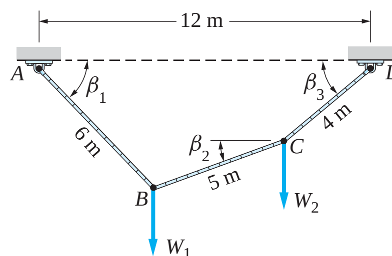


Fig. P6.88, P6.89

6.89 El cable de 15 m de longitud soporta las fuerzas $W_1 = W_2 = W$ en B y C. (a) Deduzca las ecuaciones simultáneas para β_1, β_2 y β_3. (b) Demuestre que la solución para estas ecuaciones es $\beta_1 = 41.0°$, $\beta_2 = 9.8°$ y $\beta = 50.5°$. (c) Calcule la fuerza en cada segmento en términos de W.

6.90 El peso de 12 kN pende de una polea pequeña que puede deslizarse por el cable. La longitud del cable *ABC* es 18 m. Determine la fuerza horizontal *P* que mantenga la polea en equilibrio en la posición $x = 4$ m.

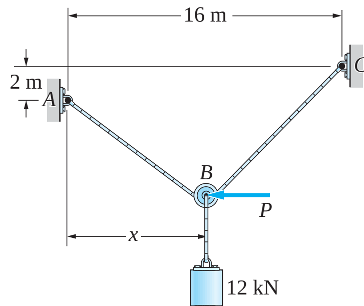


Fig. P6.90

6.91 El cable *ABCD* se mantiene en la posición indicada por la fuerza horizontal *P*. Determine *P* y la fuerza en cada segmento del cable.

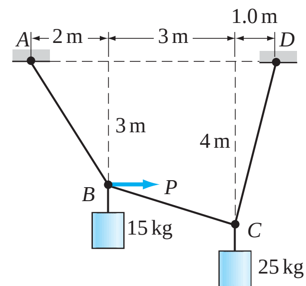


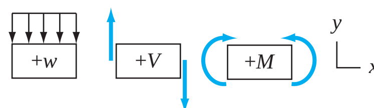
Fig. P6.91

Repaso de ecuaciones

Vigas

Una viga es una barra esbelta que soporta cargas que son perpendiculares a ella.

Convenciones de signos para carga, fuerza cortante y momento flexionante



Ecuaciones diferenciales de equilibrio

$$w = -dV/dx \qquad V = dM/dx$$

Método del área

$$V_B = V_A - \text{área del diagrama } w\,\big]_A^B$$

$$M_B = M_A + \text{área del diagrama } V\,\big]_A^B$$

$$V_A^+ = V_A^- - P_A \qquad M_A^+ = M_A^- + C_A$$

Cable parabólico

Si la carga w_0 está distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal, la forma del cable es parabólica:

$$y(x) = \frac{w_0 x^2}{2T_0}$$

$$s(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{w_0 x}{T_0}\right)^2} + \frac{T_0}{2w_0} \ln\left[\frac{w_0 x}{T_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 x}{T_0}\right)^2}\right]$$

T_0 = tensión en el cable en $x = 0$
$s(x)$ = longitud medida a lo largo del cable desde $x = 0$

Cable catenario

Si la carga w_0 está distribuida uniformemente a lo largo del cable, la forma del cable es una catenaria:

$$y(x) = \frac{T_0}{w_0}\left(\cosh\frac{w_0 x}{T_0} - 1\right)$$

$$s(x) = \frac{T}{w_0}\operatorname{senh}\frac{w_0 x}{T_0}$$



7 Fricción seca



La fuerza necesaria para girar la manija de una prensa de tornillo, como la antigua prensa de uvas de la fotografía, depende del coeficiente de fricción entre las roscas del tornillo. Este efecto se ilustra en el problema de ejemplo 7.12. Andrey Kudinov/ Shutterstock

7.1 Introducción

En la mayoría de los problemas de equilibrio que hemos analizado hasta este punto, las superficies de contacto fueron sin fricción. Por tanto, las fuerzas reactivas eran normales a las superficies de contacto. El concepto de una superficie sin fricción es, por supuesto, una idealización. Todas las superficies reales también proporcionan una componente de fuerza que es tangente a la superficie, denominada *fuerza de fricción*, que resiste el deslizamiento.

En muchas situaciones, las fuerzas de fricción son útiles. Por ejemplo, la fricción posibilita que camine sin deslizarse, mantiene firmes clavos, tornillos y posibi-

lita transmitir potencia por medio de embragues y bandas. Por otro lado, la fricción también puede ser perjudicial: causa desgaste en la maquinaria y reduce la eficiencia en la transmisión de potencia al convertir la energía mecánica en calor.

La *fricción seca* se refiere a la fuerza de fricción que existe entre dos superficies sólidas no lubricadas. La *fricción fluida* actúa entre superficies móviles que están separadas por una capa de fluido. La fricción en un cojinete liso lubricado se clasifica como fluida, debido a que las dos mitades del cojinete no están en contacto directo sino que están separadas por una capa delgada de lubricante líquido. En este capítulo se considera sólo la fricción seca.* El estudio de la fricción fluida comprende la hidrodinámica, que está fuera del alcance de este libro.

7.2 Teoría de Coulomb de la fricción seca

La fricción seca es un fenómeno complejo que aún no se comprende del todo. En esta sección se introduce una teoría muy simplificada, conocida como teoría de Coulomb de la fricción seca, que ha dado resultados satisfactorios en muchos problemas prácticos.

La teoría de Coulomb se explica mejor considerando dos cuerpos que están en contacto entre sí, como se muestra en la figura 7.1(a). Aunque sólo se indica un punto de contacto en esta figura, el análisis siguiente también se aplica para un área de contacto finita. El *plano de contacto* ilustrado en la figura 7.1(a) es tangente a los dos cuerpos en el punto de contacto. En la figura 7.1(b) se ilustran los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos, donde N es la fuerza normal de contacto y F es la fuerza de fricción. La fuerza N es perpendicular al plano de contacto, en tanto que F se encuentra en el plano de contacto. La teoría de Coulomb consiste de varios postulados que se explican a continuación.

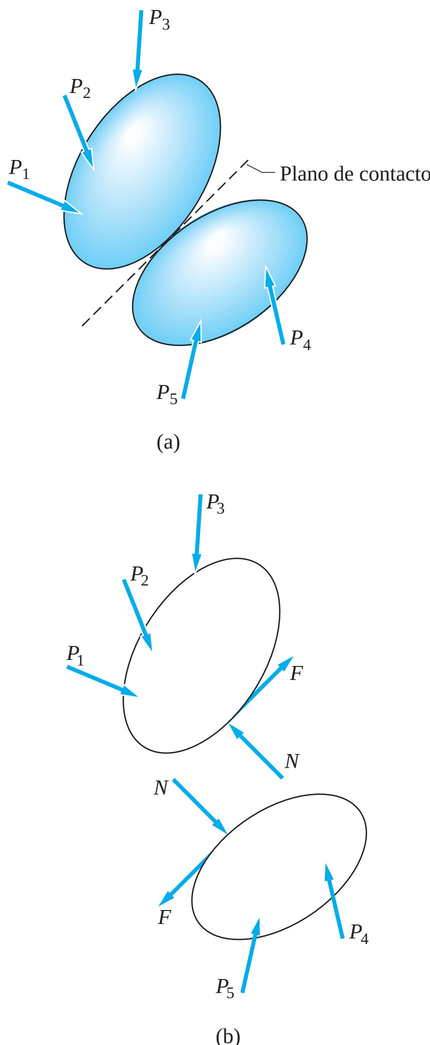


Fig. 7.1

a. Caso estático

Coulomb propuso la ley siguiente: si no hay movimiento relativo entre dos superficies que están en contacto, la fuerza normal N y la de fricción F satisfacen la relación siguiente.

$$F \leq F_{max} = \mu_s N \tag{7.1}$$

donde F_{max} es la fricción estática *máxima* que *puede existir* entre las superficies en contacto y μ_s se conoce como *coeficiente de fricción estática*. El coeficiente de fricción estática es una constante experimental que depende de la composición y rugosidad de las superficies en contacto. Los valores comunes de μ_s se indican en la tabla 7.1. Observe que en la ecuación (7.1) se establece simplemente que la fuerza F que existe ante condiciones estáticas (sin movimiento relativo) tiene un límite superior que es proporcional a la fuerza normal.

*La fricción seca también se conoce como fricción de Coulomb, en honor de C. A. de Coulomb (1736-1806), el primer investigador que formuló completamente las leyes de la fricción seca.

Materiales en contacto	μ_s	μ_k
Madera sobre madera	0.70	0.40
Acero sobre acero	0.15	0.09
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Acero sobre latón	0.50	0.40
Madera sobre piedra	0.70	0.30

Tabla 7.1 Coeficientes de fricción seca aproximados para superficies secas

b. Deslizamiento inminente

Considere el caso estático en el que la fuerza de fricción es igual a su valor límite; es decir,

$$F = F_{\max} = \mu_s N \tag{7.2}$$

Para esta condición, las superficies están a punto de deslizarse, una condición conocida como *deslizamiento inminente*. Cuando el deslizamiento es inminente, las superficies están en reposo una con respecto a la otra. Sin embargo, cualquier cambio que requiera un aumento en la fuerza de fricción causaría su deslizamiento. La dirección para $F_{\max}$ se puede determinar a partir de la observación que

$F_{\max}$ siempre se opone al deslizamiento inminente

c. Caso dinámico

Si las dos superficies de contacto están deslizándose entre sí, la fuerza de fricción F se postula igual a

$$F = F_k = \mu_k N \tag{7.3}$$

donde N es la fuerza normal de contacto; μ_k es una constante experimental denominada *coeficiente de fricción cinética* y a F_k se le refiere como *fuerza de fricción cinética* o *dinámica*. Como se indica en la tabla 7.1, el coeficiente de fricción cinética suele ser menor que su contraparte estática. Igual que en el caso estático,

F_k siempre se opone al deslizamiento

d. Análisis adicional de la fricción de Coulomb

Al aplicar la teoría de Coulomb, la diferencia entre $F_{\max}$ y F_k se debe comprender con claridad: $F_{\max}$ es la fuerza de fricción *máxima* que *puede* existir ante condiciones estáticas; F_k es la fuerza de fricción que *existe* durante el deslizamiento.

Para ilustrar las leyes de la fricción de Coulomb, considere la situación ilustrada en la figura 7.2(a). El bloque de peso W se supone estar en reposo sobre una superficie horizontal cuando se somete a la fuerza horizontal P. (Limitamos nuestra aten-

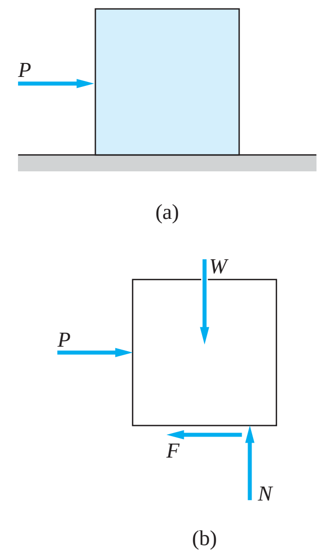


Fig. 7.2

ción al movimiento deslizante; la posibilidad de que el bloque se vuelque respecto a su esquina se considera más adelante.) El diagrama de cuerpo libre del bloque se muestra en la figura 7.2(b). Como la fuerza de fricción F resiste la tendencia del bloque a deslizarse, F está dirigida en dirección opuesta a P. Ahora se examina la variación de F con P ya que esta última aumenta lentamente desde cero.

Si P es relativamente pequeña, el bloque permanecerá en reposo y las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, dan $F = P$ y $N = W$.* Por tanto, siempre que el bloque permanezca en reposo, la fuerza de fricción F es igual a la fuerza aplicada P. En la figura 7.3 se muestra la gráfica de F contra P. En la región estática, $0 \leq F \leq F_{max}$; la variación es una línea recta con pendiente unitaria. Cuando $F = F_{max}$, el bloque aún está en equilibrio estático, pero el deslizamiento es inminente. Sin embargo, el más ligero incremento en P resultaría en deslizamiento. En la figura 7.3, el punto que refiere el deslizamiento inminente marca el final de la región estática. Cuando P excede F_{max}, el bloque empieza a deslizarse y la fuerza de fricción F disminuye a su valor cinético F_k. Si P se aumenta aún más, F permanece constante en F_k. En consecuencia, la gráfica de F contra P es una línea horizontal en el intervalo dinámico.

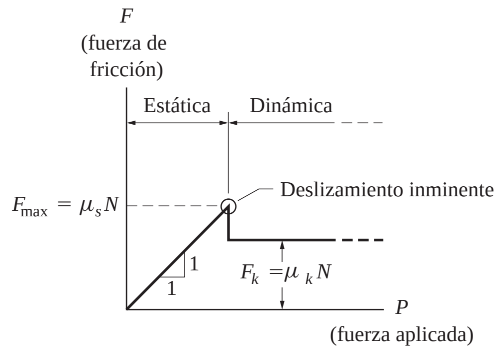


Fig. 7.3

e. Limitaciones

Debido a que no existe una explicación teórica que describa con precisión los fenómenos de la fricción, los ingenieros deben confiar en constantes empíricas, como el coeficiente de fricción. Los valores indicados en manuales de los coeficientes de fricción se deben tratar como valores aproximados. Los resultados experimentales indican que los coeficientes pueden variar en gran medida con las condiciones del medio ambiente, como la humedad, la limpieza de las superficies, etcétera.

La teoría de la fricción seca sólo es aplicable a superficies que estén secas o que sólo contengan una pequeña cantidad de lubricante. Si existe un movimiento relativo entre las superficies de contacto, la teoría es válida sólo para bajas velocidades. Si las superficies están bien lubricadas y se mueven con velocidades relativas altas, las características friccionales se describen mejor con las teorías de la fricción fluida, que están fuera del alcance de este libro.

*La ecuación de equilibrio de momentos determinaría la línea de acción de la fuerza normal N, una consideración importante en el análisis del volcamiento. Sin embargo, dado que más adelante se abordará el análisis del volcamiento, en este momento esta ecuación no es de interés.

Es interesante observar que la teoría de la fricción seca de Coulomb no depende del área de contacto. Por supuesto que existen muchas situaciones donde éste no es el caso. Por ejemplo, la tracción (fuerza de fricción) entre un neumático de un automóvil y el pavimento se puede incrementar ante ciertas condiciones dejando salir una pequeña cantidad de aire del neumático, incrementando así el área de contacto. Es obvio que la teoría de la fricción seca de Coulomb no es aplicable en esta situación. La tracción máxima en este caso también se afecta por factores, como la adhesión superficial, que depende del área de contacto.

7.3 Clasificación y análisis de problemas

El análisis de problemas de equilibrio que comprenden fricción se puede complicar debido a que la ley de Coulomb, ecuación (7.1), es una desigualdad que no indica cuál es la fuerza de fricción; sino sólo cuál es la fuerza de fricción *máxima posible*. La igualdad $F = F_{\text{max}} = \mu_s N$ sólo puede utilizarse si se sabe que el deslizamiento es inminente. Como F no necesariamente es igual a F_{max} en una superficie de fricción, no es posible desarrollar un solo método de análisis que sea válido para todos los problemas de fricción. Sin embargo, los problemas de fricción se pueden clasificar en tres tipos y para cada uno se puede delinear un método de solución por separado.

Tipo I *El enunciado del problema no especifica movimiento inminente.* En problemas de este tipo, no se sabe si el cuerpo está o no en equilibrio. Por tanto, el análisis debe comenzar con una suposición de que se parte del equilibrio.

Método de análisis

1. *Suponga equilibrio* Es aconsejable escribir esta suposición como recordatorio de que la solución no estará completa a menos que se haya verificado la suposición. El sentido de cada fuerza de fricción se puede suponer debido a que la solución de las ecuaciones de equilibrio determinará el sentido correcto.
2. *Resuelva las ecuaciones de equilibrio* para las fuerzas de fricción requeridas para el equilibrio.*
3. *Verifique la suposición* Si las fuerzas de fricción necesarias para el equilibrio no exceden sus límites (es decir, si $F \leq \mu_s N$ en cada superficie de fricción), entonces la suposición es correcta y las incógnitas restantes se pueden calcular utilizando el análisis de equilibrio. (Observe que si $F = \mu_s N$ en una superficie, lo que implicaría deslizamiento inminente, entonces la suposición aún es correcta.) Si el equilibrio requiere que $F > \mu_s N$ en cualquier superficie de fricción (lo que es físicamente imposible), la suposición de equilibrio es incorrecta. Por tanto, se tiene un problema dinámico en el que las fuerzas de fricción en las superficies de deslizamiento son $F = F_k = \mu_k N$.

Consulte los problemas de ejemplo 7.1 y 7.4 como muestras de problemas tipo I.

*En este análisis se presupone que las fuerzas de fricción están estáticamente determinadas. Las fuerzas de fricción estáticamente indeterminadas se omiten en el análisis presente. Los problemas de este tipo se resuelven mejor utilizando el principio del trabajo virtual (consulte el capítulo 10).

Tipo II *El enunciado del problema implica deslizamiento inminente y las superficies donde el deslizamiento es inminente se conocen*. Los problemas de fricción de este tipo se pueden analizar de la manera más directa, debido a que no requieren suposiciones y, por tanto, comprobaciones. No es necesario suponer equilibrio: por definición un cuerpo que se sabe que está en un estado de deslizamiento inminente está en equilibrio.

Métodos de análisis

1. *Haga $F = F_{max} = \mu_s N$* en las superficies donde el deslizamiento es inminente. Asegúrese de que el sentido de cada F_{max} se muestre de manera correcta en el DCL (oponiéndose al deslizamiento inminente), debido a que la solución de las ecuaciones de equilibrio pueden depender de las direcciones supuestas de las fuerzas de fricción.
2. *Despeje las incógnitas* utilizando las ecuaciones de equilibrio.

Consulte los problemas de ejemplo 7.2, 7.5 y 7.6 como muestras de los problemas tipo II.

Tipo III *El enunciado del problema implica deslizamiento, pero no se conocen las superficies en las que el deslizamiento es inminente*. El análisis de los problemas de este tipo es el más tedioso, debido a que las superficies en las que el deslizamiento es inminente se deben identificar mediante prueba y error. Una vez que se hace una suposición, el análisis es similar al de los problemas tipo II. Aquí se pueden emplear dos métodos de análisis, que se describen a continuación.

Método de análisis 1

1. *Determine todas las formas posibles* en que el deslizamiento puede ser inminente.
2. *Para cada caso, haga $F = F_{max}$* en las superficies donde el deslizamiento es inminente y resuelva las ecuaciones de equilibrio. Una vez más, el sentido de cada F_{max} debe ser el correcto sobre los DCL. En general, se obtiene una solución diferente para cada modo de deslizamiento inminente.
3. *Elija la respuesta correcta* examinando las soluciones.

Método de análisis 2

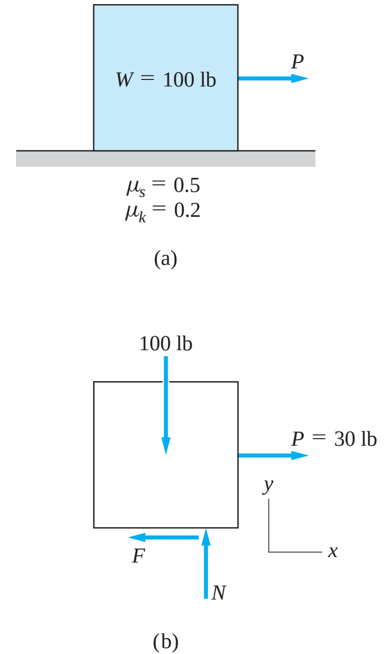
1. *Determine todas las formas posibles* en que el deslizamiento puede ser inminente.
2. *Para uno de los casos, haga $F = F_{max}$* en las superficies donde el deslizamiento es inminente y resuelva las ecuaciones de equilibrio.
3. *Verifique la solución* comparando la fuerza de fricción en cada una de las otras superficies con su valor límite. Si todas estas fuerzas son menores que o iguales a sus valores máximos permisibles, entonces la solución es correcta. Si una fuerza de fricción excede su valor límite $\mu_s N$, la solución es inválida y se debe analizar otro modo de deslizamiento inminente. Este procedimiento debe continuar hasta que se encuentre la solución correcta.

Consulte los problemas de ejemplo 7.3 y 7.7 como muestra de problemas tipo III.

Advertencia Recuerde que la ecuación $F = \mu_s N$ es válida sólo en el caso especial de deslizamiento inminente. Muchas de las dificultades que enfrentan los estudiantes tienen su origen en la suposición de que la ecuación $F = \mu_s N$ siempre es válida.

Problema de ejemplo 7.1

El bloque de 100 lb en la figura (a) inicialmente está en reposo sobre un plano horizontal. Determine la fuerza de fricción entre el bloque y la superficie después de que P se incrementa gradualmente de 0 a 30 lb.



Solución

Del enunciado del problema se concluye que este problema es del tipo I (no se especifica movimiento inminente). Además, no se sabe si el bloque aún permanecerá en reposo en equilibrio estático cuando $P = 30$ lb.

Suponga equilibrio

Una vez que se supone que el cuerpo permanece en reposo, las ecuaciones de equilibrio para el diagrama de cuerpo libre en la figura (b) se pueden utilizar para calcular las dos incógnitas (N y F), como se indica.

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad N - 100 = 0$$

$$N = 100 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad P - F = 0$$

$$F = P = 30 \text{ lb}$$

Antes de poder aceptar esta solución, se debe verificar la suposición de equilibrio.

Verificación

La fuerza de fricción estática máxima es

$$F_{\text{máx}} = \mu_s N = 0.5(100) = 50 \text{ lb}$$

Como $F < F_{\text{max}}$, se concluye que el bloque está en equilibrio estático y el valor correcto de la fuerza de fricción es

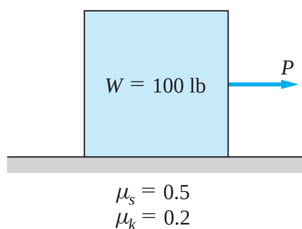
$$F = 30 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Comentario

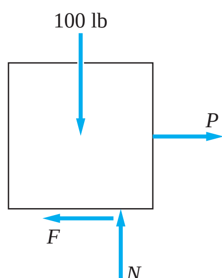
Si el coeficiente de fricción estática hubiera sido 0.25, en vez de 0.5, el bloque no estaría en equilibrio. La fuerza de fricción de 30 lb para el equilibrio sería mayor que $F_{\text{max}} = 0.25(100) = 25$ lb; Por tanto, la fuerza de fricción sería

$$F = F_k = \mu_k N = 0.2(100) = 20 \text{ lb}$$

y el bloque estaría deslizándose hacia la derecha.



(a)



(b)

Problema de ejemplo 7.2

El bloque de 100 lb en la figura (a) está en reposo sobre un plano horizontal rugoso antes de que se aplique la fuerza P. Determine la magnitud de P que causaría un deslizamiento inminente hacia la derecha.

Solución

El enunciado del problema especifica con claridad que el deslizamiento es inminente. Como se sabe dónde es inminente (sólo hay una superficie de fricción), se concluye que este es un problema tipo II.

El diagrama de cuerpo libre del bloque se muestra en la figura (b), donde la fuerza de fricción se indica actuando hacia la izquierda, opuesta a la dirección del deslizamiento inminente. Hay tres incógnitas en este DCL: P, N y F. También hay tres ecuaciones independientes: dos ecuaciones de equilibrio y la ley de Coulomb para el deslizamiento inminente.

Del DCL se observa que las ecuaciones de equilibrio dan $N = 100$ lb y $P = F$. Entonces la ley de Coulomb resulta en

$$P = F = F_{max} = \mu_s N = 0.5(100) = 50 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

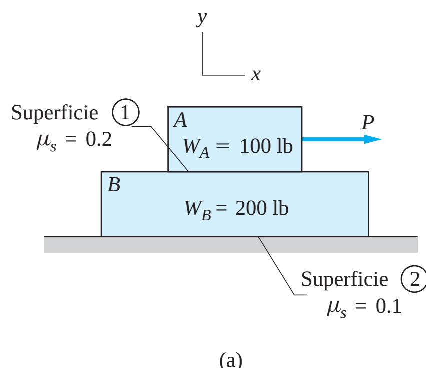
Esto completa la solución. Como no se hicieron suposiciones, no es necesario hacer verificaciones.

Comentario

Observe que la figura (a) en los dos problemas de ejemplo 7.1 y 7.2 es idéntica. Las diferencias se revelan sólo en los enunciados de los problemas. Esto muestra que se debe leer cuidadosamente cada enunciado del problema, ya que determina el tipo de problema.

El enunciado de un problema puede *implicar* deslizamiento inminente. Por ejemplo, los enunciados siguientes son equivalentes al enunciado original de este problema: los dos implican que P se debe calcular para deslizamiento inminente.

1. Determine la fuerza máxima P que se puede aplicar sin ocasionar que el bloque se deslice hacia la derecha.
2. Determine la fuerza mínima P que ocasionará que el bloque se deslice hacia la derecha.



(a)

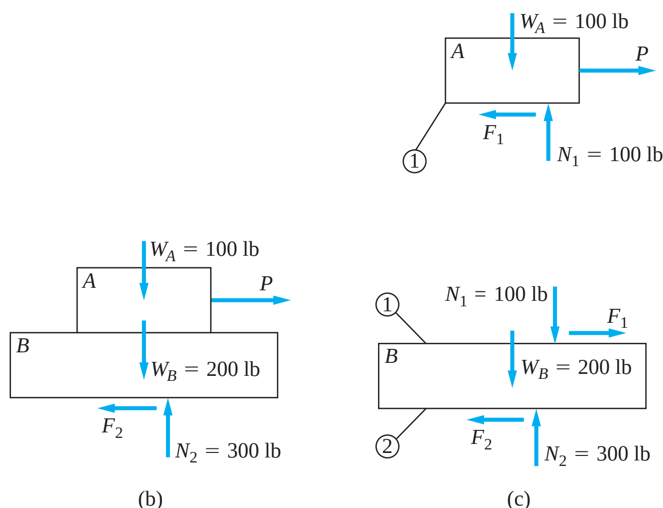
Problema de ejemplo 7.3

Determine la fuerza máxima P que se puede aplicar al bloque A en la figura (a) sin que se mueva ninguno de los bloques.

Solución

En el enunciado del problema se indica que se debe encontrar la P que ocasione el movimiento inminente. Sin embargo, hay dos formas posibles en las que el movimiento puede ser inminente: en la superficie 1 o en la superficie 2. Como se especifica deslizamiento inminente pero no su ubicación, este es un problema tipo III.

Los diagramas de cuerpo libre de todo el sistema y de cada bloque se muestran en las figuras (b) y (c), respectivamente. Observe que el equilibrio de cada bloque da



(b) (c)

$N_1 = 100$ lb y $N_2 = 300$ lb, como se muestra en los DCL. Se debe poner atención a las fuerzas de fricción. La fuerza de fricción F_2 en la parte inferior del bloque B está dirigida hacia la izquierda, opuesta a la dirección en la que el deslizamiento sería inminente. En la superficie 1, el bloque A tendería a deslizarse a la derecha, a lo largo de la superficie del bloque B. Por tanto, F_1 está dirigida hacia la izquierda en el bloque A y hacia la derecha en el bloque B. La tendencia de F_1 a deslizar B hacia la derecha se resiste por la fuerza de fricción F_2. Observe que F_1 y N_1 no aparecen en el DCL en la figura (b), debido a que son internas al sistema de los dos bloques.

A continuación se presentan dos soluciones para ilustrar los dos métodos de análisis descritos en la sección 7.3.

Método de análisis 1

Primero, suponga deslizamiento inminente en la superficie 1. Con esta suposición se tiene

$$F_1 = (F_1)_{max} = (\mu_s)_1 N_1 = 0.2(100) = 20 \text{ lb}$$

El DCL del bloque A entonces da

$$\Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \quad P - F_1 = 0$$
$$P = F_1 = 20 \text{ lb}$$

Luego, suponga deslizamiento inminente en la superficie 2, lo que da

$$F_2 = (F_2)_{max} = (\mu_s)_2 N_2 = 0.1(300) = 30 \text{ lb}$$

Del DCL de todo el sistema, figura (b), entonces se obtiene

$$\Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \quad P - F_2 = 0$$
$$P = F_2 = 30 \text{ lb}$$

Hasta ahora se determinó que $P = 20$ lb ocasionará el movimiento inminente en la superficie 1 y que $P = 30$ lb ocasionará el movimiento inminente en la superficie 2. Por tanto, la fuerza máxima que se puede aplicar sin ocasionar que ninguno de los bloques se mueva es

$$P = 20 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

con deslizamiento inminente en la superficie 1.

Asegúrese de comprender que la fuerza máxima que se puede aplicar es la menor de los dos valores determinados en los cálculos anteriores. Si el deslizamiento es inminente cuando $P = 20$ lb, entonces el sistema no estará en reposo cuando $P = 30$ lb.

Método de análisis 2

Suponga movimiento inminente en la superficie 1. Se obtendría entonces $P = (F_1)_{max} = 20$ lb, como se determinó en el método de análisis 1. Luego, se comprueba la suposición.

Comprobación

La suposición de movimiento inminente en la superficie 1 se comprueba comparando la fuerza de fricción F_2 con $(F_2)_{max}$, su valor máximo posible. Utilizando el DCL del bloque B, se obtiene

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad F_1 - F_2 = 0$$

$$F_1 = F_2 = 20 \text{ lb}$$

Como $(F_2)_{max} = (\mu_s)_2 N_2 = 0.1(300) = 30$ lb, se tiene que $F_2 < (F_2)_{max}$. En consecuencia, se concluye que el movimiento inminente en la superficie 1 es la suposición correcta, de manera que la respuesta es $P = 20$ lb.

Si F_2 hubiera resultado mayor que $(F_2)_{max}$, sabríamos que el deslizamiento inminente sería primero en la superficie 2 y el problema se tendría que resolver de nuevo partiendo de este hecho.

Comentario

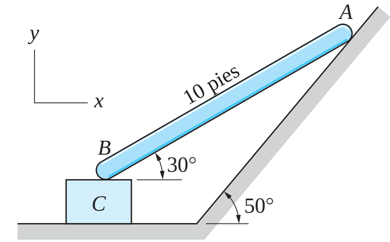
En este problema hay cinco incógnitas: P, N_1, F_1, N_2 y F_2. Hay cuatro ecuaciones de equilibrio independientes: dos para cada bloque. La suposición de que el movimiento inminente en una superficie proporciona la quinta ecuación, $F = \mu_s N$, hace el problema estáticamente determinado.

En nuestra solución, se consideraron dos modos de movimiento inminente posibles: en la superficie 1 y en la superficie 2. El deslizamiento inminente en las dos superficies al mismo tiempo es obviamente una tercera posibilidad, pero no se necesita examinar de manera independiente. Los dos análisis anteriores determinarían si el deslizamiento inminente simultáneo es en efecto del caso. En el método de análisis 1 los dos valores calculados de P serían iguales. En el método de análisis 2 la comprobación revelaría que $F = F_{max}$ en las dos superficies.

Advertencia Un error que con frecuencia se comete en el análisis de problemas de tipo III es suponer que el movimiento es inminente en la superficie con el coeficiente de fricción estática menor. La solución de este problema ilustra que éste no siempre es el caso.

Problema de ejemplo 7.4

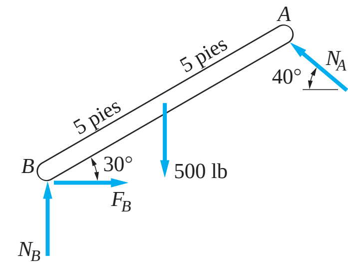
¿Puede estar el sistema de la figura (a) en equilibrio estático en la posición indicada? La barra uniforme AB pesa 500 lb y el peso del bloque C es 300 lb. La fricción en A es despreciable y el coeficiente de fricción estática es 0.4 en las otras superficies de contacto.



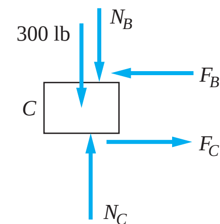
(a)

Solución

Como no se sabe si el movimiento es inminente, este problema se identifica como tipo I. Observe que los DCL de la barra y del bloque, figuras (b) y (c), contienen cinco incógnitas: N_A, N_B, F_B, N_C y F_C.



(b)



(c)

Suponga equilibrio

Con esta suposición, hay cinco ecuaciones de equilibrio: tres para la barra AB y dos para el bloque C. Las incógnitas se pueden calcular mediante el procedimiento siguiente.

DCL de AB [figura (b)]

$$\Sigma M_B = 0 \quad \circlearrowleft + \quad N_A \operatorname{sen} 40°(10 \cos 30°) + N_A \cos 40°(10 \operatorname{sen} 30°) - 500(5 \cos 30°) = 0$$

$$N_A = 230.4 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \quad F_B - N_A \cos 40° = 0$$

$$F_B = 230.4 \cos 40° = 176.50 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad N_B + N_A \operatorname{sen} 40° - 500 = 0$$

$$N_B = -230.4 \operatorname{sen} 40° + 500 = 351.9 \text{ lb}$$

DCL del bloque C [figura (c)]

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad N_C - N_B - 300 = 0$$

$$N_C = 351.9 + 300 = 651.9 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \quad F_C - F_B = 0$$

$$F_C = F_B = 176.50 \text{ lb}$$

Comprobación

Para comprobar la suposición de equilibrio, se debe comparar cada una de las fuerzas de fricción contra su valor estático máximo.

$$(F_B)_{max} = 0.4 N_B = 0.4(351.9) = 140.76 \text{ lb} < F_B = 176.50 \text{ lb}$$

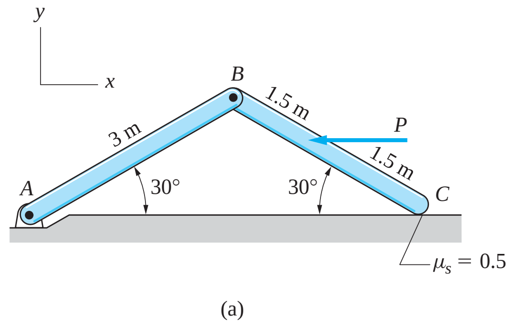
Respuesta

$$(F_C)_{max} = 0.4 N_C = 0.4(651.9) = 260.8 \text{ lb} > F_C = 176.50 \text{ lb}$$

Se concluye que el sistema no puede estar en equilibrio. Si bien hay suficiente fricción abajo de B, la fuerza de fricción abajo de C excede su valor límite.

Problema de ejemplo 7.5

Determine los valores máximo y mínimo de la fuerza P para la cual el sistema en la figura (a) estará en equilibrio estático. Las barras homogéneas AB y BC son idénticas, cada una con masa de 100 kg. El coeficiente de fricción estática entre la barra en C y el plano horizontal es 0.5.



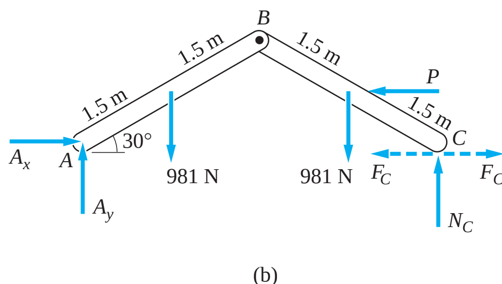
(a)

Solución

Este es un problema tipo II debido a que se implica el deslizamiento inminente en C. Sin embargo, determinar los valores máximo y mínimo de P son dos problemas separados.

Observe que los pesos de las barras tienen una tendencia a deslizar C hacia la derecha. Por tanto, el deslizamiento inminente de C hacia la derecha corresponde a la *P mínima*. La *P máxima* ocurre cuando el deslizamiento de C es inminente hacia la izquierda; en este caso, P debe superar tanto la fricción como la tendencia de los pesos a deslizar C hacia la derecha. En consecuencia, la única diferencia entre los dos problemas es la dirección de la fuerza de fricción en C.

El DCL del sistema que consiste de las dos barras se muestra en la figura (b); las dos direcciones de F_C se indican por líneas discontinuas. El peso de cada barra, $W = mg = 100(9.81) = 981$ N, también se muestra en la figura.

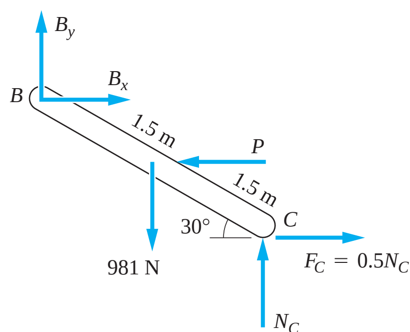


(b)

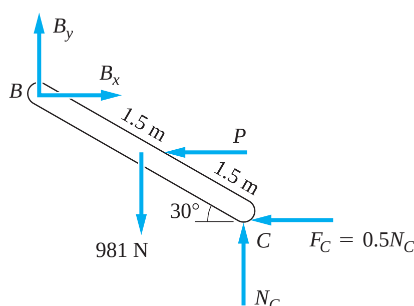
Una ecuación que comprende sólo N_C y P se obtiene sumando momentos respecto a A en la figura (b):

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad N_C(6\cos 30°) + P(1.5\,\text{sen}\,30°) - 981(1.5\cos 30°) - 981(4.5\cos 30°) = 0 \qquad \text{(a)}$$

Los DCL de la barra BC correspondientes a los valores máximo y mínimo de P se muestran en las figuras (c) y (d), respectivamente. En los dos casos, F_C se iguala



(c) P máxima



(d) P mínima

a $(F_C)_{max}$ debido a que el deslizamiento es inminente. Sumando momentos respecto a B produce otra ecuación que contiene N_C y P.

$$\Sigma M_B = 0 \quad \circlearrowleft+ \quad N_C(3\cos 30°) - 981(1.5\cos 30°) - P(1.5\,\text{sen}\,30°) \pm 0.5N_C(3\,\text{sen}\,30°) = 0 \qquad \text{(b)}$$

donde el signo positivo (negativo) en el último término corresponde al valor máximo (mínimo) de P.

Resolviendo las ecuaciones (a) y (b) da

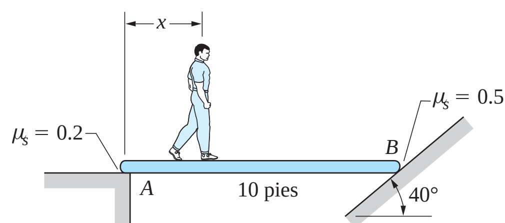
$$P \text{ máxima} = 1630 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$
$$P \text{ mínima} = 530 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Por tanto, el sistema está en equilibrio estático para valores de P en el intervalo $530 \text{ N} \leq P \leq 1630 \text{ N}$.

La solución de este problema de ejemplo ilustra con claridad que las direcciones de las fuerzas de fricción se deben mostrar de manera correcta en los diagramas de cuerpo libre cuando el deslizamiento es inminente.

Problema de ejemplo 7.6

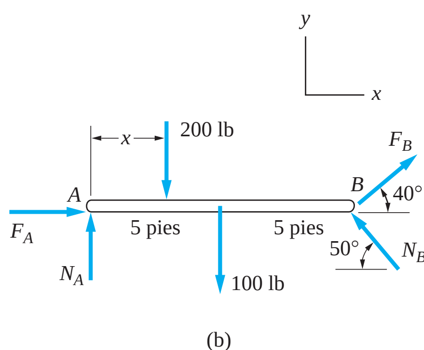
El tablón uniforme de 100 lb en la figura (a) se apoya sobre superficies con fricción en A y B. Los coeficientes de fricción estática se muestran en la figura. Si una persona de 200 lb empieza a caminar desde A hacia B, determine la distancia x cuando el tablón empezará a deslizarse.



(a)

Solución

Este es un problema tipo III. Cuando el tablón está a punto de moverse, el deslizamiento debe ser inminente tanto en *A* como en *B*. El deslizamiento inminente sólo en *A* o sólo en *B*, sería físicamente imposible. Como el tablón es un cuerpo rígido, cualquier movimiento del extremo *A* se debe corresponder por un movimiento del extremo *B*.



(b)

El DCL del tablón se muestra en la figura (b). Observe que las fuerzas de fricción se muestran actuando en sus direcciones correctas. Cuando el tablón está listo para moverse, la dirección del deslizamiento inminente del extremo *B* es hacia abajo del plano inclinado. En consecuencia, el extremo *A* tendería a deslizarse hacia la izquierda. Las direcciones de F_A y F_B deben oponerse a estos movimientos. Si se muestran las fuerzas de fricción en la dirección opuesta conduciría a resultados incorrectos.

Al analizar el DCL en la figura (b) se revela que hay cinco incógnitas: N_A, F_A, N_B, F_B y x. También hay cinco ecuaciones: tres de equilibrio y dos de fricción. Por tanto, todas las incógnitas se pueden calcular a partir del DCL como se muestra.

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad N_B \operatorname{sen} 50°(10) + F_B \operatorname{sen} 40°(10) - 200x - 100(5) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad F_A - N_B \cos 50° + F_B \cos 40° = 0 \qquad \text{(b)}$$

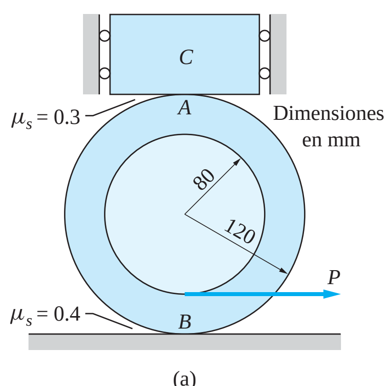
$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad N_A - 200 - 100 + N_B \operatorname{sen} 50° + F_B \operatorname{sen} 40° = 0 \qquad \text{(c)}$$

Sustituyendo las ecuaciones de fricción, $F_A = 0.2N_A$ y $F_B = 0.5N_B$ y resolviendo las ecuaciones (a) a (c) se obtiene $N_A = 163.3$ lb, $N_B = 125.7$ lb y

$$x = 4.34 \text{ pies}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 7.7

El carrete en la figura (a) pesa 25 N y su centro de gravedad está ubicado en el centro geométrico. El peso del bloque *C* es 50 N. Los coeficientes de fricción estática en los dos puntos de contacto son como se indica. Determine la fuerza horizontal máxima *P* que se puede aplicar sin perturbar el equilibrio del sistema.



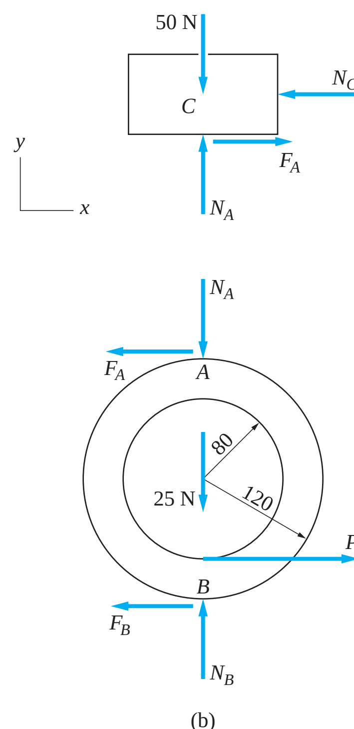
(a)

Solución

La clave para el análisis de este problema es comprender que hay dos posibilidades para el movimiento inminente (las dos podrían ocurrir simultáneamente): 1. deslizamiento inminente en A con rodamiento inminente (sin deslizamiento) en B y 2. deslizamiento inminente en B con rodamiento inminente (sin deslizamiento) en A. Como al inicio no se sabe cuál de estas posibilidades representa el modo real de movimiento inminente, este es un problema tipo III.

Los diagramas de cuerpo libre para el bloque y el carrete se muestran en la figura (b). Observe que las dos fuerzas de fricción se muestran en sus direcciones correctas. La fuerza P tiende a deslizar los puntos A y B en el carrete hacia la derecha. Por tanto, las dos fuerzas de fricción se muestran actuando hacia la izquierda en el DCL del carrete.

Al analizar los DCL en la figura (b), se concluye de $\Sigma F_y = 0$ que $N_A = 50$ N y $N_B = 75$ N. En este punto quedan tres incógnitas en el DCL del carrete: F_A, F_B y P. Como sólo quedan dos ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_y = 0$ ya se utilizó), el resto de la solución depende de la suposición respecto al movimiento inminente.



(b)

Suponga deslizamiento inminente en A

Esta suposición nos da la ecuación adicional $F_A = 0.3N_A = 0.3(50) = 15$ N. El DCL del carrete entonces da

$$\Sigma M_B = 0 \quad \circlearrowleft^{+} \quad F_A(240) - P(40) = 0$$

de donde se obtiene

$$P = 6F_A = 6(15) = 90.0 \text{ N}$$

Suponga deslizamiento inminente en B

Esta suposición da $F_B = 0.4N_B = 0.4(75) = 30$ N. Del DCL del carrete, ahora se obtiene

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft^{+} \quad -F_B(240) + P(200) = 0$$

lo que da

$$P = 1.2F_B = 1.2(30) = 36.0 \text{ N}$$

Elija la respuesta correcta

Hasta ahora, el análisis ha determinado que el deslizamiento es inminente en A si $P = 90.0$ N y en B si $P = 36.0$ N. En consecuencia, la fuerza P máxima que se puede aplicar sin perturbar el equilibrio estático del carrete es

$$P = 36.0 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

con deslizamiento inminente en B.

Un método alternativo para resolver este problema es suponer deslizamiento inminente en una superficie y luego comparar la fuerza de fricción en la otra superficie con su valor estático límite.

Problemas

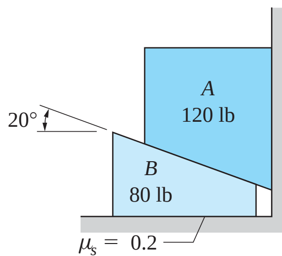


Fig. P7.1

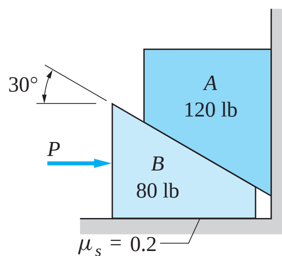


Fig. P7.2

7.1 ¿Pueden los dos bloques estar en equilibrio en la posición indicada? Justifique su respuesta. Todas las superficies son sin fricción, excepto la superficie horizontal debajo del bloque *B*.

7.2 Determine el intervalo de *P* para el cual el sistema de dos bloques estará en equilibrio. La fricción es despreciable, excepto para la superficie debajo del bloque *B*.

7.3 Dos sillas idénticas, cada una de peso 14 lb, están apiladas como se muestra. El centro de gravedad de cada silla se denota por *G*. El coeficiente de fricción estática es 0.2 en *B* (el punto de contacto entre las sillas) y 0.35 en *A*, *C* y *D*. Determine la fuerza *P* mínima que ocasionará el deslizamiento.

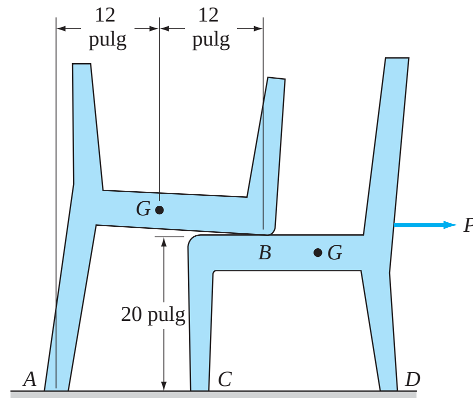


Fig. P7.3

7.4 Las dos barras homogéneas *AB* y *BC* están conectadas con un pasador en *B* y colocadas entre muros verticales rugosos. Si el coeficiente de fricción estática entre cada barra y el muro es 0.4, determine el ángulo θ máximo para el cual el conjunto permanecerá en reposo.

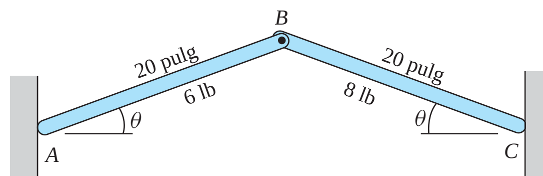


Fig. P7.4

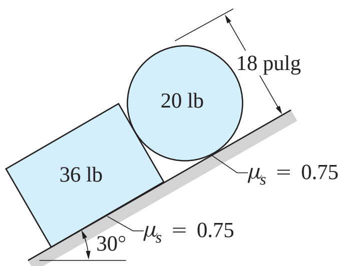


Fig. P7.5

7.5 La superficie de contacto entre el bloque de 36 lb y el cilindro homogéneo de 20 lb es sin fricción. ¿Puede el sistema estar en equilibrio estático sobre el plano rugoso inclinado?

7.6 Determine el ángulo θ mínimo al cual la placa triangular uniforme de peso W puede permanecer en reposo. El coeficiente de fricción estática en A y B es 0.5

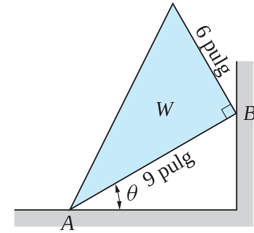


Fig. P7.6

7.7 El centro de gravedad del carrete de 50 lb está en G. Un cable arrollado alrededor del eje del carrete está unido al bloque B de 30 kg. Los coeficientes de fricción estática son 0.15 debajo del carrete y 0.2 debajo del bloque. Determine el par máximo en sentido horario C_0 que se puede aplicar al carrete sin perturbar el equilibrio del sistema.

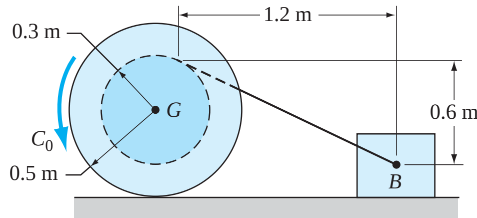


Fig. P7.7

7.8 Las balatas del freno en C y D se presionan contra el cilindro por el resorte BF. El coeficiente de fricción estática entre cada balata y el cilindro es 0.2. Encuentre la tensión mínima en el resorte que evite que el cilindro gire cuando el par en sentido horario $M = 3000$ lb · pulg se aplica. Ignore los pesos de los miembros.

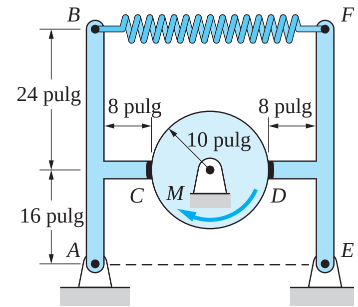


Fig. P7.8

7.9 ¿Pueden los tres cilindros idénticos estar en equilibrio si están apilados como se muestra? El coeficiente de fricción estática es 0.30 entre los cilindros y 0.1 entre los cilindros y el suelo.

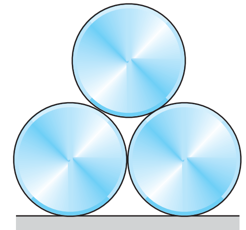


Fig. P7.9

7.10 La camioneta de tracción trasera, con su centro de gravedad en G, debe pasar sobre un reductor de velocidad desde una posición en reposo en la posición indicada. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre los neumáticos y el pavimento son 0.18 y 0.15, respectivamente. Determine el ángulo máximo θ de la pendiente que se puede pasar, suponiendo que los neumáticos de tracción están: (a) girando y (b) sin girar.

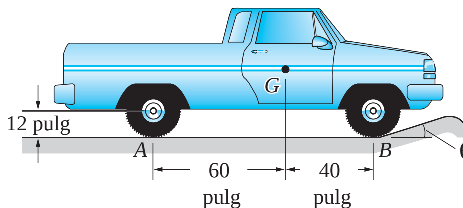
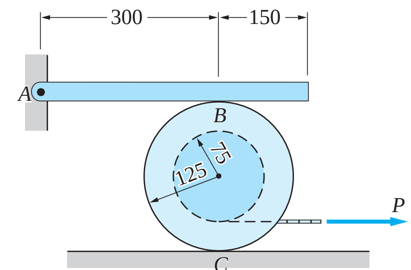


Fig. P7.10, P7.11

7.11 Resuelva el problema 7.10 suponiendo que la camioneta es de tracción delantera.

7.12 La barra de 0.8 kg está articulada en A y reposa sobre el carrete de 1.6 kg en B. Los dos cuerpos son homogéneos. Si el coeficiente de fricción estática es 0.25 en B y C, calcule la fuerza P máxima que se puede aplicar sin perturbar el equilibrio del sistema.



Dimensiones en mm

Fig. P7.12

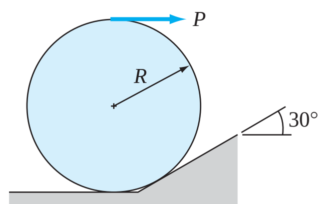


Fig. P7.13

7.13 La fuerza horizontal P actúa sobre el borde del cilindro homogéneo de radio R y peso W. Determine el coeficiente de fricción estática mínimo que permite que el cilindro empiece a girar hacia arriba por la inclinación de 30°.

7.14 La barra uniforme y el cilindro homogéneo tienen cada uno una masa de 24 kg. El coeficiente de fricción estática es μ_s en A, B y C (tres puntos de contacto). (a) Suponiendo equilibrio, calcule las fuerzas normal y de fricción en A, B y C. (b) ¿Cuál es el valor mínimo de μ_s necesario para el equilibrio?

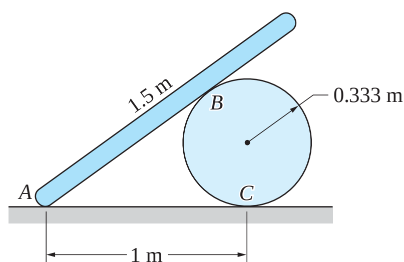


Fig. P7.14

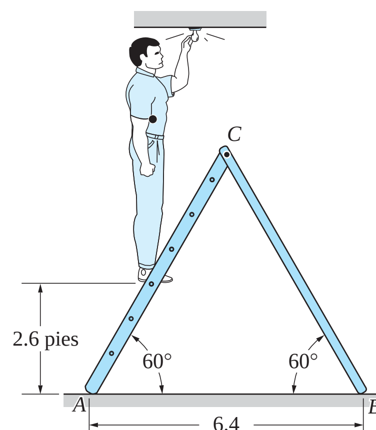


Fig. 7.15

7.15 Una escalera que consiste de dos patas articuladas en C reposa sobre un piso rugoso. ¿Podrá un trabajador de 160 lb cambiar el bombillo si se requiere que suba hasta una altura de 2.6 pies? Las patas uniformes AC y BC pesan 22 lb y 14 lb, respectivamente. El coeficiente de fricción estática en A y B es 0.48.

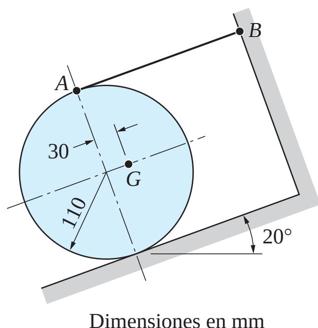


Fig. P7.16

7.16 La masa del disco desequilibrado es m y su centro de gravedad está ubicado en G. Si el coeficiente de fricción estática es 0.2 entre el cilindro y la superficie inclinada, determine si el cilindro puede estar en reposo en la posición indicada. Observe que la cuerda AB es paralela a la inclinación.

7.17 Las dos piezas uniformes de madera contrachapada, cada una de longitud L y peso W, están apuntaladas como se muestra. Si el coeficiente de fricción estática es 0.5 en las tres superficies de contacto, determine si las piezas permanecerán en reposo.

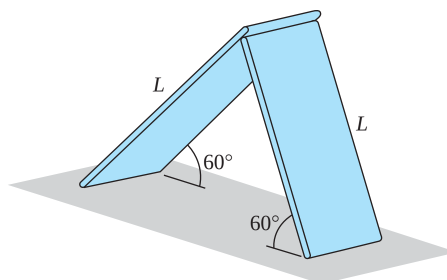


Fig. P7.17

7.18 Encuentre el coeficiente de fricción estática mínimo en B y E que permita que las tenazas levanten el bloque de 40 kg. Ignore la masa de las tenazas.

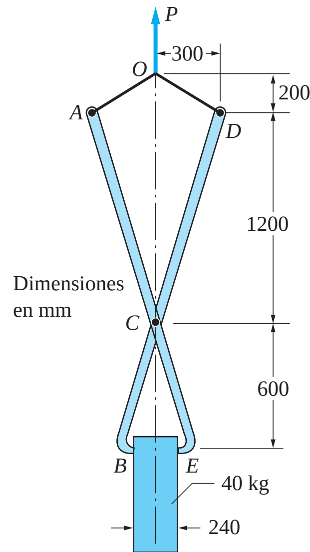


Fig. P7.18

7.19 Determine la fuerza P mínima que el trabajador debe aplicar a la barra CD para evitar que el carrete homogéneo de 80 kg se mueva hacia abajo por la colina. Los coeficientes de fricción estática son 0.12 en A y 0.36 en B. Ignore el peso de la barra CD.

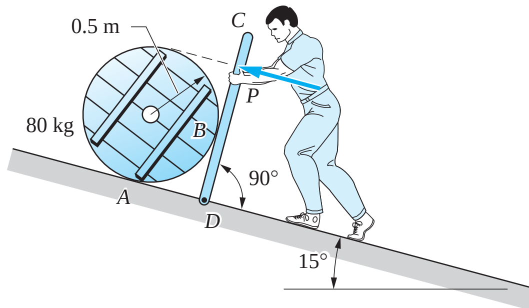


Fig. P7.19, P7.20

7.20 Encuentre la fuerza P mínima que el trabajador debe aplicar a la barra CD a fin de iniciar el movimiento colina arriba del carrete homogéneo de 80 kg. Los coeficientes de fricción estática son 0.12 en A y 0.36 en B. Ignore el peso de la barra CD.

7.21 Una persona trata de empujar la escalera homogénea AB de 20 kg hacia arriba contra un muro aplicando la fuerza horizontal P. Determine el valor mínimo de P que movería la escalera. El coeficiente de fricción estática entre la escalera y las dos superficies de contacto es 0.3.

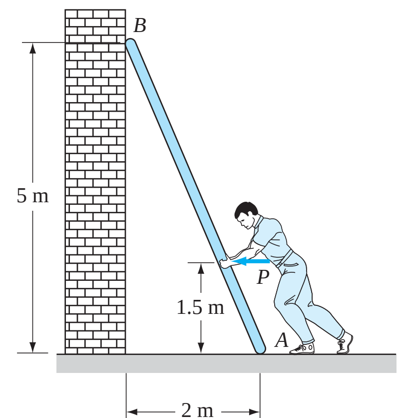


Fig. P7.21

7.22 Un disco *A* de 2.2 lb se coloca sobre la superficie inclinada. El coeficiente de fricción estática entre el disco y la superficie es 0.4. ¿Está el disco en equilibrio si $P = 1.2$ lb y $\theta = 30°$?

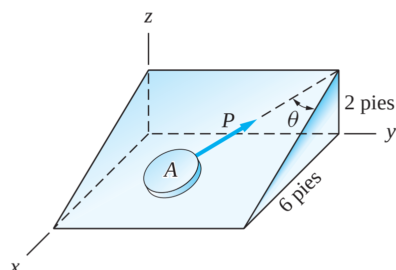


Fig. P7.22

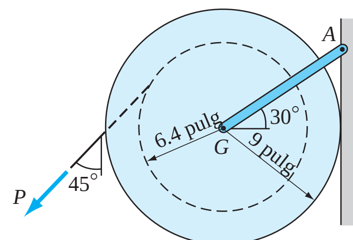


Fig. P7.23

7.23 El carrete de 40 lb está suspendido del soporte colgante *GA* y reposa contra un muro vertical. El centro de gravedad del carrete está en *G* y el peso del soporte es despreciable. El cable arrollado alrededor del eje del carrete se extrae jalando su extremo con la fuerza *P*. Si el coeficiente de fricción estática entre el carrete y el muro es 0.25, determine la *P* mínima que extraerá el cable.

7.24 Un tablón uniforme está soportado por un soporte fijo en *A* y un tambor en *B* que gira en sentido de las manecillas del reloj. Los coeficientes de fricción estática y cinética para los dos puntos de contacto son como se indica. Determine si el tablón se mueve de la posición indicada si: (a) el tablón se coloca en posición antes de que el tambor se ponga en movimiento y si (b) el tablón primero se coloca sobre el soporte en *A* y después se apoya sobre el tambor, que ya está girando.

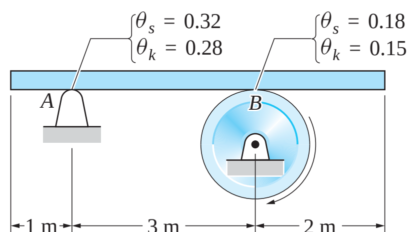


Fig. P7.24

7.25 La barra uniforme de peso *W* está soportada por una junta de rótula en *A* y reposa sobre un muro vertical en *B*. Si el deslizamiento es inminente cuando la barra está en la posición indicada, determine el coeficiente de fricción estática en *B*.

[*Sugerencia:* la dirección del deslizamiento inminente es tangente al arco de círculo discontinuo (la trayectoria potencial de movimiento del punto *B*).]

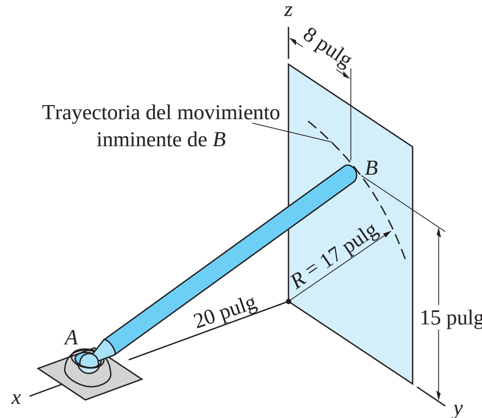


Fig. P7.25

7.26 El tablón uniforme inicialmente está en reposo sobre el soporte fijo en *A* y el tambor estacionario en *B*. Si el tambor comienza a girar lentamente en sentido contrario de las manecillas del reloj, determine la distancia que recorrerá el tambor antes de llegar al reposo de nuevo. (*Nota:* como el tambor gira lentamente, la inercia del tablón se puede ignorar.)

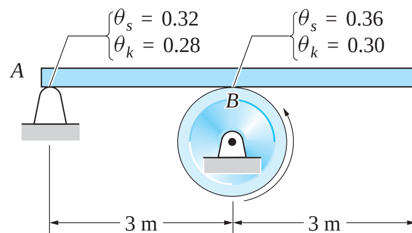


Fig. P7.26

7.27 Las dos barras homogéneas con los pesos indicados están conectadas con un pasador en *B* y suspendidas de un soporte de rodillo en *C*. El coeficiente de fricción estática entre la barra *AB* y el muro vertical es μ_s. Determine la μ_s mínima requerida para mantener en equilibrio el conjunto en la posición que se muestra.

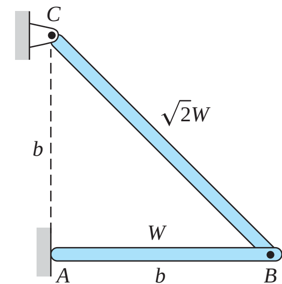


Fig. P7.27

7.4 *Volcamiento inminente*

En la sección anterior restringimos nuestra atención al deslizamiento; la posibilidad de volcamiento se ignoró. Ahora se analizan problemas que incluyen deslizamiento y volcamiento como movimientos posibles.

Considere de nuevo un bloque homogéneo sobre una superficie con fricción que se empuja por una fuerza P, como se muestra en la figura 7.4(a). Se supone que el peso W del bloque y las dimensiones b, h y d se conocen. Se quiere determinar la magnitud de P que ocasionará el movimiento inminente del bloque, ya sea por deslizamiento inminente o bien por volcamiento inminente.

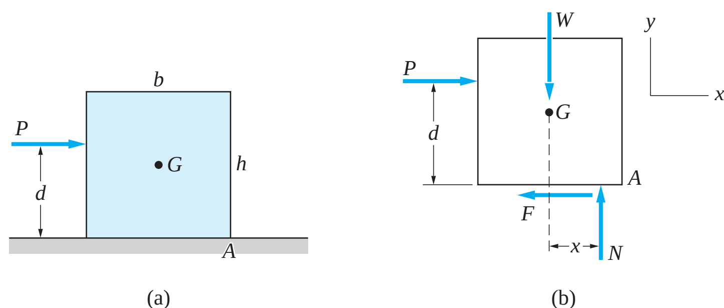


Fig. 7.4

Podemos adentrarnos en la solución comparando el número de incógnitas con el número de ecuaciones de equilibrio disponibles. Del diagrama de cuerpo libre del bloque, figura 7.4(b), se observa que hay cuatro incógnitas: la fuerza aplicada P, la fuerza normal resultante N, la fuerza de fricción F y la distancia x que ubica la línea de acción de N. Como sólo hay tres ecuaciones de equilibrio independientes, se debe encontrar una ecuación adicional antes de poder calcular todas las incógnitas. Si se supone deslizamiento inminente, la ecuación adicional es $F = F_{max} = \mu_s N$. Por otro lado, si se supone volcamiento inminente respecto a la esquina A, la ecuación adicional es $x = b/2$, ya que N actúa en la esquina del bloque cuando el volcamiento es inminente.

En la sección anterior se introdujeron tres casos de problemas de fricción para el deslizamiento inminente. La clasificación se puede replantear con facilidad para incluir la posibilidad de volcamiento inminente.

Tipo I *El enunciado del problema no especifica movimiento inminente (deslizamiento o volcamiento).*

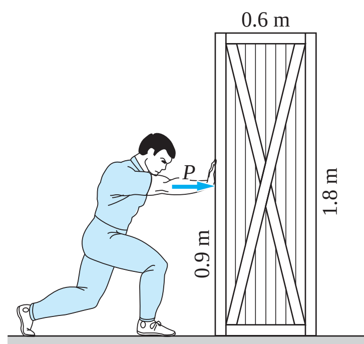
Tipo II *El enunciado del problema no implica movimiento inminente y se conoce el tipo de movimiento (deslizamiento en superficies conocidas o volcamiento).*

Tipo III *El enunciado del problema implica movimiento inminente, pero el tipo de movimiento (deslizamiento o volcamiento) y/o las superficies donde el deslizamiento es inminente no se conocen.*

Ejemplos de los tres tipos de problemas se dan en los problemas de ejemplo siguientes.

Problema de ejemplo 7.8

La persona en la figura (a) trata de mover una caja de empaque a lo largo del piso aplicando una fuerza horizontal P. El centro de gravedad de la caja de 250 N está ubicado en su centro geométrico. ¿Se mueve la caja si $P = 60$ N? El coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso es 0.3.

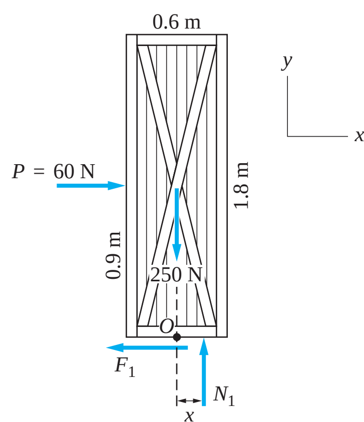


(a)

Solución

Este es un problema tipo I debido a que el enunciado del problema no especifica movimiento inminente. Para determinar si la caja se mueve en las condiciones dadas, primero se supone equilibrio y luego se comprueba la suposición. Sin embargo, la comprobación debe responder dos preguntas: 1. ¿Se desliza la caja? 2. ¿Se vuelca la caja?

El diagrama de cuerpo libre de la caja se muestra en la figura (b). Si el bloque se supone que permanece en equilibrio, las tres ecuaciones de equilibrio se pueden utilizar para calcular las tres incógnitas: la fuerza normal N_1, la fuerza de fricción F_1 y la distancia x que ubica la línea de acción de N_1, como se muestra en la figura siguiente.



(b)

Suponga equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad P - F_1 = 0$$
$$F_1 = P = 60 \text{ N}$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad N_1 - 250 = 0$$
$$N_1 = 250 \text{ N}$$
$$\Sigma M_O = 0 \quad \circlearrowleft + \quad N_1 x - P(0.9) = 0$$

lo que da

$$x = P(0.9)/N_1 = 60(0.9)/250 = 0.216 \text{ m}$$

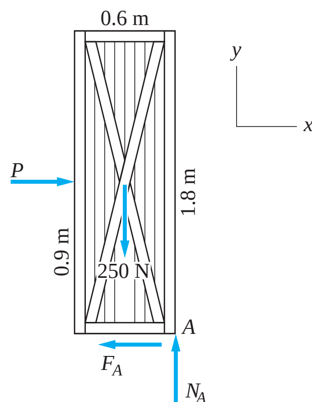
Comprobación

El valor máximo posible para x es 0.3 m (mitad del ancho de la caja). Como x = 0.216 m, según se obtuvo del análisis de equilibrio, es menor que 0.3 m, se concluye que el bloque *no se volcará*.

La fuerza de fricción estática límite es $(F_1)_{max} = \mu_s N_1 = 0.3(250) = 75.0$ N, que es mayor que la fuerza $F_1 = 60$ N que se requiere para el equilibrio. Por tanto se concluye que la caja *no se deslizará*.

La caja no se moverá cuando $P = 60$ N *Respuesta*

Problema de ejemplo 7.9



Calcule la fuerza P requerida para ocasionar el volcamiento de la caja de empaque en el problema de ejemplo 7.8. También determine el coeficiente de fricción estática mínimo que permite el volcamiento.

Solución

Este es un problema tipo II ya que se especifica volcamiento inminente. El diagrama de cuerpo libre para la caja se muestra en la figura. Observe que cuando la caja está a punto de volcarse, la fuerza normal N_A actúa en la esquina A. Hay tres ecuaciones de equilibrio que se pueden resolver para obtener las incógnitas P, N_A y F_A:

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad 250(0.3) - P(0.9) = 0$$
$$P = 83.3 \text{ N}$$ *Respuesta*
$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad P - F_A = 0$$
$$F_A = P = 83.3 \text{ N}$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad +\uparrow \quad N_A - 250 = 0$$
$$N_A = 250 \text{ N}$$

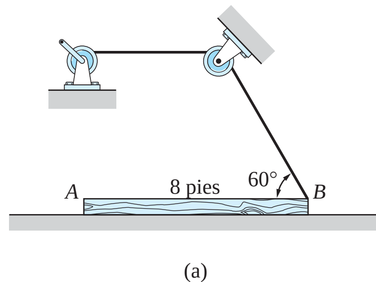
El coeficiente de fricción estática mínimo que permite el volcamiento es

$$\mu_s = F_A/N_A = 83.3/250 = 0.333 \qquad \textit{Respuesta}$$

Observe que si el coeficiente de fricción estática fuera exactamente 0.333, entonces la fuerza $P = 83.3$ N resultaría en inminente deslizamiento y volcamiento simultáneos.

Problema de ejemplo **7.10**

El malacate en la figura (a) se utiliza para mover el tronco *AB* uniforme de 300 lb. Calcule la tensión máxima en el cable para la cual el tronco permanece en reposo. El coeficiente de fricción estática entre el tronco y el plano es 0.4.

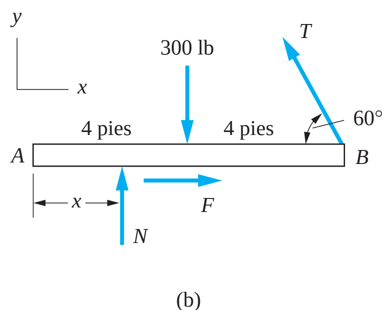


(a)

Solución

Aunque se pide encontrar la tensión en el cable que ocasionará un movimiento inminente, no se sabe qué es inminente, el deslizamiento o el volcamiento. Por tanto, este es un problema tipo III.

Los diagramas de cuerpo libre del tronco en la figura (b) contienen cuatro incógnitas: la tensión *T*, la fuerza normal resultante *N*, la fuerza de fricción *F* y la distancia *x* (la distancia desde *A* hasta la línea de acción de *N*). Como sólo hay tres ecuaciones de equilibrio independientes, todas las incógnitas no se pueden calcular a menos que se haga una suposición respecto al tipo de movimiento inminente.



(b)

Suponga deslizamiento inminente

Con esta suposición, se tiene $F = F_{max} = 0.4$ N y las ecuaciones de equilibrio de fuerzas para el DCL en la figura (b) son las siguientes.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \quad 0.4N - T\cos 60° = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad N - 300 + T\,\text{sen}\,60° = 0 \qquad \text{(b)}$$

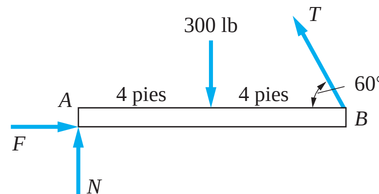
Resolviendo las ecuaciones (a) y (b) simultáneamente, se obtiene $T = 141.8$ lb y $N = 177.2$ lb.

Suponga volcamiento inminente

En esta condición, N actuará en A, como se muestra en el DCL en la figura (c). La tensión en el cable T se puede calcular con la ecuación de momentos

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad T\,\text{sen}\,60°(8) - 300(4) = 0$$

$$T = 173.2 \text{ lb}$$



(c)

Elija la respuesta correcta

Como $T = 141.8$ lb para el deslizamiento inminente y $T = 173.2$ lb para el volcamiento inminente, la tensión máxima que se puede aplicar sin mover el tronco es

$$T = 141.8 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Soluciones alternativas

Igual que en la mayoría de los problemas de equilibrio, existen varios métodos de análisis equivalentes que se podrían utilizar. Dos de esos métodos son:

1. Suponga deslizamiento inminente y determine T. Continúe el análisis de equilibrio para encontrar x. Después compruebe si este valor de x es físicamente posible.
2. Suponga volcamiento inminente y determine T. Continúe el análisis de equilibrio para encontrar F. Luego compruebe si $F \leq F_{max}$.

Problemas

7.28 Una persona empuja la caja homogénea de 120 lb con la fuerza horizontal P. Determine la distancia mayor h para la cual la caja se deslizará sin volcarse.

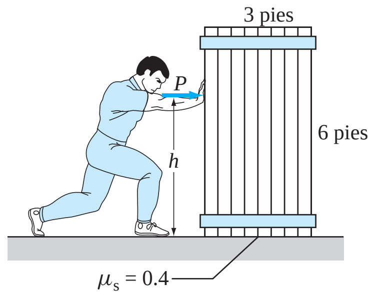


Fig. P7.28

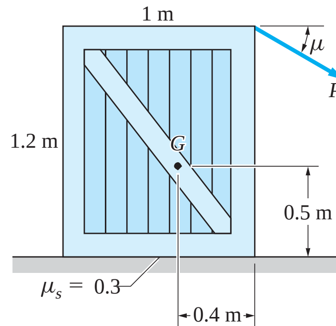


Fig. P7.29, P7.30

7.29 La caja de 60 kg tiene su centro de gravedad en G. Determine la fuerza P mínima que iniciará el movimiento si $\theta = 30°$.

7.30 Resuelva el problema 7.29 si $\theta = 0$.

7.31 La puerta de 120 lb con su centro de gravedad en G pende de un riel horizontal en A y B. Encuentre el coeficiente de fricción estática máximo μ_s en A y B para el cual la puerta se deslizará sin levantarse del riel. Además, determine la fuerza P correspondiente.

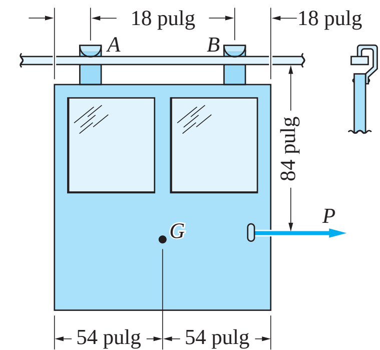


Fig. P7.31

7.32 Determine la fuerza P máxima con la cual la barra uniforme de 18 kg permanecerá en equilibrio.

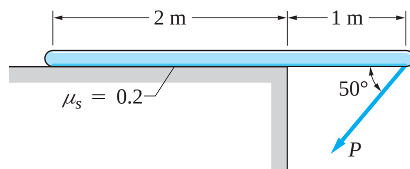


Fig. P7.32

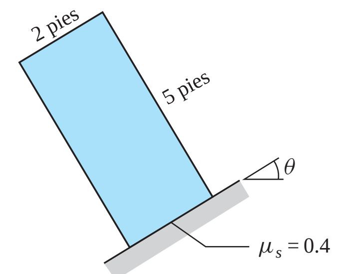


Fig. P7.33

7.33 Determine el ángulo θ mayor con el que el bloque homogéneo permanecerá en reposo.

7.34 El cilindro y el bloque están conectados por una cuerda horizontal. Determine el par C máximo que se puede aplicar al cilindro sin perturbar el equilibrio del sistema. Suponga que los dos cuerpos son homogéneos.

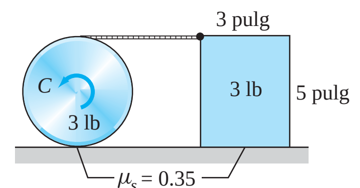


Fig. P7.34

7.35 El peso del tanque cilíndrico es depreciable en comparación con el peso del agua que contiene (el agua pesa 62.4 lb/pie^3). El coeficiente de fricción estática

entre el tanque y la superficie horizontal es μ_s. (a) Suponiendo que el tanque está lleno, encuentre la fuerza P mínima requerida para volcar el tanque y la μ_s mínima que permitiría que tenga lugar el volcamiento. (b) Si la fuerza P = 200 lb inicia el volcamiento, determine la profundidad del agua en el tanque.

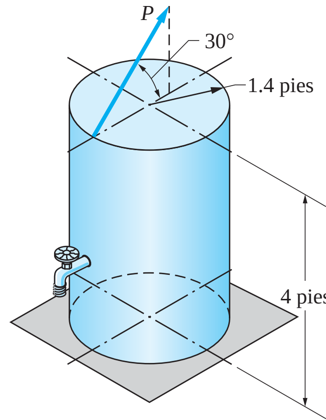


Fig. P7.35

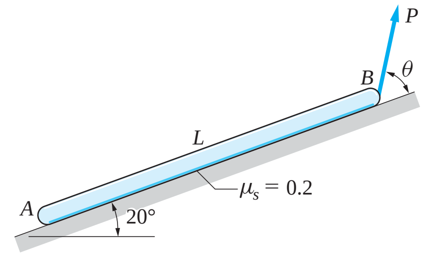


Fig. P7.36

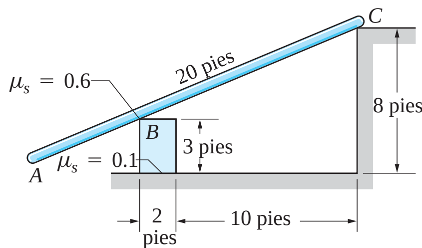


Fig. P7.37

7.36 Encuentre el ángulo θ menor para el cual una fuerza suficientemente grande P ocasionaría que el tronco uniforme AB de peso W se vuelque respecto a A.

7.37 La escalera AC de 40 lb está apoyada sobre un bloque de 10 lb en B y una esquina sin fricción en C. Los dos cuerpos son homogéneos. ¿Puede el sistema permanecer en reposo en la posición indicada? Asegúrese de considerar todas las posibilidades.

7.38 Dos bloques de concreto que pesan 320 lb cada uno forman parte del muro de retención de una alberca. ¿Estarán en equilibrio los bloques cuando la alberca se llene y el agua ejerza la carga lineal que se muestra?

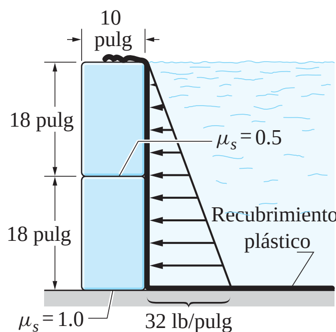


Fig. P7.38

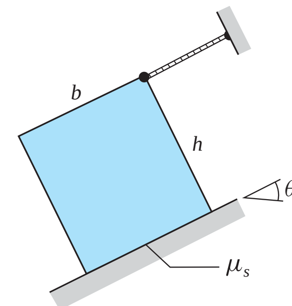


Fig. P7.39

7.39 Deduzca la expresión para el ángulo θ mayor para el cual el bloque homogéneo permanece en equilibrio.

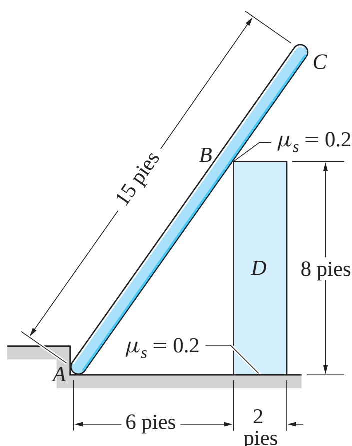


Fig. P7.40

7.40 Encuentre el peso del bloque más ligero D que se puede utilizar para soportar el poste uniforme ABC de 200 lb en la posición indicada.

7.41 El peso de 2000 lb del remolque está distribuido igualmente entre sus dos neumáticos, uno a cada lado del remolque. El centro de gravedad está en *G* y los neumáticos pueden girar con libertad. Determine si el remolque se puede empujar sobre una guarnición de 6 pulg sin volcarse y si se puede, calcule la fuerza horizontal *P* requerida.

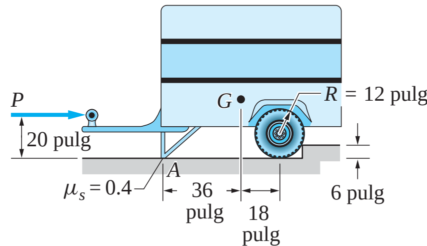


Fig. P7.41

7.42 Determine la fuerza *P* mínima aplicada al émbolo *D*, que evitará que el par $C = 250$ N · m mueva el cilindro. La fricción se puede ignorar en todas las superficies, excepto entre el émbolo y el cilindro. Las masas de los cuerpos son despreciables.

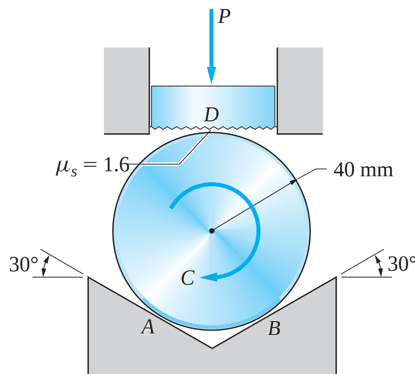


Fig. P7.42

7.43 Los pesos del rodillo homogéneo y la cuña son 100 lb y 40 lb, respectivamente. El coeficiente de fricción estática es 0.2 entre todas las superficies de contacto. Encuentre el par *C* mínimo que moverá el cilindro.

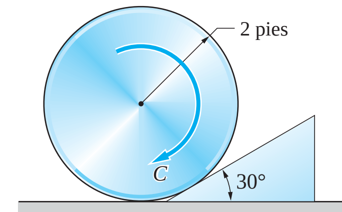


Fig. P7.43

7.5 *Ángulo de fricción: cuñas y tornillos*

a. *Ángulo de fricción*

En la figura 7.5 se muestra un bloque sobre una superficie con fricción sometido a la fuerza horizontal *P*. Como se observa en el diagrama de cuerpo libre, se asigna ϕ como el ángulo entre la fuerza de contacto *R* y la normal *n* a la superficie de contacto. El ángulo ϕ está dado por $\tan\phi = F/N$, donde *N* y *F* son las fuerzas normal y de fricción, respectivamente. El límite superior de ϕ, denotado ϕ_s, se alcanza en el deslizamiento inminente cuando $F = F_{max} = \mu_s N$. Por tanto, se tiene

$$\tan\phi_s = \mu_s \qquad (7.4)$$

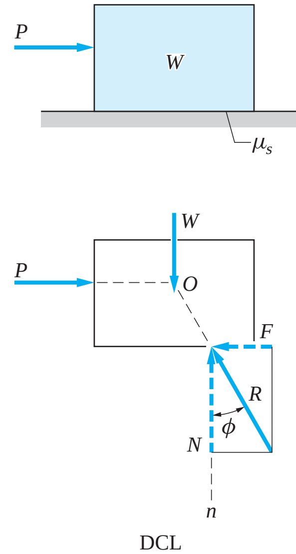


Fig. 7.5

El ángulo ϕ_s se denomina *ángulo de fricción* estática. Observe que $\phi \leq \phi_s$ significa equilibrio y que $\phi = \phi_s$ indica deslizamiento inminente. Por tanto, la dirección de la fuerza de contacto R se conoce en todas las superficies donde el deslizamiento es inminente. Este conocimiento con frecuencia se puede utilizar para comprender mejor los problemas que comprenden cuerpos de dos y tres fuerzas.

En la figura 7.5 la fuerza de fricción F se opone a la tendencia de P a deslizar el bloque hacia la derecha. Si la dirección de P se invierte, la dirección de F también se invertiría. Esto conduce a la conclusión de que el bloque puede estar en equilibrio sólo si la línea de acción de R permanece dentro del sector *AOB* (limitado por $\pm\ \phi_s$), como se muestra en la figura 7.6. Para cargas más generales, la línea de acción de R se debe encontrar dentro del cono, denominado *cono de fricción estática*, que se forma girando el sector *AOB* respecto a la normal n. Observe que el ángulo del vértice del cono de fricción estática es $2\phi_s$.

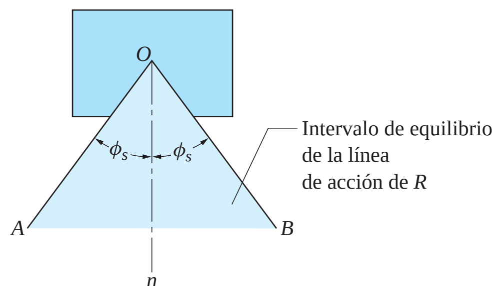


Fig. 7.6

Cuando ocurre el deslizamiento, la fuerza de fricción es $F = \mu_k N$ y el valor de ϕ que especifica la dirección de R está dado por

$$\tan \phi_k = \mu_k \tag{7.5}$$

El ángulo ϕ_k se denomina *ángulo de fricción cinética*. Para este caso, el cono de fricción estática se remplaza por el *cono de fricción cinética* menor, para el cual el ángulo en el vértice es $2\phi_k$.

b. Cuñas

Una cuña es un dispositivo simple que se utiliza para el mismo fin que una palanca: para obtener una ventaja mecánica. Considere, por ejemplo, la cuña que se muestra en la figura 7.7(a) que se está insertando en una grieta por la fuerza aplicada P. El ángulo formado por la punta de la cuña es 2β, donde β se denomina *ángulo de la cuña*. Ignorando el peso, el diagrama de cuerpo libre de la cuña en deslizamiento inminente se muestra en la figura 7.7(b). Igual que antes, se designa ϕ como el ángulo entre la fuerza de contacto R y la normal n a la superficie de contacto. Como el deslizamiento es inminente, $\phi = \phi_s$, donde $\phi_s = \tan^{-1}\mu_s$ es el ángulo de fricción. Del diagrama de fuerzas en la figura 7.7(c) se observa que $R = P/[2\,\text{sen}(\phi_s + \beta)]$, que es sustancialmente mayor que P si el ángulo de la cuña β es pequeño y los lados de la cuña están lubricados (dando un valor pequeño para ϕ_s).

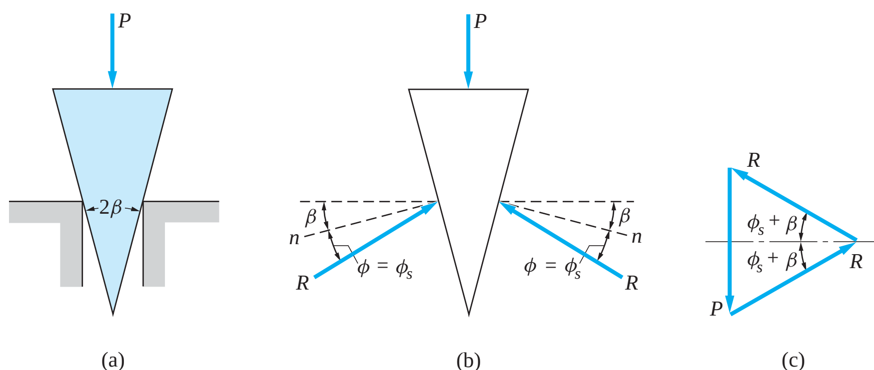


Fig. 7.7

Idealmente, una cuña debe ser lo suficientemente resbalosa para que se pueda insertar con facilidad en la grieta, pero tener fricción suficiente para que permanezca en su lugar cuando se elimine la fuerza de inserción. En ausencia de P, la cuña se convierte en un cuerpo de dos fuerzas. Por tanto, las fuerzas de contacto R deben ser colineales, como se indica en el diagrama de cuerpo libre en la figura 7.8, donde ahora $\phi = \beta$. Recordando que el equilibrio puede existir sólo si $\phi \leq \phi_s$, se concluye que la cuña permanecerá en su lugar siempre que $\beta \leq \phi_s$.

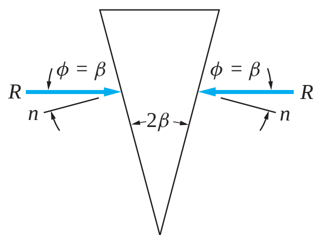


Fig. 7.8

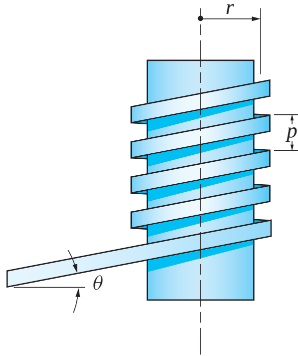


Fig. 7.9

c. Tornillos de rosca cuadrada

Los tornillos con roscas cuadradas se emplean en gatos mecánicos, prensas y otros dispositivos que producen una fuerza axial grande aplicando un par relativamente pequeño respecto al eje del tornillo. Un tornillo de rosca cuadrada se puede considerar como una barra de sección transversal rectangular arrollada alrededor de un cilindro de manera helicoidal, como se muestra en la figura 7.9. El ángulo de la hélice θ se denomina *ángulo de avance*, la distancia p entre las roscas se conoce como *paso* y el radio medio de las roscas se denota por r. Se puede observar que estos parámetros están relacionados por

$$p = 2\pi r \tan\theta \tag{7.6}$$

En la figura 7.10(a) se muestra un tornillo utilizado como gato mecánico. Suponiendo que el par C_0, denominado *par de torsión*, es lo suficientemente grande, causará que el tornillo avance, elevando así el peso W. El análisis de este problema se simplifica si se recuerda que en la teoría de Coulomb la fuerza de fricción es independiente del área de contacto. Por tanto, se puede suponer que el área de contacto es muy pequeña, como se ilustra en la figura 7.10(b). Observe que todo el peso W se soporta por el área de contacto y que la fuerza horizontal $Q = C_0/r$ se suministra por el par de torsión aplicado C_0. Ahora se puede ver que este problema es idéntico al ilustrado en la figura 7.11(a); que es un bloque de peso W empujado hacia arriba por un inclinación por la fuerza horizontal Q.

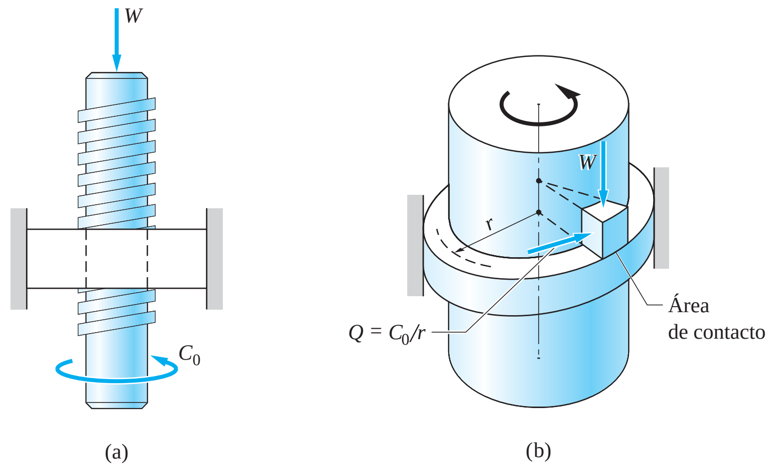


Fig. 7.10

El par de torsión mínimo necesario para que el peso W empiece a levantarse ahora se puede obtener del DCL en la figura 7.11(b). Observe que en un deslizamiento inminente el ángulo entre R y la normal n a la superficie de contacto es $\phi = \phi_s$ y que la dirección de ϕ_s relativa a la normal n indica que el movimiento inminente está dirigido hacia arriba por la inclinación. Para el equilibrio del bloque, se tiene

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad \frac{C_0}{r} - R\,\text{sen}(\phi_s + \theta) = 0 \tag{a}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad R\cos(\phi_s + \theta) - W = 0 \tag{b}$$

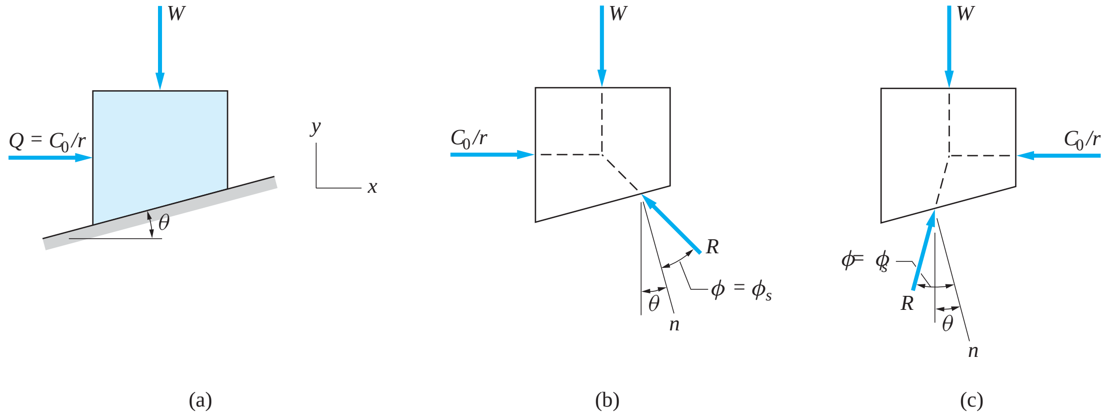


Fig. 7.11

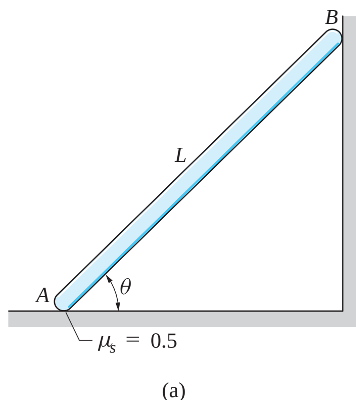
Resolviendo las ecuaciones (a) y (b), se determina que el par de torsión mínimo que ocasionará que el peso W se mueva *hacia arriba* es

$$(C_0)_{\text{hacia arriba}} = Wr\tan(\phi_s + \theta) \qquad (7.7a)$$

Si se invierte la dirección de C_0 y se supone movimiento inminente hacia abajo por la inclinación, se debe utilizar el DCL en la figura 7.11(c). De las ecuaciones de equilibrio se observa que el par de torsión necesario para ocasionar que el peso W se mueva *hacia abajo* es

$$(C_0)_{\text{hacia abajo}} = Wr\tan(\phi_s - \theta) \qquad (7.7b)$$

Si $\phi_s \geq \theta$, el par de torsión C_0 en la ecuación (7.7b) es positivo, lo que significa que el peso W permanece en reposo si C_0 se remueve. En este caso, se dice que el tornillo es *autobloqueante*. Por otro lado, si $\phi_s < \theta$, el par de torsión C_0 en la ecuación (7.7b) es negativo, lo que indica que el peso W bajaría por sí mismo en ausencia de C_0.



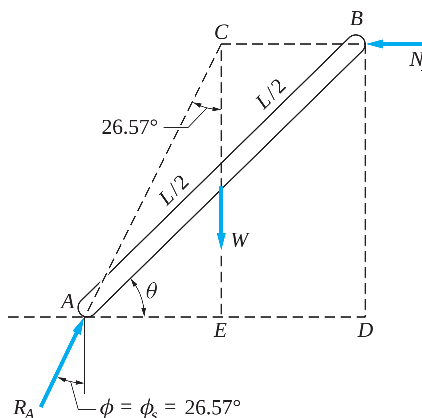
(a)

Problema de ejemplo 7.11

Utilizando el ángulo de fricción, determine el ángulo θ menor para el cual la barra esbelta ilustrada en la figura (a) puede permanecer en reposo. La barra es homogénea de peso W y longitud L. Ignore la fricción entre la barra y el muro en B.

Solución

Como se muestra en el DCL, figura (b), la barra está sometida a tres fuerzas: el peso W actuando a la mitad de la barra, la fuerza normal horizontal N_B y la reacción R_A en la superficie horizontal. Como se especifica movimiento inminente, el ángulo ϕ entre R_A y la normal a la superficie de contacto es igual a su valor límite $\phi = \phi_s = \tan^{-1}\mu_s = \tan^{-1} 0.5 = 26.57°$. Como la barra es un miembro de tres fuerzas, las fuerzas se intersecan en el punto C.



(b)

Del triángulo ABD se observa que

$$\tan\theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \tag{a}$$

Del triángulo ACE se obtiene $\overline{AE} = \overline{CE}\tan 26.57°$. Como $\overline{AD} = 2\overline{AE}$, esto se convierte en

$$\overline{AD} = 2\overline{CE}\tan 26.57° \tag{b}$$

Sustituyendo la ecuación (b) en la ecuación (a) junto con $\overline{BD} = \overline{CE}$, se obtiene

$$\tan\theta = \frac{\overline{CE}}{2\overline{CE}\tan 26.57°} = \frac{1}{2\tan 26.57°}$$

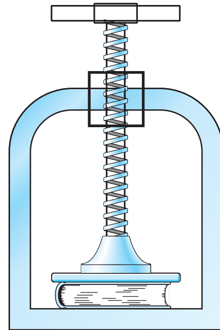
lo que da

$$\theta = 45.0° \qquad \textit{Respuesta}$$

Utilizando el ángulo de fricción y reconociendo que la barra es un miembro de tres fuerzas, se puede determinar θ por geometría, sin tener que escribir las ecuaciones de equilibrio.

Problema de ejemplo 7.12

La prensa de tornillo que se muestra se utiliza en la encuadernación de libros. El tornillo tiene un radio medio de 10 mm y su paso es 5 mm. El coeficiente de fricción estática entre las roscas es 0.18. Si una fuerza de sujeción de 1000 N se aplica al libro. Determine: 1. el par de torsión que se aplicó a la manija de la prensa y 2. el par de torsión necesario para aflojar la prensa.



Solución

El ángulo de avance del tornillo se calcula con la ecuación (7.6).

$$\theta = \tan^{-1}\frac{p}{2\pi r} = \tan^{-1}\frac{5}{2\pi(10)} = 4.550°$$

El ángulo de fricción es

$$\phi_s = \tan^{-1}\mu_s = \tan^{-1} 0.18 = 10.204°$$

Parte 1

El par de torsión necesario para aplicar la fuerza $W = 1000$ N se puede calcular con la ecuación (7.7a).

$$C_0 = Wr\tan(\phi_s + \theta) = 1000(0.01)\tan(10.204° + 4.550°)$$

$$C_0 = 2.63 \text{ N} \cdot \text{m}$$ *Respuesta*

Parte 2

El par de torsión necesario para aflojar la prensa se obtiene con la ecuación (7.7b).

$$C_0 = Wr\tan(\phi_s - \theta) = 1000(0.01)\tan(10.204° - 4.550°)$$

$$C_0 = 0.990 \text{ N} \cdot \text{m}$$ *Respuesta*

Problemas

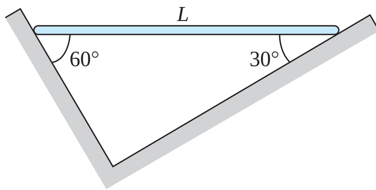


Fig. P7.44

Los problemas siguientes se deben resolver utilizando el ángulo de fricción. Utilice las características de cuerpos de dos y tres fuerzas cuando sean aplicables.

7.44 La barra uniforme de longitud L y peso W se mantiene en la posición horizontal por fricción. Determine el coeficiente de ficción estática mínimo posible entre la barra y las superficies con fricción.

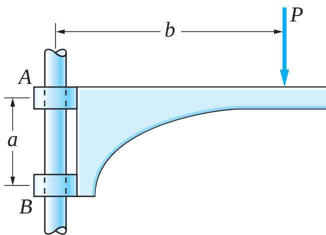


Fig. P7.45

7.45 La ménsula móvil de peso despreciable está montada sobre un poste vertical. El coeficiente de fricción estática entre la ménsula y el poste es 0.2. Determine la relación mínima b/a para la cual la ménsula puede soportar la fuerza vertical P. Suponga que el diámetro del poste es despreciable. (*Nota:* como el resultado es independiente de P, se dice que la ménsula es autobloqueante.)

7.46 Una persona de 200 lb camina hacia arriba por el tablón inclinado de peso despreciable. Los coeficientes de fricción estática en A y B son 0.3 y 0.2, respectivamente. Determine la distancia x para la cual el tablón empezará a deslizarse.

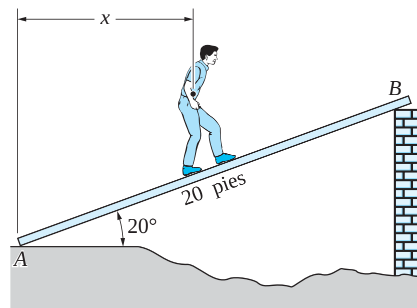


Fig. P7.46

7.47 El vehículo con tracción en las cuatro ruedas de peso W intenta pasar sobre una obstrucción vertical en A. El centro de gravedad del vehículo está en G y el coeficiente de fricción estática es μ_s en A y B. Encuentre la μ_s mínima necesaria para iniciar la subida. (*Sugerencia:* el deslizamiento debe ser inminente en A y B simultáneamente.)

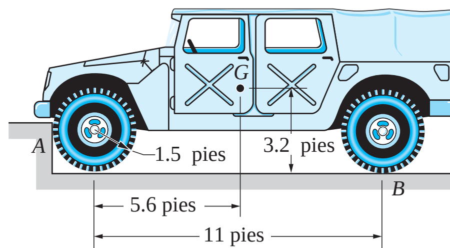


Fig. P7.47

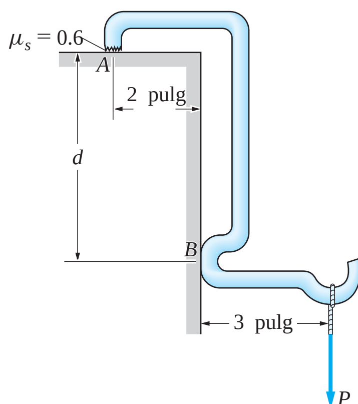


Fig. P7.48

7.48 Encuentre la distancia d mínima para la cual el gancho permanecerá en reposo cuando se somete a la fuerza P. Ignore el peso del gancho y suponga que el muro vertical no tiene fricción.

7.49 En la figura se muestra un dispositivo de bloqueo que se utiliza en algunas hebillas de cinturones. Cuando el cinturón se jala hacia la derecha por la fuerza P, el rodillo A se traba entre el cinturón y la superficie superior de la hebilla. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es 0.24, determine el ángulo máximo θ para el cual la hebilla es autobloqueante (el movimiento del cinturón en cualquier dirección se evita incluso después de remover la fuerza P). Ignore el peso del rodillo A.

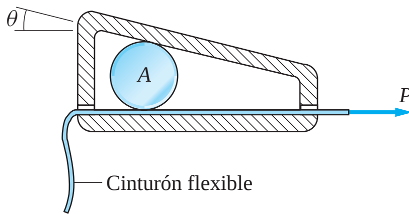


Fig. P7.49

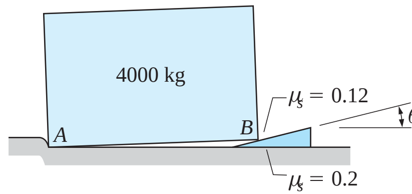


Fig. P7.50

7.50 Una cuña pequeña se coloca debajo de la esquina B del bloque de 4000 kg de mármol. Determine el ángulo máximo θ para el cual la cuña es autobloqueante; es decir, la cuña no se deslizará hacia fuera del bloque. Ignore la masa de la cuña y el ángulo pequeño entre la superficie AB y la horizontal.

7.51 Los dos bloques de 200 lb se separan por la cuña a 15° de peso despreciable. El ángulo de fricción estática es 12° en todas las superficies de contacto. Determine la fuerza P necesaria para iniciar el movimiento del bloque.

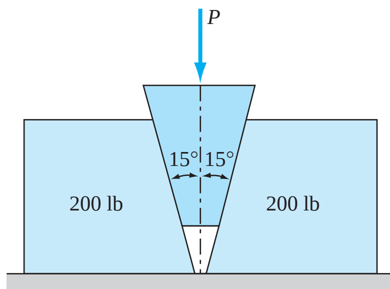


Fig. P7.51

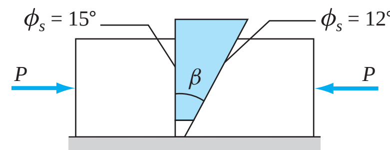


Fig. P7.52

7.52 La cuña con el ángulo β se aprieta entre dos bloques como se muestra. Determine el ángulo β máximo para el cual la cuña no se moverá sin importar la magnitud de la fuerza de opresión P. Ignore el peso de la cuña.

7.53 El dispositivo que se muestra se utiliza para medir el coeficiente de fricción cinética entre el eje giratorio S y el collarín estacionario homogéneo C. Todo el peso de 840 N del collarín lo soporta el eje. La báscula de resorte unida al collarín en A mide la tensión en AB causada por la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj del eje. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética si la lectura en la báscula es 150 N?

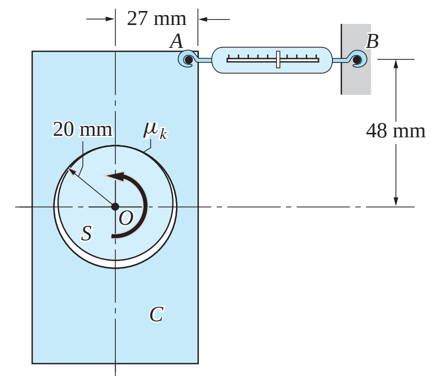


Fig. P7.53

7.54 El tornillo de rosca sencilla del gato de piso tiene un paso de 0.5 pulg y un radio medio de 1.75 pulg. El ángulo de fricción estática es 8.5°. (a) Determine el par C que se debe aplicar al tornillo para empezar a levantar un peso de 4000 lb. (b) ¿Cuál es el par necesario para empezar a bajar el peso?

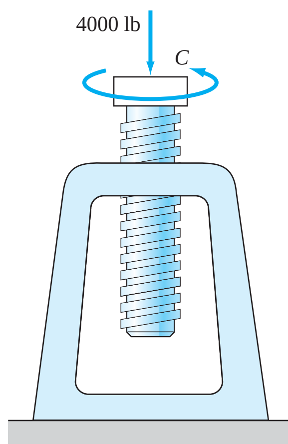


Fig. P7.54

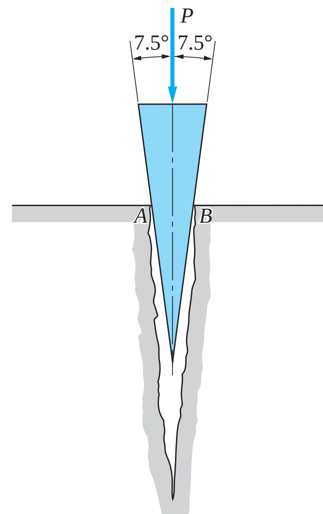


Fig. P7.55

7.55 La fuerza $P = 900$ lb se requiere para empujar la cuña en la grieta, empezando de la posición indicada. También se muestra que una fuerza de 250 lb se necesita para sacar la cuña de la grieta desde esta posición. Determine el coeficiente de fricción estática entre la cuña y las esquinas de la grieta. Suponga que las componentes horizontales de las fuerzas de contacto en A y B son las mismas para los dos casos.

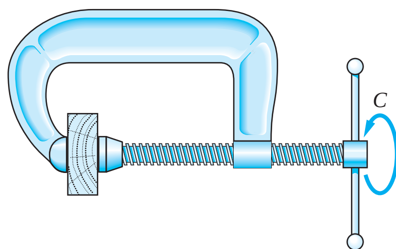


Fig. P7.56

7.56 El tornillo de rosca cuadrada de la prensa en C tiene un diámetro de 9 mm y un paso de 1.5 mm. El coeficiente de fricción estática entre las roscas es 0.2. Si el par de torsión $C = 1.25$ N · m se utiliza para apretar la prensa, determine: (a) la fuerza de sujeción y (b) el par de torsión requerido para aflojar la prensa.

7.57 El tornillo de rosca cuadrada con un paso de 10 mm y un radio medio de 18 mm impulsa un engrane que tiene un radio medio de 75 mm. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el engrane y el tornillo son 0.12 y 0.06, respec-

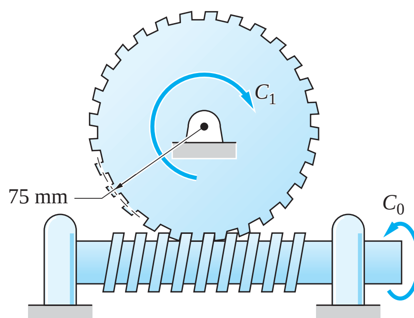


Fig. P7.57

tivamente. El par de torsión de entrada aplicado al tornillo es $C_0 = 10$ N · m. Suponiendo una operación a velocidad constante, determine el par de torsión de salida C_1 que actúa sobre el engrane.

7.58 El tornillo del gato automotriz tiene un paso de 0.1 pulg y un radio medio de 0.175 pulg. Observe que los extremos del tornillo están roscados en direcciones opuestas (roscas derechas e izquierdas). El coeficiente de fricción estática entre las roscas es 0.08. Calcule el par de torsión C_0 que se debe aplicar al tornillo a fin de empezar a mover la carga de 1200 lb (a) hacia arriba y (b) hacia abajo.

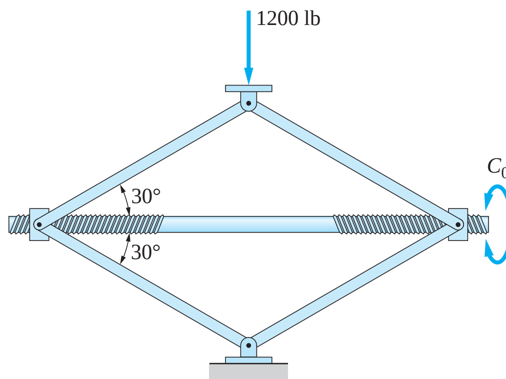


Fig. P7.58

*7.6 Cuerdas y bandas planas

La teoría de la fricción de Coulomb también se puede utilizar para analizar las fuerzas que actúan entre un cuerpo flexible, como una cuerda o una banda y una superficie con fricción.

En la figura 7.12 se muestra un peso W que se mantiene en equilibrio estático por una cuerda que pasa sobre una espiga. Si la espiga no tiene fricción, entonces $P = W$; es decir, la espiga simplemente invierte la dirección de la cuerda sin cambiar su tensión. Si la superficie de contacto entre la espiga y la cuerda tiene fricción, la fuerza de fricción ayudará a evitar que el peso caiga. En este caso, es posible tener $P < W$ y aun así mantener el equilibrio. Un buen ejemplo de este principio en acción

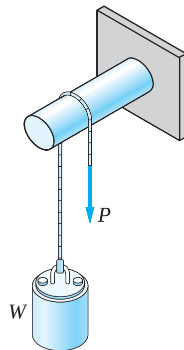


Fig. P7.12

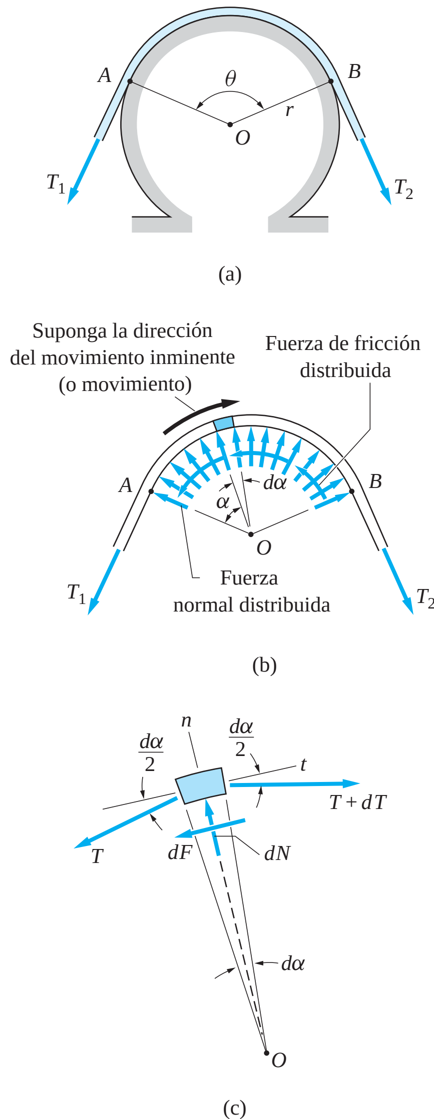


Fig. 7.13

es el cabrestante, que es un dispositivo para sujetar un barco a un muelle. Otras aplicaciones son las transmisiones por banda y los frenos de banda. En una transmisión por banda, la fricción entre la banda y las poleas permite que la potencia se transmita entre ejes rotatorios. Los frenos de banda utilizan la fricción entre una banda (o correa) y un tambor cilíndrico para reducir la velocidad de maquinaria rotatoria.

En la figura 7.13(a) se muestra un banda plana delgada que pasa sobre un cilindro de radio r. Suponiendo que hay fricción entre la banda y el cilindro, las tensiones T_1 y T_2 no son iguales. De acuerdo con la teoría de la fricción seca, la banda está en uno de los estados siguientes, dependiendo de los valores de T_1 y T_2: equilibrio sin deslizamiento inminente, equilibrio con deslizamiento inminente o deslizamiento. En el análisis que sigue se determinan las relaciones entre T_1 y T_2 para los últimos dos casos.

Las fuerzas que actúan sobre la banda se muestran en la figura 7.13(b), donde el peso de la banda se supone despreciable. El cilindro ejerce fuerzas normal y de fricción sobre la banda, que están las dos distribuidas a lo largo del área de contacto entre A y B. Como la dirección del movimiento inminente (o movimiento) de la banda se supone que es en sentido horario, el equilibrio implica que $T_2 > T_1$*. Debido a que las fuerzas de contacto están distribuidas se necesita realizar el análisis de equilibrio en una longitud infinitesimal (diferencial) de la banda que subtiende el ángulo diferencial $d\alpha$.

El diagrama de cuerpo libre del elemento diferencial se muestra en la figura 7.13(c), donde n y t se refieren a las direcciones que son normal y tangente a la superficie cilíndrica en el centro del elemento. La tensión en la banda a la izquierda del elemento se denota por T y la tensión en el lado derecho por $(T + dT)$, donde el cambio diferencial en la tensión es $dT = (dT/d\alpha)\, d\alpha$. El ángulo entre cada tensión y la dirección t es $d\alpha/2$. El elemento también está sujeto a la fuerza normal dN y a la fuerza de fricción dF, que actúan en las direcciones n y t, respectivamente.

El equilibrio de fuerzas en la dirección tangencial da

$$\Sigma F_t = 0 \quad \nearrow\!+ \quad (T + dT)\cos\frac{d\alpha}{2} - T\cos\frac{d\alpha}{2} - dF = 0 \tag{a}$$

Como el coseno de un ángulo infinitesimal es igual a 1, la ecuación (a) se reduce a

$$dF = dT \tag{b}$$

El equilibrio de fuerzas en la dirección normal da

$$\Sigma F_n = 0 \quad +\!\nwarrow \quad dN - (T + dT)\,\mathrm{sen}\frac{d\alpha}{2} - T\,\mathrm{sen}\frac{d\alpha}{2} = 0 \tag{c}$$

Suponiendo que α se mide en radianes, sen($d\alpha/2$) se puede remplazar por $d\alpha/2$, una identidad que es válida para ángulos infinitesimales. Haciendo esta sustitución se obtiene

$$dN - (T + dT)\frac{d\alpha}{2} - T\frac{d\alpha}{2} = 0 \tag{d}$$

*Las ecuaciones de equilibrio se aplican incluso si la banda se mueve. Debido a que el peso de la banda se supone despreciable, los efectos inerciales se pueden omitir, excepto para velocidades muy elevadas.

Ignorando el producto de las diferenciales ($dT\ d\alpha$) comparado con $T\ d\alpha$ (esta no es una aproximación), se tiene

$$dN = T\,d\alpha \tag{e}$$

Si la banda se está deslizando o si el movimiento es inminente, se tiene una ecuación adicional $dF = \mu\ dN$, donde $\mu = \mu_k$ (deslizamiento) o $\mu = \mu_s$ (deslizamiento inminente). Sustituyendo esto con dF en la ecuación (b) y eliminando dN entre las ecuaciones (b) y (c), se obtiene

$$\frac{dT}{T} = \mu\,d\alpha \tag{f}$$

Integrando los dos lados de la ecuación (f) sobre el ángulo de contacto θ, ilustrado en la figura 7.13(a), se obtiene

$$\int_0^\theta \frac{dT}{T} = \mu \int_0^\theta d\alpha$$

Observando que $T = T_1$ cuando $\alpha = 0$ y $T = T_2$ cuando $\alpha = \theta$, la integración da

$$\ln(T_2/T_1) = \mu\theta$$

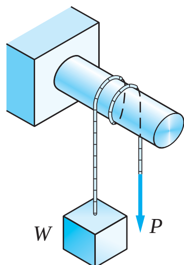
lo que se puede escribir como

$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta} \tag{7.8}$$

donde $e = 2.718...$ es la base de los logaritmos naturales (neperianos). Si se conoce la tensión en un lado de la banda, la ecuación (7.8) se puede utilizar para calcular la tensión en la banda en el otro lado.

Al utilizar la ecuación (7.8) se deben tener en cuenta los puntos siguientes:

- T_2 es la tensión en la banda que está dirigida opuesta a la fricción en ésta. Así pues, T_2 siempre se debe referir a la mayor de las dos tensiones.
- Para movimiento inminente, utilice $\mu = \mu_s$. Si existe un movimiento relativo entre la banda y el cilindro, utilice $\mu = \mu_k$.
- El ángulo de contacto θ se debe expresar en radianes.
- Como la ecuación (7.8) es independiente de r, su uso no está restringido a superficies de contacto circulares; también se puede emplear para una superficie de forma arbitraria.



Problema de ejemplo 7.13

El bloque de peso W está soportado por una cuerda que está enrrollada una vez y media alrededor de la espiga circular. Determine el intervalo de valores de P para los cuales el bloque permanecerá en reposo. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la espiga es 0.2.

Solución

La tensión en la parte de la cuerda que está unida al bloque es obvio que es igual a W. Como el movimiento es inminente, la ecuación (7.8) se puede utilizar para relacionar esta tensión con P. Debido a que el ángulo de contacto es $\theta = 1.5(2\pi) = 3\pi$ radianes, la ecuación (7.8) se convierte en

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \theta} = T_1 e^{0.2(3\pi)} = 6.59 T_1$$

Recuerde que en esta ecuación, T_2 se refiere a la mayor de las dos tensiones.

El valor máximo de P para el equilibrio ocurre cuando el bloque está a punto de moverse hacia arriba. Para este caso se debe sustituir $T_1 = W$ y $T_2 = P$ en la ecuación anterior. El resultado es $P = 6.59W$.

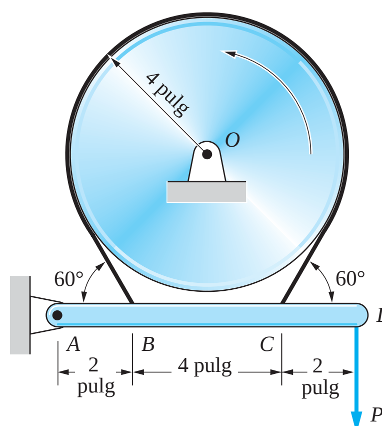
El valor mínimo de P corresponde al movimiento inminente del bloque hacia abajo, cuando W será mayor que P. Sustituyendo $T_1 = P$ y $T_2 = W$, se tiene $W = 6.59P$ o $P = W/6.59 = 0.152W$.

Por tanto, el bloque está en reposo si P se encuentra en el intervalo

$$0.152W \leq P \leq 6.59W$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo 7.14

Como se muestra en la figura(a), una banda flexible colocada alrededor de un tambor giratorio de 4 pulg de radio actúa como un freno cuando el brazo $ABCD$ se jala hacia abajo por la fuerza P. El coeficiente de fricción cinética entre la banda y el tambor es 0.2. Determine la fuerza P que resultaría en un par de torsión de frenado de 400 lb · pulg, suponiendo que el tambor gira en sentido contrario de las manecillas del reloj. Ignore el peso del brazo del freno.



(a)

Solución

El diagrama de cuerpo libre de la *banda* se muestra en la figura (b). Las fuerzas de contacto distribuidas ejercidas por el tambor se remplazaron por el sistema equivalente fuerza-par en O. La fuerza resultante R no es de interés para nosotros, pero el par C^R representa el par de torsión de frenado; es decir, $C^R = 400$ lb · pulg. Observe que C^R tiene el mismo sentido que la rotación del tambor; que es, en sentido contrario de las manecillas del reloj. La ecuación de equilibrio de momentos, con O como el centro de momento, es

$$\Sigma M_O = 0 \quad \circlearrowleft{+} \quad (T_C - T_B)4 - 400 = 0 \tag{a}$$

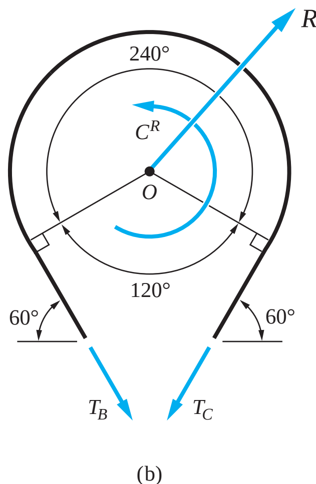
La ecuación (7.8) proporciona otra relación entre las tensiones en la banda. Sustituyendo $\mu = \mu_k = 0.2$, $T_1 = T_B$, $T_2 = T_C$ (observe que $T_C > T_B$) y $\theta = 240(\pi/180) = 1.333\pi$ radianes, la ecuación (7.8) se convierte en

$$T_C = T_B e^{0.2(1.333\pi)} = 2.311 T_B \tag{b}$$

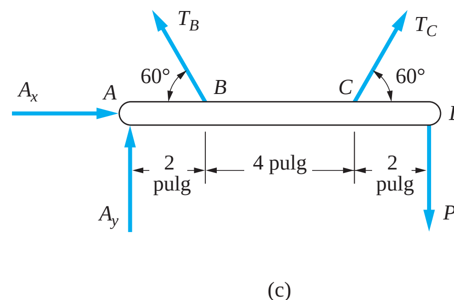
La solución de las ecuaciones (a) y (b) es $T_B = 76.3$ lb y $T_C = 176.3$ lb.

La fuerza P ahora se puede determinar con el equilibrio de momentos respecto a A en el DCL del brazo del freno, que se muestra en la figura(c):

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft{+} \quad T_B \operatorname{sen} 60°(2) + T_C \operatorname{sen} 60°(6) - P(8) = 0$$



(b)



(c)

Sustituyendo los valores de T_B y T_C, y despejando P, da

$$P = 131.0 \text{ lb} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

7.59 ¿Cuántas vueltas de la cuerda alrededor del cabrestante se necesitan para que la fuerza de 60 lb resista el jalón de 9000 lb de un barco atracado? El coeficiente de fricción estática entre el cabrestante y la cuerda es 0.2.

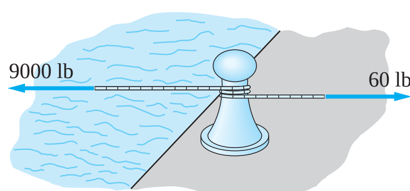


Fig. P7.59

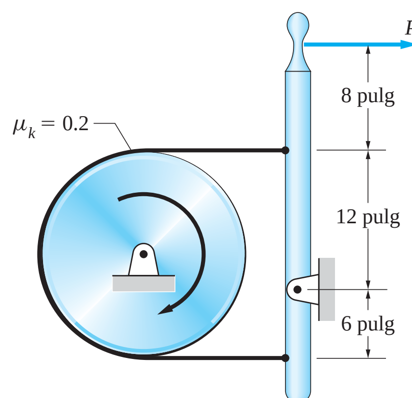


Fig. P7.60, P7.61

7.60 La fuerza P aplicada a la manija del freno permite que el freno de banda reduzca la velocidad angular de un tambor rotatorio. Si la resistencia a la tensión de la banda es 3800 lb, encuentre el valor máximo seguro de P y el par de torsión de frenado correspondiente que actúa sobre el tambor. Suponga que el tambor gira en sentido de las manecillas del reloj.

7.61 Resuelva el problema 7.60 si el tambor gira en sentido contrario de las manecillas del reloj.

7.62 La cuerda que pasa sobre dos cilindros fijos soporta la masa de 4 kg en un extremo. Determine la fuerza P que se debe aplicar en el otro extremo para iniciar el movimiento. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y los cilindros es 0.15.

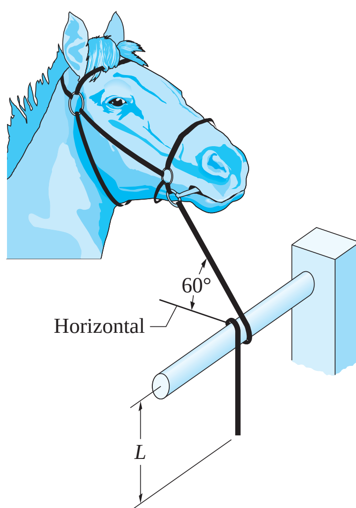


Fig. P7.63

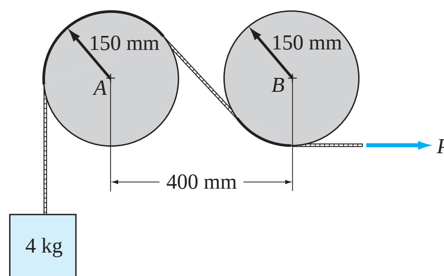


Fig. P7.62

7.63 La rienda de cuero utilizada para sujetar el caballo al barrote pesa 4 oz por pie. El coeficiente de fricción estática entre el barrote y la rienda es 0.6. Si una fuerza de 30 lb actuando sobre la brida es suficiente para sujetar al caballo, determine la longitud mínima segura L para el extremo libre de la rienda.

7.64 El peso de 30 lb está unido a una cuerda que pasa sobre un cilindro fijo. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el cilindro es 0.3. Determine el intervalo de la fuerza *P* para el cual el sistema estará en reposo.

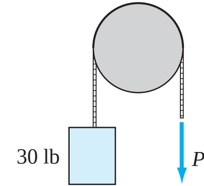


Fig. P7.64

7.65 El riel *AB* de peso despreciable está suspendido de una cuerda que pasa alrededor de dos espigas fijas. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y las espigas es 0.5, Conforme el peso *W* se mueve a lo largo del riel hacia el extremo *B*, determine su posición *x* cuando la cuerda está a punto de deslizarse sobre las espigas.

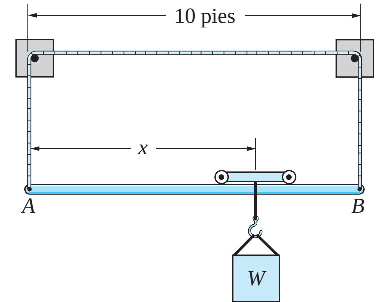


Fig. P7.65

7.66 La eslinga con un gancho deslizante se utiliza para levantar un tambor homogéneo. Si el coeficiente de fricción estática entre el cable y el ojo del gancho es 0.6, determine el valor mínimo posible para el ángulo θ.

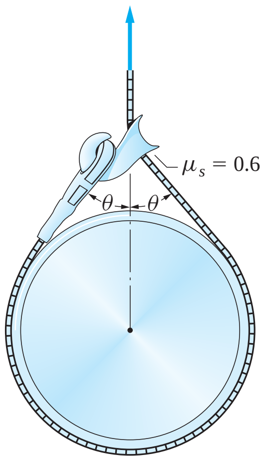


Fig. P7.66

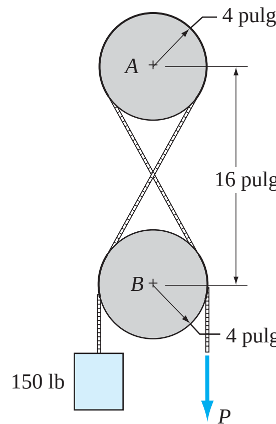


Fig. P7.67

7.67 El peso de 150 lb está unido a una cuerda que pasa sobre los cilindros fijos *A* y *B*. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y los cilindros es 0.3. Determine la fuerza *P* mínima que mantiene el sistema en reposo.

7.68 La barra *AB* homogénea de 50 lb pende de una cuerda que pasa sobre una espiga pequeña en *C*. La barra se mantiene en la posición indicada por la fuerza horizontal *P*. Determine el coeficiente de fricción estática mínimo en *C* para el cual la barra estará en reposo.

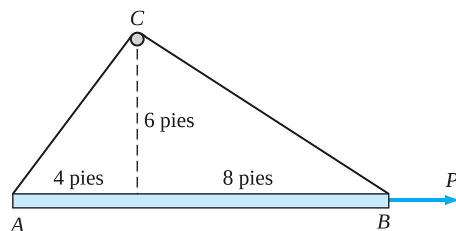


Fig. P7.68

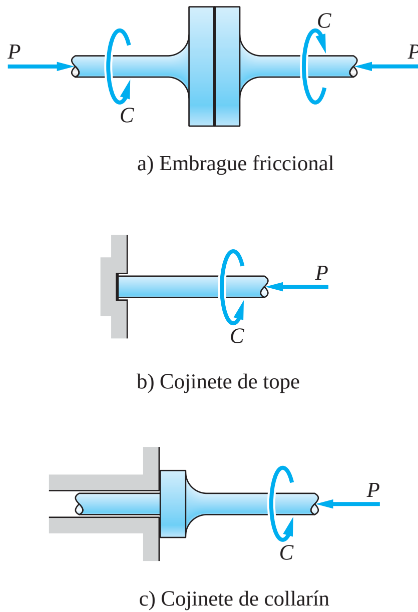


Fig. 7.14

*7.7 Fricción en discos

Cuando un disco o el extremo de un eje se presionan contra una superficie plana, su rotación la resiste un par de torsión friccional conocido como *fricción en disco*. Algunos ejemplos de la fricción en discos se ilustran en la figura 7.14. El embrague de fricción consiste de dos discos que están recubiertos con materiales especiales de alta fricción. Cuando los discos se presionan entre sí por una fuerza axial P, como se muestra en la figura 7.14(a), pueden transmitir un gran par de torsión C sin deslizarse. Las cargas axiales soportadas por ejes rotatorios en ocasiones se soportan por cojinetes de tope y cojinetes de collarín, como se muestra en las figuras 7.14(b) y (c), respectivamente. En un cojinete de tope, la fuerza axial está distribuida sobre el extremo del eje; en un cojinete de collarín, la carga la soporta el área anular del collarín. En los dos casos, el par de torsión C se requiere para superar la resistencia rotacional del cojinete.

A fin de analizar el par friccional, considere el eje hueco con radio interior R_i y radio exterior R_o ilustrado en la figura 7.15(a). El eje se presiona contra una superficie plana por la *fuerza axial* P y el *par de torsión requerido para superar el par friccional* se denota por C. El objetivo de nuestro análisis es determinar la relación entre P y C. Siguiendo la práctica de la sección anterior, se denota el coeficiente de fricción por μ. Si el eje está girando, entonces μ se debe interpretar como μ_k; para rotación inminente, se deberá utilizar μ_s.

En la figura 7.15(b) se muestra la fuerza normal dN y la fuerza de fricción dF actuando sobre el elemento infinitesimal de área dA en el extremo del eje. Si el eje está

$$\Sigma F_{\text{eje}} = 0 \qquad P - \int_{\mathscr{A}} dN = 0$$

$$\Sigma M_{\text{eje}} = 0 \qquad C - \int_{\mathscr{A}} r\,dF = C - \mu \int_{\mathscr{A}} r\,dN = 0$$

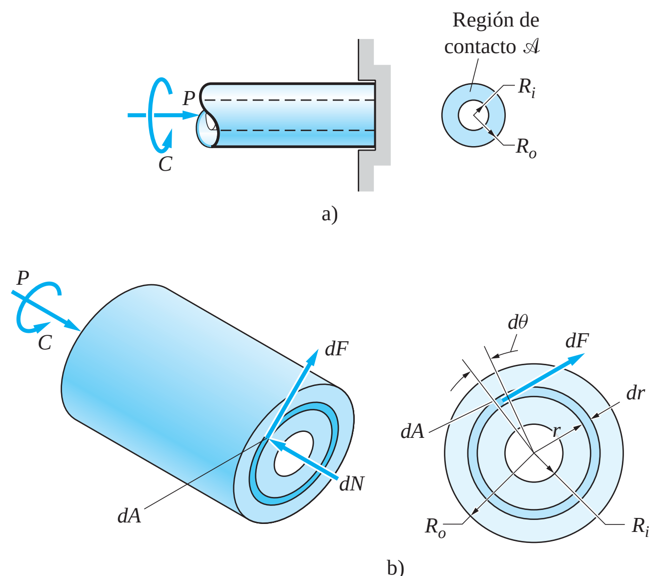


Fig. 7.15

girando, o a punto de girar, entonces $dF = \mu\ dN$. Las ecuaciones de equilibrio del eje son donde las integrales se deben calcular sobre la región de contacto $\mathscr{A}$, que es un anillo anular de área $A = \pi(R_o^2 - R_i^2)$. Denotando la presión normal de contacto por p, se tiene $dN = p\ dA$ y las ecuaciones de equilibrio se vuelven

$$P = \int_{\mathscr{A}} p\ dA \tag{7.9}$$

$$C = \mu \int_{\mathscr{A}} pr\ dA \tag{7.10}$$

A fin de realizar las integraciones, se debe conocer la variación de la presión normal p sobre la región de contacto. Esta variación depende de si las superficies de contacto son nuevas o desgastadas.

Superficies nuevas Para superficies de contacto nuevas y planas, es razonable suponer que la presión p está uniformemente distribuida. Por tanto, la ecuación (7.9) se convierte en $P = pA$ y la presión de contacto está dada por

$$p = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi\left(R_o^2 - R_i^2\right)}$$

Sacando p de la integral en la ecuación (7.10) da $C = \mu p \int_{\mathscr{A}} r\ dA$. Como se muestra en la figura 7.15(b), dA se puede expresar en términos de coordenadas polares como $dA = r\ d\theta\ dr$. Por tanto, el par de torsión necesario para superar el par de fricción es

$$C = \frac{\mu P}{\pi\left(R_o^2 - R_i^2\right)} \int_{R_i}^{R_o} \int_0^{2\pi} r^2\, d\theta\, dr$$

que, después de evaluar las integrales, se vuelve:

$$C = \frac{2\mu P}{3} \frac{\left(R_o^3 - R_i^3\right)}{\left(R_o^2 - R_i^2\right)} \tag{7.11}$$

Si la sección transversal es un círculo sólido de radio R_o ($R_i = 0$), la expresión anterior se reduce a

$$C = \frac{2\mu P R_o}{3} \tag{7.12}$$

Superficies desgastadas Aunque la presión normal p inicialmente puede ser uniforme entre dos superficies nuevas y planas, el desgaste no será uniforme. El desgaste en un punto dado en la sección transversal dependerá tanto de la presión como de la distancia recorrida por el punto durante el deslizamiento. Como la distancia

recorrida es proporcional a r (un punto en una distancia radial r recorre la distancia $2\pi r$ en una revolución del eje), ocurrirá mayor desgaste en puntos más alejados desde el eje de la flecha. Una vez que las superficies de contacto se han desbastado, es razonable suponer que la sección transversal se habrá desgastado de una forma para la cual la velocidad de desgaste es constante. En esta situación, se tendría $pr = K$, donde K es una constante. Para una sección transversal hueca, la ecuación (7.10) entonces se transforma en

$$C = \mu K \int_{\mathcal{A}} dA = \mu K \pi \left(R_o^2 - R_i^2\right) \tag{7.13}$$

La constante K se puede calcular sustituyendo $p = K/r$ en la ecuación (7.9), lo que resulta en

$$P = \int_{\mathcal{A}} p\ dA = \int_{R_i}^{R_o} \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} r\, d\theta\, dr = 2\pi K\,(R_o - R_i)$$

de donde

$$K = \frac{P}{2\pi\,(R_o - R_i)}$$

Sustituyendo esta expresión para K en la ecuación (7.13), el par de torsión necesario para superar el par de fricción es

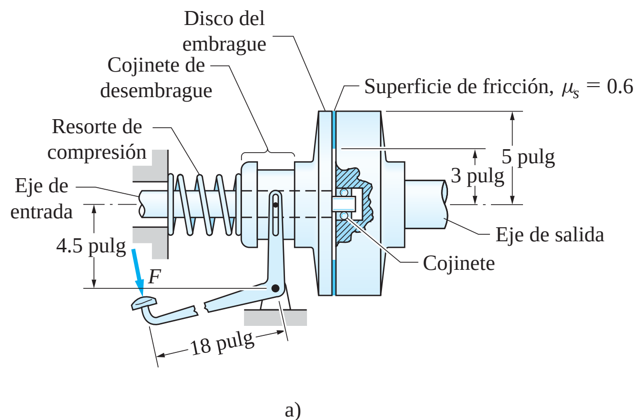
$$C = \frac{\mu P}{2}\,(R_o + R_i) \tag{7.14}$$

Para un eje sólido de radio R_o, se tiene $R_i = 0$ y el par de torsión se reduce a

$$C = \frac{\mu P R_o}{2} \tag{7.15}$$

Problema de ejemplo **7.15**

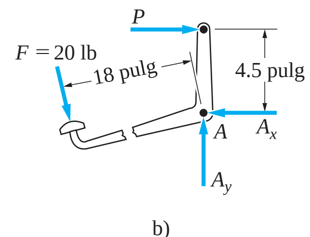
En la figura (a) se muestra un embrague de disco que transmite un par de torsión del eje de entrada a la izquierda al eje de salida a la derecha. El disco del embrague está enchavetado en el eje de entrada, forzando así al disco del embrague y al eje a girar juntos pero permitiendo que el disco se deslice a lo largo del eje. La fuerza normal entre las dos mitades del embrague la proporciona el resorte de compresión. La fuerza P aplicada al pedal del embrague puede desactivar el embrague deslizando el cojinete de desembrague a la izquierda. Determine el par de torsión máximo que se puede transmitir si el valor de F necesario para desactivar el embrague es 20 lb. Resuelva para superficies de fricción nueva y desgastada.



a)

Solución

Utilizando el diagrama de cuerpo libre del conjunto del pedal del embrague, figura (b), se obtiene



b)

$$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft + \quad 20(18) - P(4.5) = 0$$

$$P = 80 \text{ lb}$$

Esta es la fuerza normal que actúa sobre la superficie de fricción cuando se acciona el embrague. El par de torsión máximo que se puede transmitir es igual al par de fricción para este valor de P.

Para una superficie de fricción nueva, la ecuación (7.11) da

$$C = \frac{2\mu_s P}{3}\frac{\left(R_o^3 - R_i^3\right)}{\left(R_o^2 - R_i^2\right)} = \frac{2(0.6)(80)}{3}\frac{\left(5^3 - 3^3\right)}{\left(5^2 - 3^2\right)}$$

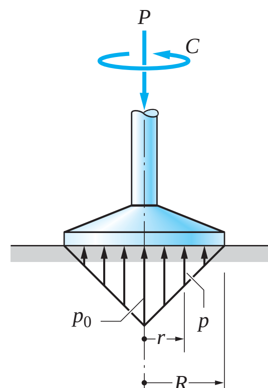
$$= 196.0 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$ *Respuesta*

Después de que las superficies de fricción se han desgastado, de la ecuación (7.14) se tiene

$$C = \frac{\mu_s P}{2}(R_o + R_i) = \frac{0.6(80)}{2}(5 + 3) = 192.0 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$ *Respuesta*

Problema de ejemplo **7.16**

La presión normal debajo de una pulidora industrial circular de cristal es axialmente simétrica y varía linealmente de p_0 en $r = 0$ a cero en $r = R$, como se muestra en la figura. Deduzca la expresión para el par de torsión necesario para girar la pulidora en términos de la carga axial P. El coeficiente de fricción cinética entre la pulidora y el cristal es μ_k.



Solución

La presión p a la distancia radial r está dada por $p = p_0(R - r)/R$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (7.10), el par de torsión C necesario para girar la pulidora es

$$C = \mu_k \int_{\mathcal{A}} pr\, dA = \frac{\mu_k p_0}{R} \int_0^R \int_0^{2\pi} (R - r)r^2\, d\theta\, dr$$
$$= \frac{\pi \mu_k p_0 R^3}{6}$$

La relación entre p_0 y P se puede obtener con la ecuación (7.9).

$$P = \int_{\mathcal{A}} p\, dA = \frac{p_0}{R} \int_0^R \int_0^{2\pi} (R - r)r\, d\theta\, dr = \frac{\pi p_0 R^2}{3}$$

Sustituyendo $p_0 = 3P/\pi R^2$ en la expresión para C da

$$C = \frac{\mu_k P R}{2}$$ *Respuesta*

*7.8 Resistencia al rodamiento

Hasta ahora, nuestro análisis de la fricción sólo ha tratado con cuerpos rígidos. La deformación (si es que existía) se supuso despreciable. Por ejemplo, considere una rueda rígida de peso W y radio R que rueda sobre una superficie rígida y horizontal con una velocidad constante. El DCL de la rueda se muestra en la figura 7.16(a). Como W y la fuerza de contacto N son perpendiculares a la dirección del recorrido, la rueda no encuentra resistencia y, por tanto, rodará por siempre.

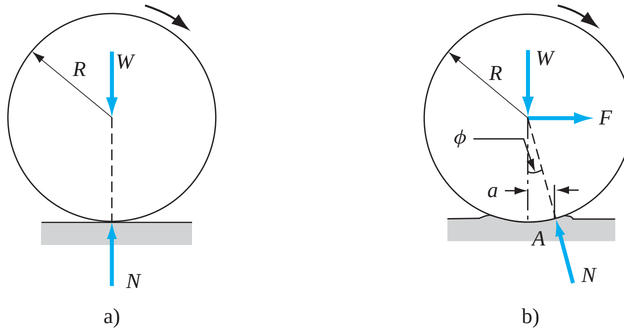


Fig. 7.16

En el mundo real, tanto la rueda como la superficie se deforman en la región de contacto. Como consecuencia, el contacto ocurre sobre un área finita en vez de en un punto, como se ilustra en la figura 7.16(b). La deformación en frente de la rueda retarda el movimiento, en tanto que el material detrás de la rueda está en recuperación, asistiendo así el movimiento. Durante el ciclo deformación-recuperación parte de la energía mecánica invariablemente se convierte en calor, un fenómeno denominado *histéresis*. En consecuencia, la fuerza de retardo debida a la deformación siempre es mayor que la fuerza de propulsión del material en recuperación, tal que la fuerza de contacto N tiene una componente horizontal que se opone al movimiento, como se indica en la figura 7.16(b). Para mantener rodando la rueda a una velocidad constante ahora se requiere la aplicación de una fuerza horizontal F igual a la componente horizontal de N. La magnitud de la fuerza F se conoce como *resistencia al rodamiento* o *fricción de rodamiento*.

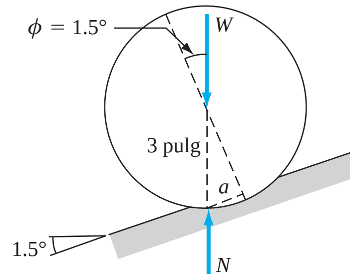
Sea A el punto de aplicación de N y sea a la distancia horizontal entre A y la línea central vertical de la rueda. Con referencia a la figura 7.16(b), la ecuación de momentos $\Sigma M_A = 0$ da $Wa = FR\cos\phi$, donde ϕ es el ángulo entre N y la vertical. En la práctica $a << R$, lo que permite aproximar $\cos\phi \approx 1$. Por tanto, $Wa = FR$, o

$$F = \frac{a}{R}W = \mu_r W \tag{7.16}$$

donde $\mu_r = a/R$ se denomina *coeficiente de resistencia al rodamiento* (por desgracia, a la distancia a con frecuencia también se le refiere como coeficiente de resistencia al rodamiento). Observe que μ_r es análoga al coeficiente de fricción cinética μ_k. En general, μ_r es considerablemente menor que μ_k. Los valores comunes de μ_r son de 0.0002 a 0.0005 para ruedas de vagones de ferrocarril sobre rieles de acero y de 0.01 a 0.03 para neumáticos de automóvil sobre carreteras pavimentadas.

Problema de ejemplo 7.17

Un carro de supermercado de 80 lb con ruedas de 6 pulg de diámetro rueda hacia abajo por una rampa con velocidad constante. Si la pendiente de la rampa es 1.5°, ¿cuál es la resistencia al rodamiento?



Solución

Considere el DCL de la rueda del carro ilustrada en la figura. Como la velocidad es constante, la rueda está en equilibrio. También observe que la rueda es un cuerpo de dos fuerzas, de manera que el peso W que actúa sobre una rueda y la fuerza de contacto N son colineales. De geometría, se obtiene

$$a = 3 \operatorname{sen} 1.5° = 0.07853 \text{ pulg}$$

Por tanto, el coeficiente de resistencia al rodamiento es

$$\mu_r = \frac{a}{R} = \frac{0.07853}{3} = 0.0262$$ *Respuesta*

Problemas

7.69 El cojinete de collares soporta la carga axial $P = 400$ N. Suponiendo presión uniforme entre el collar y la superficie horizontal, determine el par C necesario para empezar a girar el eje. Utilice $\mu_s = 0.15$ para el coeficiente de fricción estática.

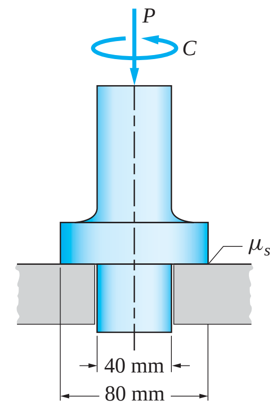


Fig. P7.69

7.70 Resuelva el problema de ejemplo 7.16 si la presión de contacto debajo de la pulidora varía parabólicamente de p_0 en $r = 0$ a cero en $r = R$; es decir, $p = p_0(1 - r^2/R^2)$.

7.71 El carrete de 500 lb del cable está colocado sobre un eje sin fricción que se ha hincado en el suelo. Si la fuerza necesaria para empezar a girar el carrete es $F = 110$ lb, determine el coeficiente de fricción entre el suelo y el carrete. Ignore el diámetro del eje comparado con el diámetro del carrete.

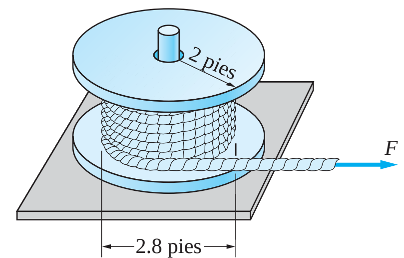


Fig. P7.71

7.72 Determine el par de torsión de frenado que actúa sobre el disco cuando se aplica una fuerza $P = 200$ N a cada balata. Suponga que los frenos: (a) son nuevos y (b) están desgastados.

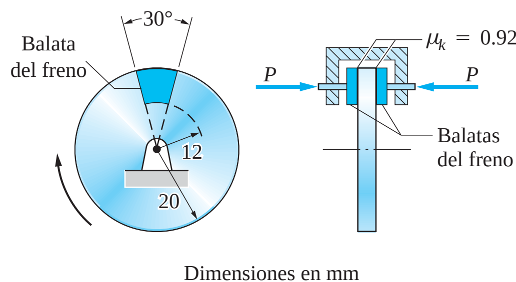


Fig. P7.72

7.73 La presión normal que actúa sobre el disco de la lijadora está dada por $p = (4/3) + (r^2/6)$, donde p es la presión en libras por pulgada cuadrada (psi) y r representa la distancia radial en pulgadas. Determine el par de torsión C necesario para operar la lijadora a velocidad constante si el coeficiente de fricción cinética para la superficie que se lija es 0.86.

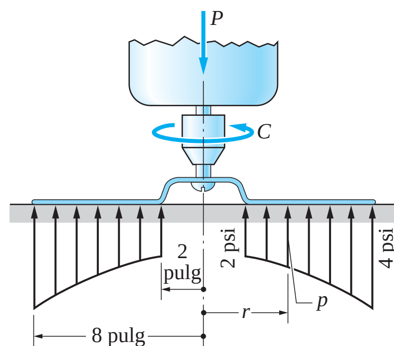


Fig. P7.73

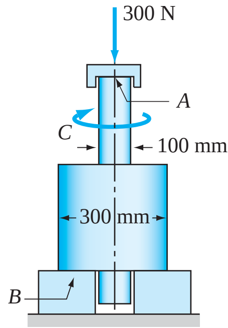


Fig. P7.74

7.74 El eje escalonado de 20 kg está soportado por cojinetes en A y B. Los coeficientes de fricción cinética son 0.15 en A y 0.06 en B. Suponiendo que todas las superficies son nuevas, determine el par C que hará girar al eje a velocidad constante.

7.75 El embrague de placa simple transmite el par C del eje de entrada a la izquierda al eje de salida a la derecha. Los resortes de compresión entre la caja del embrague y la placa de presión proporcionan la presión necesaria sobre la superficie de fricción. Las chavetas evitan que la placa del embrague gire relativa al eje de salida. Si $R_i = 4$ pulg y $R_o = 9$ pulg, determine la fuerza total que se debe aplicar a la placa de presión por los resortes si el embrague debe transmitir un par de torsión de $C = 56$ lb · pie cuando está nuevo.

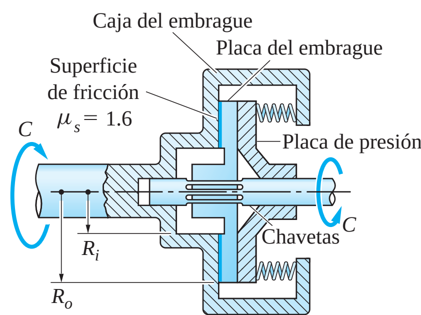


Fig. P7.75, P7.76

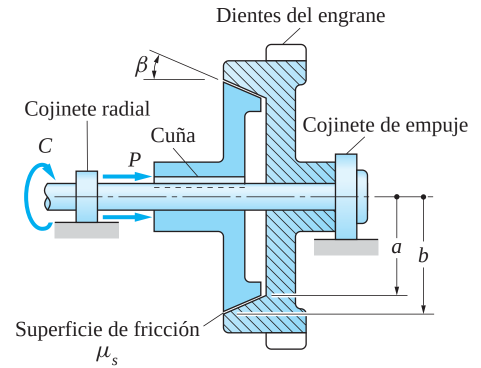


Fig. P7.77

7.76 El embrague descrito en el problema 7.75 debe transmitir un par de torsión de 120 lb · pie cuando la fuerza total ejercida por el resorte sobre la placa de presión es 75 lb. Si $R_i = 4$ pulg, calcule el valor mínimo aceptable para R_o. Suponga que el embrague es nuevo.

***7.77** El embrague de cono transmite el par de torsión C por medio de una superficie de fricción con ángulo β del cono. Los radios interior y exterior de la superficie de fricción son a y b, respectivamente. La mitad izquierda del embrague está conectada con una cuña al eje y la mitad derecha impulsa una máquina (no ilustrada) mediante un engrane unido a su borde exterior. Suponiendo presión uniforme sobre la superficie de fricción, demuestre que el par de torsión máximo que se puede transmitir por el embrague es

$$C = \frac{2\mu_s P}{3\,\text{sen}\,\beta}\frac{(b^3 - a^3)}{(b^2 - a^2)}$$

7.78 Determine la fuerza F necesaria para empujar el automóvil de 3700 lb a una velocidad constante sobre un pavimento de concreto. El coeficiente de resistencia al rodamiento de los neumáticos de 11 pulg es $\mu_r = 0.015$.

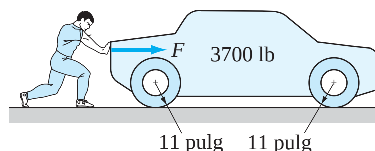


Fig. P7.78

7.79 El coeficiente de resistencia al rodamiento entre el rodillo para césped de 30 kg y el piso es $\mu_r = 0.1$. (a) Determine la fuerza P necesaria para jalar el rodillo a velocidad constante. (b) ¿Qué fuerza P se necesitaría para empujar el rodillo a una velocidad constante?

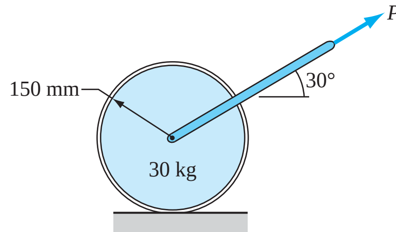


Fig. P7.79

7.80 La losa de concreto de 120 lb está colocada sobre rodillos de acero. Determine la fuerza P necesaria para mover la losa a velocidad constante. Los coeficientes de resistencia al rodamiento son 0.05 entre la losa y un rodillo, y 0.03 entre un rodillo y el suelo.

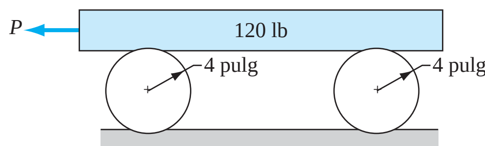


Fig. P7.80

7.81 Calcule la fuerza horizontal P necesaria para empujar la podadora de 80 lb a velocidad constante. El centro de gravedad de la podadora está en G y los coeficientes de resistencia al rodamiento son 0.1 para los neumáticos frontales y 0.15 para los neumáticos traseros.

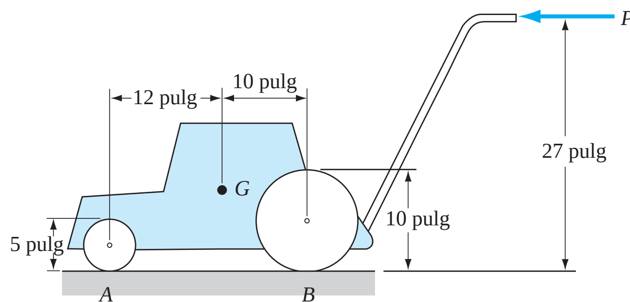


Fig. P7.81

Repaso de ecuaciones

Fuerza de fricción

Caso estático: $F \leq \mu_s N$ Caso dinámico: $F = \mu_s N$

μ_s = coeficiente de fricción estática
μ_k = coeficiente de fricción cinética
N = fuerza normal

Ángulo de fricción

Caso estático: $\phi_s = \tan^{-1} \mu_s$ Caso dinámico: $\phi_k = \tan^{-1} \mu_k$

Tornillos de roscas cuadradas

$$p = 2\pi r \tan\theta$$

p = paso del tornillo
θ = ángulo de avance (ángulo de hélice)
r = radio medio de las roscas

$$(C_0)_{\text{hacia abajo}} = Wr\tan(\phi_s + \theta) \qquad (C_0)_{\text{hacia arriba}} = Wr\tan(\phi_s - \theta)$$

C_0 = par mínimo necesario para subir/bajar un peso W

Fricción en bandas

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \theta} \text{ (deslizamiento inminente)} \qquad T_2 = T_1 e^{\mu_k \theta} \text{ (deslizamiento)}$$

θ = ángulo de contacto entre la banda y la espiga (en radianes)

Fricción en discos

$$C = \frac{2\mu P}{3}\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \text{ (superficies nuevas)}$$

$$C = \frac{\mu P}{2}(R_o + R_i) \text{ (superficies desgastadas)}$$

C = par de torsión transmitido
$\mu = \mu_s$ (rotación inminente) o $\mu = \mu_k$ (girando)
P = fuerza axial

Problemas de repaso

7.82 Determine la fuerza mínima P que mueva la cuña hacia la derecha si el coeficiente de fricción estática es 0.5 en todas las superficies de contacto. El cilindro uniforme pesa W y el peso de la cuña se puede ignorar.

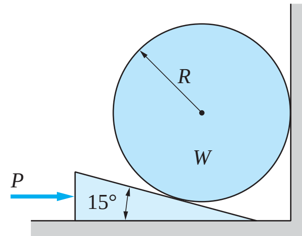


Fig. P7.82

7.83 La barra homogénea AB de peso W y longitud L la levanta la fuerza P que es perpendicular a la barra. Determine el coeficiente de fricción estática mínimo en A que permita que la barra alcance la posición $\beta = 30°$.

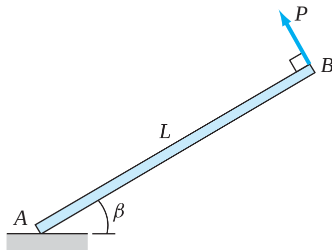


Fig. P7.83

7.84 Encuentre el ángulo β mínimo con el que la caja uniforme se volcará respecto a la esquina A. También determine el valor correspondiente de P.

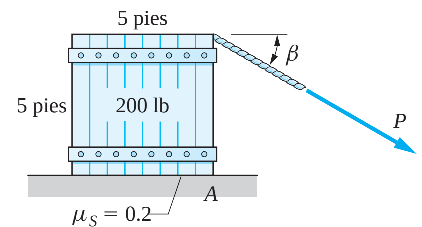


Fig. P7.84

7.85 La banda se coloca entre dos rodillos, que pueden girar con libertad respecto a A y B. Determine el coeficiente de fricción estática mínimo entre la banda y los rodillos para el que el dispositivo es autobloqueante; es decir, la banda no se puede jalar hacia abajo para cualquier valor de P.

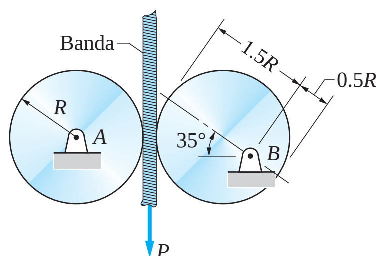


Fig. P7.85

7.86 Determine el ángulo β máximo para el que la caja uniforme puede estar en equilibrio.

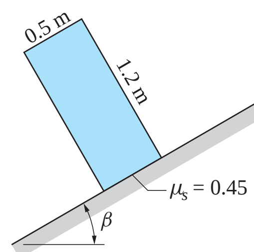


Fig. P7.86

7.87 ¿Puede la barra uniforme de peso W permanecer en reposo en la posición indicada?

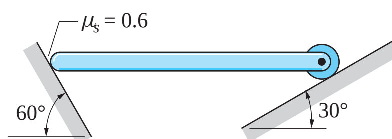


Fig. P7.87

7.88 El tablero de peso W con su centro de gravedad en G se coloca entre guías verticales y se libera. Determine la altura máxima h para la cual el panel no se deslizará hacia abajo debido a la trabazón en las esquinas A y B. El coeficiente de fricción estática entre el tablero y las guías es 0.5.

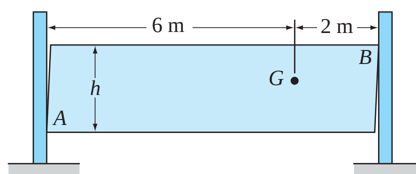


Fig. P7.88

7.89 Una mujer trata de mover la caja de peso W jalando la cuerda a un ángulo θ respecto a la horizontal. Encuentre la tensión mínima posible que ocasione que la caja se deslice y el ángulo θ correspondiente.

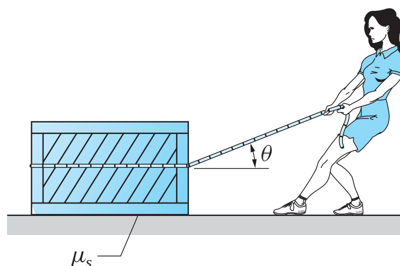


Fig. P7.89

7.90 El tornillo de la prensa tiene rosca cuadrada con un paso de 0.15 pulg y un diámetro medio de 0.5 pulg. El coeficiente de fricción estática entre las roscas es 0.5. Determine: (a) el par de torsión C_0 que se debe aplicar al tornillo a fin de producir una fuerza de sujeción de 30 lb en A y (b) el par de torsión necesario para aflojar la prensa.

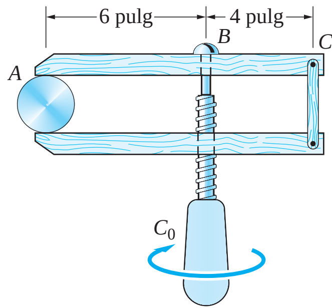


Fig. P7.90

7.91 Encuentre el par máximo C en sentido horario que se puede aplicar al cilindro A sin causar su movimiento. El coeficiente de fricción estática es 0.2 en las tres superficies de contacto.

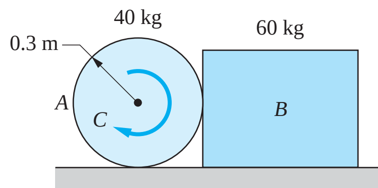


Fig. P7.91

7.92 El espécimen de prueba AB se coloca en la mordaza de la máquina de ensayo a la tensión y se asegura con una cuña. El coeficiente de fricción estática en las dos superficies del espécimen es μ_s. Si el ángulo de la cuña es $\theta = 18°$, determine la μ_s mínima para la cual la mordaza es autobloqueante (no tiene lugar deslizamiento sin importar la magnitud de la fuerza P). Ignore el peso de la cuña.

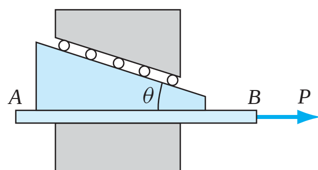


Fig. P7.92

7.93 Determine la fuerza mínima P necesaria para mantener al bloque homogéneo de 12 kg en la posición indicada.

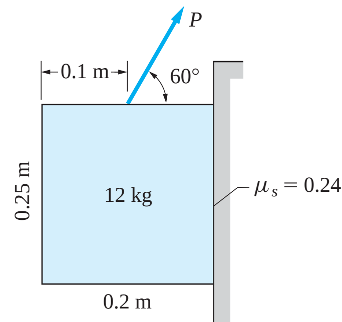


Fig. P7.93

7.94 Las barras uniformes AB y BC están conectadas con un pasador en B y colocadas sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción estática entre las barras y la superficie es $\mu_s = 0.6$. ¿Pueden las barras estar en equilibrio en la posición indicada?

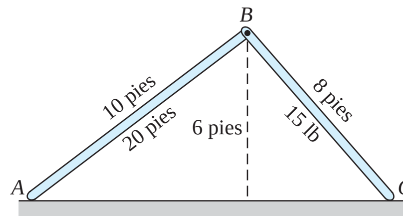
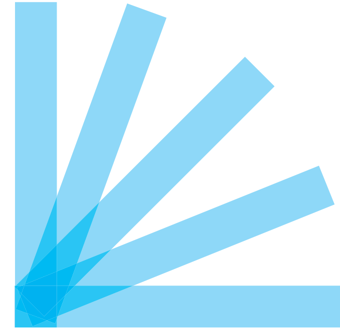


Fig. P7.94



8 Centroides y cargas distribuidas



La presión del agua sobre la cortina en el lado corriente arriba de la presa de arco resulta en fuerzas muy elevadas que deben resistir los estribos. En este capítulo se muestra cómo calcular la fuerza resultante de la presión hidráulica que actúa sobre superficies curvas, como la cortina en el lado corriente arriba de la presa mostrada. Michael Busselle/Stone/Getty Images

8.1 Introducción

En este capítulo se estudian los centroides; es decir, los centros de gravedad y los centros de masa. Los centroides se analizaron primero en el apartado 3.6 junto con las cargas normales distribuidas. El tratamiento más riguroso que aquí se presenta permitirá analizar las cargas normales que están distribuidas de una manera compleja. También se analizan los teoremas de Pappus-Guldinus, en los que se utilizan los centroides para calcular áreas y volúmenes de revolución.

8.2 Centroides de áreas y curvas planas

a. Definiciones

Considere la región plana $\mathscr{A}$ ilustrada en la figura 8.1. Sea dA un elemento de área diferencial $\mathscr{A}$, ubicado en (x, y). Existen ciertas propiedades de $\mathscr{A}$ que se presentan con frecuencia en varias ramas de las ciencias físicas. Una de ellas es, por supuesto, el área

$$A = \int_{\mathscr{A}} dA \tag{8.1}$$

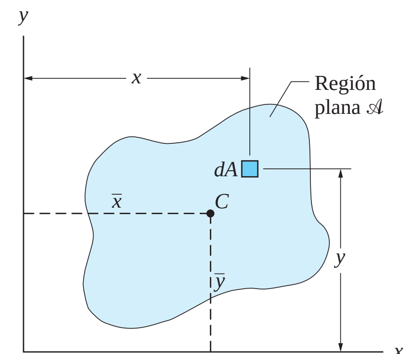


Fig. 8.1

Otras propiedades importantes son los *primeros momentos del área* respecto a los ejes x y y, que se definen como

$$Q_x = \int_{\mathscr{A}} y\, dA \qquad Q_y = \int_{\mathscr{A}} x\, dA \tag{8.2}$$

y los *segundos momentos del área*, también denominados *momentos de inercia*, que se estudian por separado en el capítulo 9.

La importancia del *centroide del área* se deriva de su cercana asociación con los primeros momentos de áreas. El centroide C de un área plana se define como el punto que tiene las coordenadas (consulte la figura 8.1)

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int_{\mathscr{A}} x\, dA}{\int_{\mathscr{A}} dA} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int_{\mathscr{A}} y\, dA}{\int_{\mathscr{A}} dA} \tag{8.3}$$

Se puede deducir que si se conocen A y $(\bar{x}, \bar{y})$ de un área, sus primeros momentos se pueden calcular con $Q_x = A\bar{y}$ y $Q_y = A\bar{x}$, evitando así la evaluación de las integrales en las ecuaciones (8.2).

Al centroide en ocasiones se le refiere como centro geométrico de la región. El centroide no se debe confundir con el centro de masa, que es una propiedad de la distribución de la masa dentro de la región. Los centroides y los centros de masa coinciden sólo si la distribución de la masa es uniforme; es decir, si el cuerpo es homogéneo.

Se deben destacar las características siguientes de los centroides y primeros momentos de áreas.

- Las dimensiones de Q_x y Q_y es $[L^3]$; de aquí que las unidades son mm^3, pulg^3, etcétera.
- Q_x y Q_y pueden ser positivos, negativos o cero, dependiendo de la ubicación de los ejes coordenados relativos al centroide de la región. Si el eje x pasa por el centroide, entonces $Q_x = 0$. De manera similar, $Q_y = 0$ si el centroide se encuentra sobre el eje y.
- Si la región es simétrica, entonces su centroide está ubicado sobre el eje de simetría. Esto se puede demostrar considerando la región en la figura 8.2, que es simétrica respecto al eje y. Es evidente que la integral $\int x\, dA$ sobre la mitad izquierda (donde x es negativa) cancela la integral $\int x\, dA$ sobre la mitad derecha (donde x es positiva). En consecuencia, $Q_y = 0$ y se deduce que $\bar{x} = 0$.

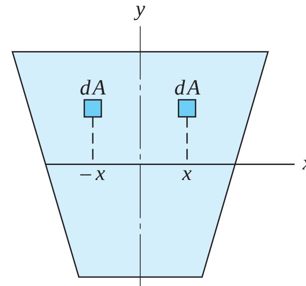


Fig. 8.2

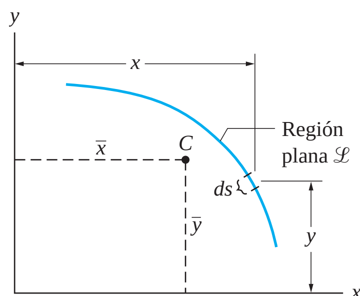


Fig. 8.3

Las definiciones de los centroides y los primeros momentos de curvas planas son análogas a las de áreas planas. Si *ds* es la longitud diferencial de la curva plana $\mathscr{L}$ en la figura 8.3, la longitud de la curva es

$$L = \int_{\mathscr{L}} ds \tag{8.4}$$

y los primeros momentos de la curva respecto a los ejes coordenados se definen como

$$Q_x = \int_{\mathscr{L}} y\, ds \qquad Q_y = \int_{\mathscr{L}} x\, ds \tag{8.5}$$

La dimensión del primer momento de una curva es $[L^3]$. Las coordenadas del *centroide de la curva* son, por definición,

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{L} = \frac{\int_{\mathscr{L}} x\, ds}{\int_{\mathscr{L}} ds} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{L} = \frac{\int_{\mathscr{L}} y\, ds}{\int_{\mathscr{L}} ds} \tag{8.6}$$

b. *Técnicas de integración*

Los detalles de la integración para áreas planas en las ecuaciones (8.1) y (8.2) dependen de la elección del elemento de área *dA*. Hay dos elecciones básicas para *dA*: los elementos diferenciales dobles ilustrados en las figuras 8.4(a), (b) y los elementos diferenciales simples en las figuras 8.4(c) a (e). En el último caso, las coordenadas *x* y *y* del elemento diferencial se deben interpretar como las coordenadas del centroide del elemento. Estas coordenadas, denotadas por $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$, se muestran en las figuras 8.4(c) a (e).

Las expresiones para *dA*, $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ también dependen de la elección del sistema de coordenadas. En la figura 8.4 se ilustran unos elementos utilizando coordenadas rectangulares y polares. El sistema de coordenadas más conveniente para un problema dado se determina principalmente por la forma de la región $\mathscr{A}$. Es obvio que las regiones rectangulares se manejan mejor mediante coordenadas rectangulares, en tanto que las coordenadas polares se deben elegir para regiones circulares.

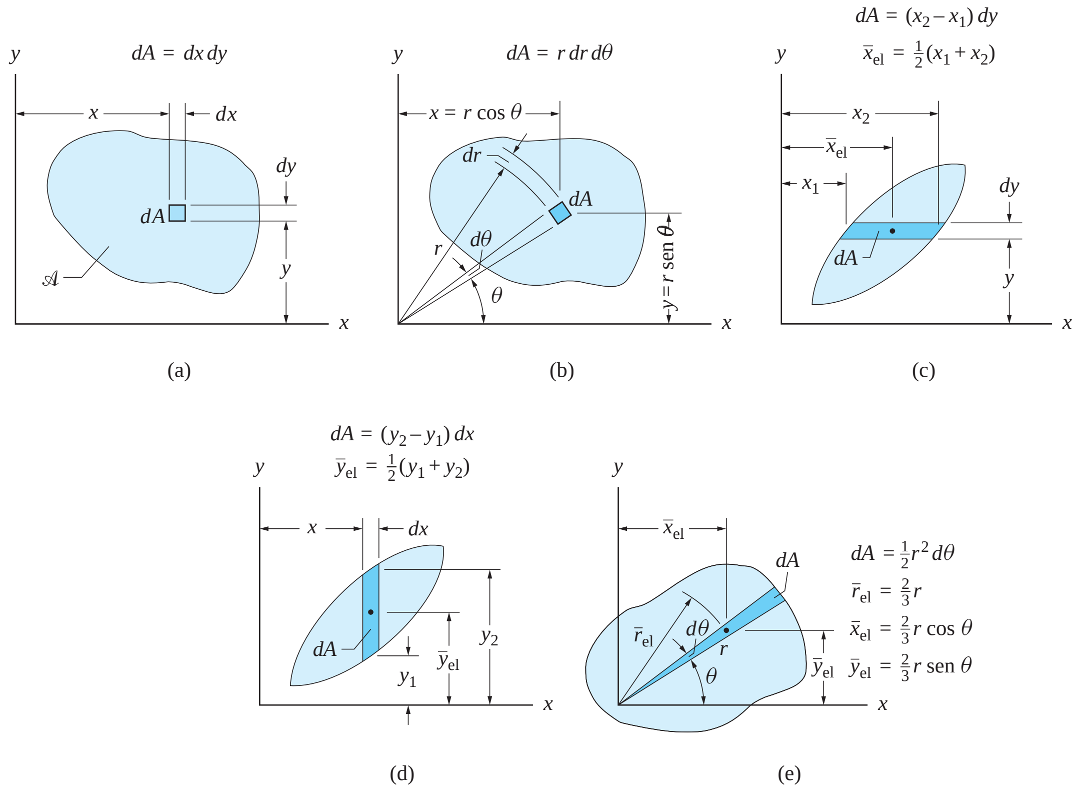


Fig. 8.4

Las propiedades de las curvas siempre comprenden una integración simple, que se efectúa a lo largo de la longitud de la curva. Las expresiones para la longitud diferencial ds para coordenadas rectangulares y polares se muestran en la figura 8.5.

En los casos donde no es posible evaluar las integrales de manera analítica, se debe emplear la integración numérica. Dos de esos métodos, la regla del trapecio y

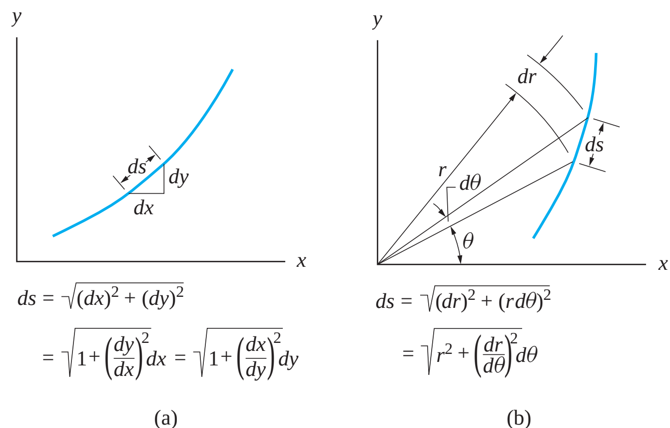


Fig. 8.5

la regla de Simpson, se analizan en el apéndice A. La integración numérica es útil en particular para calcular centroides de curvas, ya que incluso las formas simples, por ejemplo, las parábolas, resultan en integrales que son difíciles de evaluar de manera analítica.

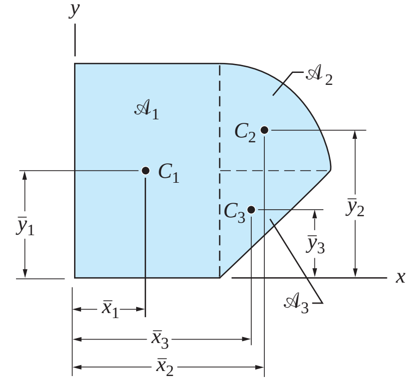


Fig. 8.6

c. Formas compuestas

Considere la región plana $\mathscr{A}$ ilustrada en la figura 8.6 que se ha dividido en las subregiones $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, . . . (sólo se muestran tres subregiones). Los centroides de las áreas de las subregiones están identificados como C_1, C_2, C_3, . . . , con coordenadas $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$, $(\bar{x}_3, \bar{y}_3)$, . . . respectivamente. Como la integral de una suma es igual a la suma de las integrales (una propiedad bien conocida de las integrales definidas), el área A de la región compuesta $\mathscr{A}$ es

$$A = \int_{\mathscr{A}} dA = \int_{\mathscr{A}_1} dA + \int_{\mathscr{A}_2} dA + \int_{\mathscr{A}_3} dA + \cdots = \sum_i A_i$$

donde A_1, A_2, A_3, . . . son las áreas de las subregiones. De manera similar, el primer momento del área de $\mathscr{A}$ respecto al eje y es

$$Q_y = \int_{\mathscr{A}} x\, dA = \int_{\mathscr{A}_1} x\, dA + \int_{\mathscr{A}_2} x\, dA + \int_{\mathscr{A}_3} x\, dA + \cdots = \sum_i (Q_y)_i$$

donde $(Q_y)_i$ se refiere al primer momento del área $\mathscr{A}$ respecto al eje y. Se puede aplicar un análisis similar para determinar Q_x, el primer momento del área de $\mathscr{A}$ respecto al eje x.

Por tanto, las coordenadas centroidales del área de $\mathscr{A}$ se pueden escribir como

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\sum_i (Q_y)_i}{\sum_i A_i} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_i (Q_x)_i}{\sum_i A_i} \tag{8.7}$$

La determinación del centroide de un área mediante esta técnica se denomina *método de las áreas compuestas*. Sustituyendo $(Q_y)_i = A_i\bar{x}_i$ y $(Q_x)_i = A_i\bar{y}_i$, las ecuaciones anteriores toman la forma

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\sum_i A_i\bar{x}_i}{\sum_i A_i} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_i A_i\bar{y}_i}{\sum_i A_i} \tag{8.8}$$

Advertencia El centroide del área compuesta no es igual a la suma de los centroides de sus subregiones; es decir, $\bar{x} \neq \Sigma_i(A_i\bar{x}_i/A_i)$ y $\bar{y} \neq \Sigma_i(A_i\bar{y}_i/A_i)$.

El método de las curvas compuestas es análogo al método de las áreas compuestas. Las coordenadas centroidales de la curva $\mathscr{L}$ de longitud L que se ha subdividido en los segmentos $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$, . . . están dadas por

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{L} = \frac{\sum_i L_i\bar{x}_i}{\sum_i L_i} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{L} = \frac{\sum_i L_i\bar{y}_i}{\sum_i L_i} \tag{8.9}$$

donde L_i es la longitud del segmento $\mathscr{L}_i$ con su centroide ubicado en $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$.

Como se verá las tablas en las que se enumeran las propiedades de figuras planas comunes, como las tablas 8.1 y 8.2, son muy útiles al aplicar los métodos de las áreas compuestas y de las líneas compuestas.

Triángulo

$\bar{x} = \frac{1}{3}(a+b)$ $\bar{y} = \frac{1}{3}h$ $A = \frac{1}{2}bh$

Mitad de complemento parabólico

$y = h\left(\frac{x}{b}\right)^2$

$\bar{x} = \frac{3}{4}b$ $\bar{y} = \frac{3}{10}h$ $A = \frac{1}{3}bh$

Cuarto de círculo

$\bar{x} = \frac{4}{3\pi}R$ $\bar{y} = \frac{4}{3\pi}R$ $A = \frac{\pi}{4}R^2$

Media parábola

$y = h\left(\frac{x}{b}\right)^2$

$\bar{x} = \frac{3}{8}b$ $\bar{y} = \frac{3}{5}h$ $A = \frac{2}{3}bh$

Cuarto de elipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\bar{x} = \frac{4}{3\pi}a$ $\bar{y} = \frac{4}{3\pi}b$ $A = \frac{\pi}{4}ab$

Sector circular

$\bar{x} = \frac{2R \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$ $A = \alpha R^2$

Tabla 8.1 Centroides de áreas planas

Cuarto de arco circular

$\bar{x} = \frac{2}{\pi}R$ $y = \frac{2}{\pi}R$ $L = \frac{\pi}{2}R$

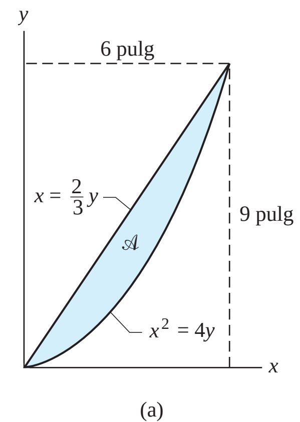
Arco circular

$\bar{x} = \frac{1}{\alpha}R \text{ sen } \alpha$ $L = 2\alpha R$

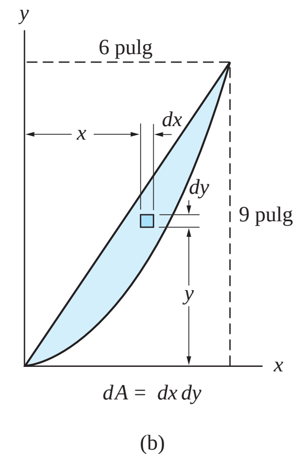
Tabla 8.2 Centroides de curvas planas

Problema de ejemplo 8.1

Determine las coordenadas del centroide del área que se encuentra entre la línea recta $x = 2y/3$ y la parábola $x^2 = 4y$, donde x y y están en pulgadas, consulte la figura (a). Utilice los métodos siguientes: 1. integración doble; 2. integración simple empleando un elemento de área diferencial horizontal y 3. integración simple utilizando un elemento de área diferencial vertical.



(a)



(b)

Solución

Parte 1 Integración doble

El elemento de área diferencial doble se muestra en la figura (b). Observe que dA se puede escribir como $dx\,dy$ o $dy\,dx$, dependiendo de si se elige integrar primero sobre x o y. Eligiendo integrar primero sobre y, el área A de la región $\mathscr{A}$ es

$$A = \int_{\mathscr{A}} dA = \int_0^6 \left(\int_{x^2/4}^{3x/2} dy \right) dx = \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{12} \right]_0^6 = 9 \text{ pulg}^2$$

El primer momento del área respecto al eje y es

$$Q_y = \int_{\mathscr{A}} x\, dA = \int_0^6 \left(\int_{x^2/4}^{3x/2} x\, dy \right) dx = \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) x\, dx$$

$$= \left[\frac{3x^3}{6} - \frac{x^4}{16} \right]_0^6 = 27 \text{ pulg}^3$$

El primer momento del área respecto al eje x es

$$Q_x = \int_{\mathscr{A}} y\, dA = \int_0^6 \left(\int_{x^2/4}^{3x/2} y\, dy \right) dx = \int_0^6 \frac{1}{2} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{9x^3}{12} - \frac{x^5}{80} \right]_0^6 = 32.4 \text{ pulg}^3$$

Por tanto, las coordenadas del centroide del área son

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{27}{9} = 3 \text{ pulg} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{32.4}{9} = 3.6 \text{ pulg} \qquad \textit{Respuesta}$$

Si se elige integrar primero sobre y, las integrales respectivas son las siguientes:

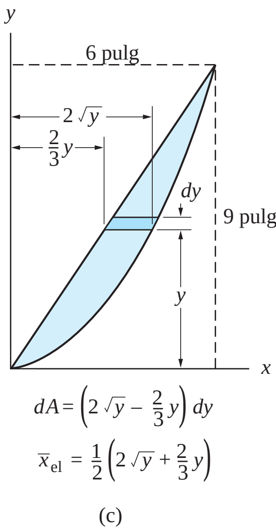
$$A = \int_{\mathcal{A}} dA = \int_0^9 \left(\int_{2y/3}^{2\sqrt{y}} dx \right) dy$$

$$Q_y = \int_{\mathcal{A}} x \, dA = \int_0^9 \left(\int_{2y/3}^{2\sqrt{y}} x \, dx \right) dy$$

$$Q_x = \int_{\mathcal{A}} y \, dA = \int_0^9 \left(\int_{2y/3}^{2\sqrt{y}} y \, dx \right) dy$$

Es buena idea verificar que la evaluación de estas integrales produzca las mismas coordenadas centroidales que las determinadas antes.

Parte 2 Integración simple: elemento de área diferencial horizontal



(c)

El elemento de área diferencial horizontal se muestra en la figura (c), junto con las expresiones para dA y $\bar{x}_{el}$. Para el área se tiene

$$A = \int_{\mathcal{A}} dA = \int_0^9 \left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3}\right) dy = \left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{3}\right]_0^9 = 9 \text{ pulg}^2$$

Utilizando $dQ_y = \bar{x}_{el} \, dA$ se obtiene

$$dQ_y = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{y} + \frac{2y}{3}\right)\left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3}\right) dy = \left(2y - \frac{2y^2}{9}\right) dy$$

El primer momento del área respecto al eje y se convierte en

$$Q_y = \int_0^9 \left(2y - \frac{2y^2}{9}\right) dy = \left[y^2 - \frac{2y^3}{27}\right]_0^9 = 27 \text{ pulg}^3$$

De manera similar, $dQ_x = y \, dA$ da

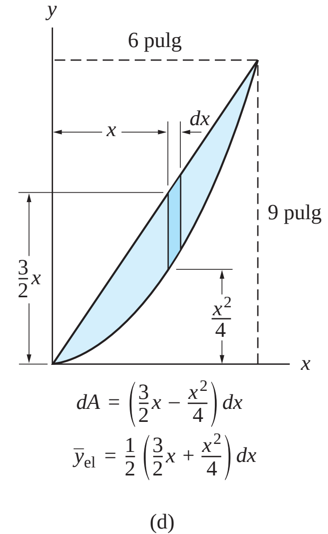
$$dQ_x = y\left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3}\right) dy = \left(2y^{3/2} - \frac{2y^2}{3}\right) dy$$

El primer momento respecto al eje x da

$$Q_x = \int_0^9 \left(2y^{3/2} - \frac{2y^2}{3}\right) dy = \left[\frac{4}{5}y^{5/2} - \frac{2y^3}{9}\right]_0^9 = 32.4 \text{ pulg}^3$$

Observe que A, Q_x y Q_y son idénticos a los valores calculados en la parte 1. Por tanto, las coordenadas del centroide del área también son las mismas.

Parte 3 Integración simple: elemento de área diferencial vertical



(d)

El elemento de área diferencial vertical se muestra en la figura (d), donde también se indican las expresiones para dA y $\bar{y}_{el}$. El área de la región es

$$A = \int_{\mathscr{A}} dA = \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right]_0^6 = 9 \text{ pulg}^2$$

Utilizando la información de la figura (d), se obtiene

$$dQ_y = x\, dA = x\left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

Por tanto, el primer momento respecto al eje y es

$$Q_y = \int_{\mathscr{A}} dQ_y = \int_0^6 \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{4}\right) dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{16}\right]_0^6 = 27 \text{ pulg}^3$$

Para $dQ_x = \bar{y}_{el}\, dA$, se obtiene

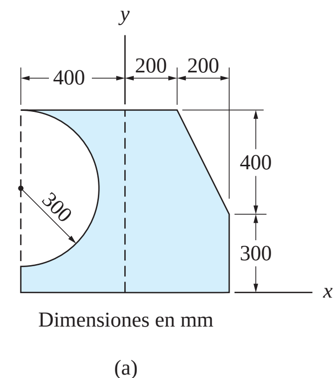
$$dQ_x = \frac{1}{2}\left(\frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16}\right) dx$$

La integración de esta expresión da

$$Q_x = \int_{\mathscr{A}} dQ_x = \int_0^6 \frac{1}{2}\left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{9x^3}{12} - \frac{x^5}{80}\right]_0^6 = 32.4 \text{ pulg}^3$$

De nuevo, los valores de A, Q_x y Q_y son los mismos que los obtenidos en las partes 1 y 2. Entonces $\bar{x}$ y $\bar{y}$ también serían idénticos.

Problema de ejemplo 8.2

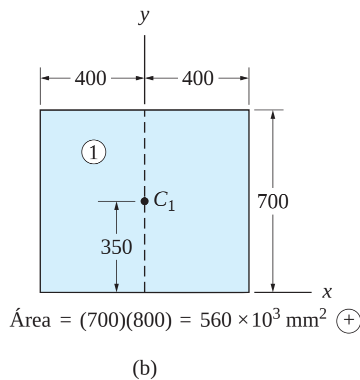


(a)

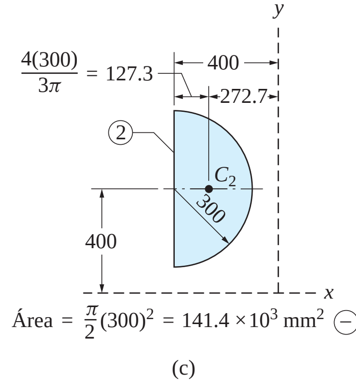
Utilizando el método de las áreas compuestas, determine la ubicación del centroide del área sombreada ilustrada en la figura (a).

Solución

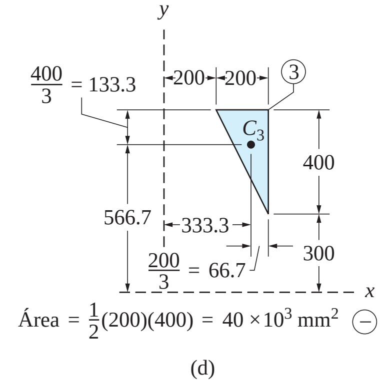
El área se puede considerar como un rectángulo, del cual se removieron un semicírculo y un triángulo. Las áreas y coordenadas centroidales para cada una de estas formas se pueden determinar consultando la tabla 8.1. Los resultados se muestran en las figuras (b) a (d).



(b)



(c)



(d)

Al aplicar el método de las áreas compuestas, es conveniente tabular los datos de la manera siguiente:

Forma	**Área A (mm^2)**	**$\bar{x}$ (mm)**	**$A\bar{x}$ (mm^3)**	**$\bar{y}$ (mm)**	**$A\bar{y}$ (mm^3)**
1 (Rectángulo)	$+560.0 \times 10^3$	0	0	+350	196.0×10^6
2 (Semicírculo)	-141.4×10^3	−272.7	$+38.56 \times 10^6$	+400	-56.56×10^6
3 (Triángulo)	-40.0×10^3	+333.3	-13.33×10^6	+566.7	-22.67×10^6
Σ	$+378.6 \times 10^3$	. . .	$+25.23 \times 10^6$	. . .	$+116.77 \times 10^6$

Asegúrese de comprender cada una de las anotaciones en esta tabla, poniendo atención a los signos. Para el rectángulo, A es positiva, $A\bar{x}$ es cero y $A\bar{y}$ es positiva. Al área del semicírculo se le asigna un valor negativo debido a que se debe restar del área del rectángulo. Como $\bar{x}$ para el semicírculo también es negativa, su $A\bar{x}$ también es positiva; sin embargo, $\bar{y}$ es positiva, de manera que $A\bar{y}$ es negativa. Al área del triángulo también se le asigna un valor negativo, pero $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son positivas, lo que resulta en valores negativos tanto para $A\bar{x}$ como para $A\bar{y}$.

De acuerdo con los resultados tabulados, las coordenadas del centroide del área compuesta son

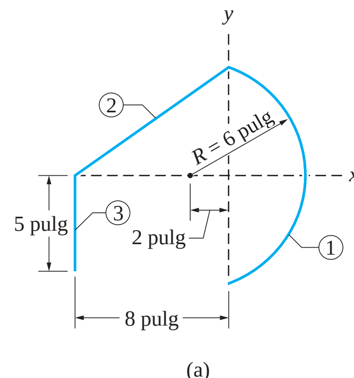
$$\bar{x} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A} = \frac{+25.23 \times 10^6}{+378.6 \times 10^3} = 66.6 \text{ mm} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = \frac{+116.77 \times 10^6}{+378.6 \times 10^3} = 308 \text{ mm} \qquad \textit{Respuesta}$$

Como $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son positivos, el centroide del área compuesta se encuentra en el primer cuadrante del plano coordenado.

Problema de ejemplo 8.3

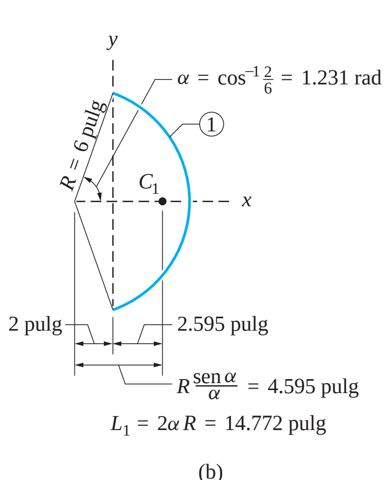
Utilizando el método de las curvas compuestas, determine las coordenadas centroidales de la línea en la figura (a) que consiste en el arco circular 1 y las líneas rectas 2 y 3.



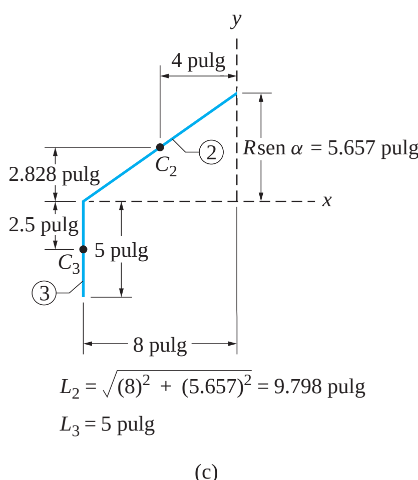
(a)

Solución

La longitud y las coordenadas centroidales del arco circular se pueden calcular consultando la tabla 8.2; los resultados se muestran en la figura (b). En la figura (c) se presentan las propiedades de los dos segmentos de línea recta; las coordenadas centroidales están en los puntos medios de los segmentos.



(b)



(c)

Es conveniente organizar el análisis en forma tabular, como se muestra:

Segmento	Longitud L (pulg)	$\bar{x}$ (pulg)	$L\bar{x}$ (pulg^2)	$\bar{y}$ (pulg)	$L\bar{y}$ (pulg^2)
1	14.772	+2.595	+38.33	0	0
2	9.798	−4.0	−39.19	+2.828	+27.71
3	5.0	−8.0	−40.0	−2.5	−12.50
Σ	29.570	···	−40.86	···	+15.21

Por tanto, las coordenadas del centroide de la curva compuesta son

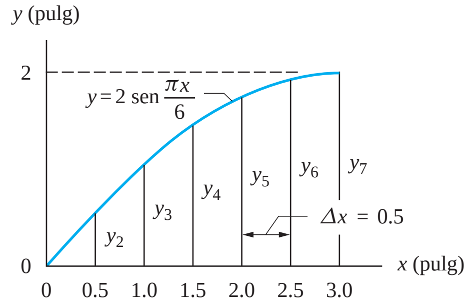
$$\bar{x} = \frac{\Sigma L\bar{x}}{\Sigma L} = \frac{-40.86}{29.570} = -1.382 \text{ pulg} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma L\bar{y}}{\Sigma L} = \frac{+15.21}{29.570} = +0.514 \text{ pulg} \qquad \textit{Respuesta}$$

Como $\bar{x}$ es negativa y $\bar{y}$ es positiva, el centroide de la curva compuesta se encuentra en el tercer cuadrante del plano coordenado.

Problema de ejemplo 8.4

Utilizando integración numérica (regla de Simpson), determine las coordenadas centroidales de la curva sinusoidal que se muestran en la figura. Utilice seis tableros, cada uno de ancho $\Delta x = 0.5$ pulg.



Solución

Con seis tableros, la regla de Simpson es (consulte el apéndice A)

$$\int_a^b f(x)\,dx = (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + 4f_6 + f_7)\frac{\Delta x}{3} \tag{a}$$

Las integrales que se deben evaluar están dadas por las ecuaciones (8.4) y (8.5):

$$L = \int_{\mathscr{L}} ds \qquad Q_y = \int_{\mathscr{L}} x\,ds \qquad Q_x = \int_{\mathscr{L}} y\,ds \tag{b}$$

Sustituyendo $ds = (ds/dx)\,dx$, las integrales en las ecuaciones (b) toman la forma

$$L = \int_{\mathscr{L}} \left(\frac{ds}{dx}\right) dx \quad Q_y = \int_{\mathscr{L}} \left(x\frac{ds}{dx}\right) dx \quad Q_x = \int_{\mathscr{L}} \left(y\frac{ds}{dx}\right) dx \tag{c}$$

Para nuestro problema, las integrales en las ecuaciones (c) se deben calcular con la regla de Simpson utilizando $n = 6$ y $\Delta x = 0.5$ pulg. Los valores de y_i y $(ds/dx)_i$ se pueden obtener a partir de la secuencia de cálculos siguiente (consulte la figura 8.5).

$$y_i = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi x_i}{6} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi x_i}{6} \qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)_i = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i^2}$$

Los cálculos numéricos resultantes se muestran en la tabla siguiente.

i	***x* (pulg)**	***y* (pulg)**	***dy/dx***	***ds/dx***	***x(ds/dx)* (pulg)**	***y(ds/dx)* (pulg)**
1	0.0	0.0000	1.0472	1.4480	0.0000	0.0000
2	0.5	0.5176	1.0115	1.4224	0.7112	0.7363
3	1.0	1.0000	0.9069	1.3500	1.3500	1.3500
4	1.5	1.4142	0.7405	1.2443	1.8665	1.7597
5	2.0	1.7321	0.5236	1.1288	2.2576	1.9551
6	2.5	1.9319	0.2710	1.0361	2.5902	2.0016
7	3.0	2.0000	0.0000	1.0000	3.0000	2.0000

Sustituyendo los valores de esta tabla en la ecuación (a) da

$$L \approx \frac{0.5}{3}[1(1.4480) + 4(1.4224) + 2(1.3500) + 4(1.2443) + 2(1.1288)$$

$$+ 4(1.0361) + 1(1.0000)] = 3.7028 \text{ pulg}$$

$$Q_y \approx \frac{0.5}{3}[1(0) + 4(0.7112) + 2(1.3500) + 4(1.8665) + 2(2.2576)$$

$$+ 4(2.5902) + 1(3.0000)] = 5.1478 \text{ pulg}^2$$

$$Q_x \approx \frac{0.5}{3}[1(0) + 4(0.7363) + 2(1.3500) + 4(1.7597) + 2(1.9551)$$

$$+ 4(2.0016) + 1(2.0000)] = 4.4334 \text{ pulg}^2$$

de donde se obtiene

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{L} = \frac{5.1478}{3.7028} = 1.390 \text{ pulg}$$ *Respuesta*

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{L} = \frac{4.4334}{3.7028} = 1.197 \text{ pulg}$$ *Respuesta*

Problemas

8.1-8.6 Mediante integración determine las coordenadas del centroide de la región plana indicada.

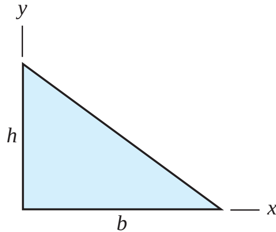


Fig. P8.1

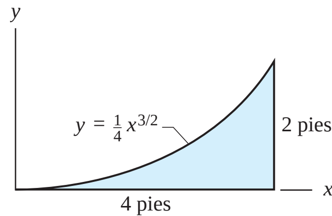


Fig. P8.2

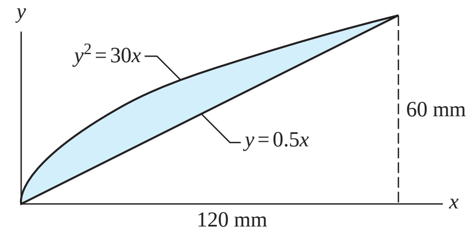


Fig. P8.3

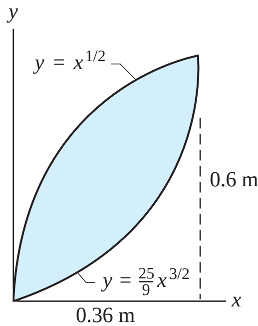


Fig. P8.4

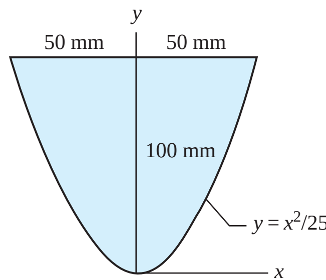


Fig. P8.5

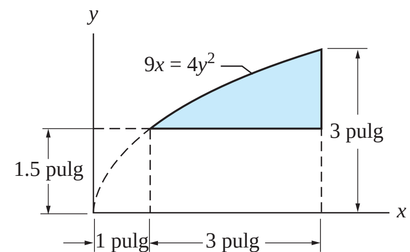


Fig. P8.6

8.7 (a) Utilizando integración ubique el centroide del área bajo la parábola de n-ésimo orden en términos de b, h y n (n es un entero positivo). (b) Compruebe el resultado de la parte (a) con la tabla 8.1 para el caso $n = 2$.

8.8 Mediante integración calcule las coordenadas del centroide del triángulo. Compruebe sus resultados con la tabla 8.1.

8.9 Determine la coordenada y del centroide del segmento semicircular, si $a = 18$ pulg y $\alpha = 45°$.

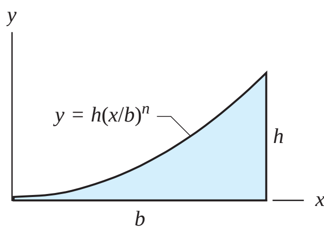


Fig. P8.7

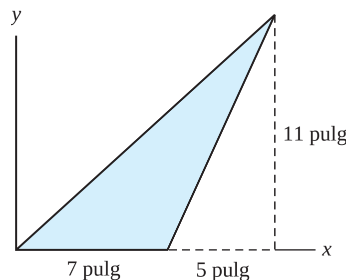


Fig. P8.8

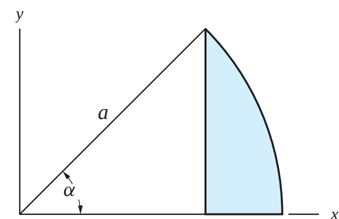


Fig. P8.9

8.10 (a) Mediante integración ubique el centroide de la región sombreada en términos de R y t. (b) Demuestre que cuando $t \rightarrow 0$ el resultado de la parte (a) concuerda con el indicado en la tabla 8.2 para un arco de un cuarto de círculo.

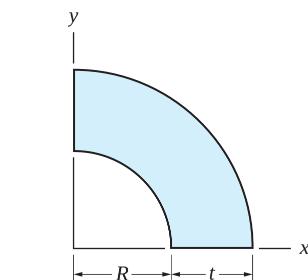


Fig. P8.10

8.11 Ubique el centroide de la parábola mediante integración.

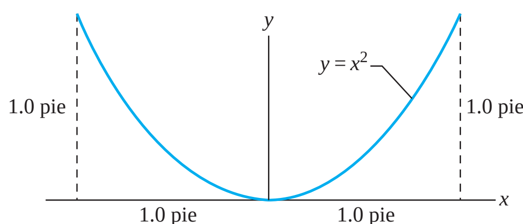


Fig. P8.11

8.12 Mediante integración ubique el centroide del arco de un cuarto de círculo.

***8.13** Las ecuaciones paramétricas de la curva plana conocida como cicloide son $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$ y $y = a(1 - \cos\theta)$. Mediante integración encuentre las coordenadas del centroide del cicloide obtenidas variando θ de 0 a 2π rad.

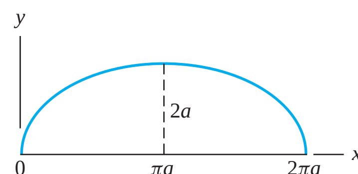


Fig. P8.13

8.14-8.21 Aplique el método de las áreas compuestas para calcular las coordenadas centroidales de las regiones planas ilustradas.

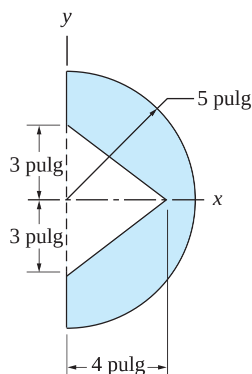


Fig. P8.14

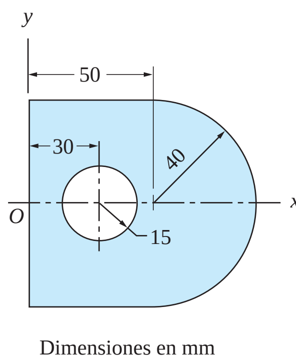


Fig. P8.15

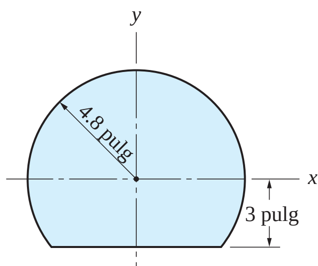


Fig. P8.16

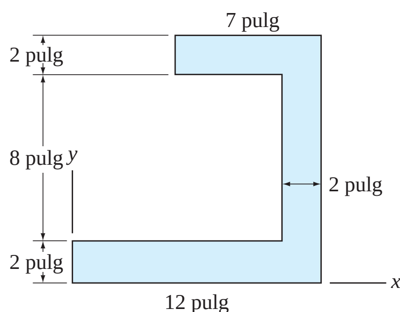


Fig. P8.17

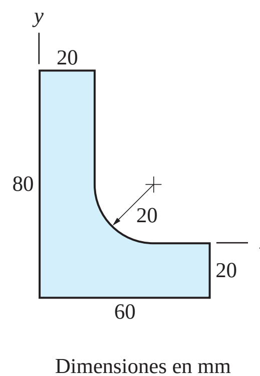


Fig. P8.18

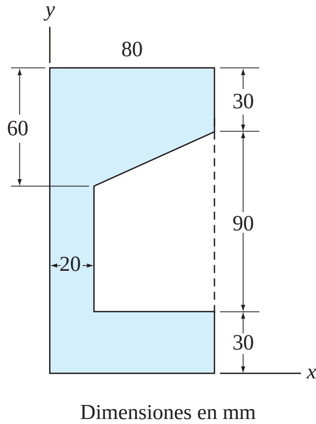


Fig. P8.19

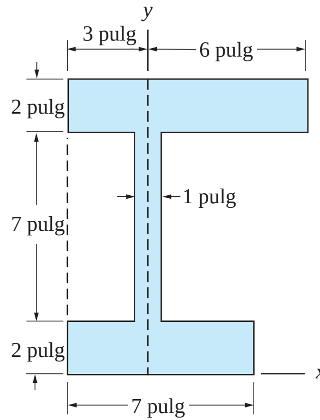


Fig. P8.20

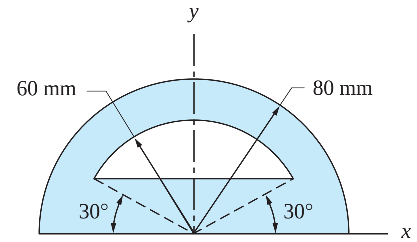


Fig. P8.21

8.22 La región plana está limitada por un semicírculo de radio R y una parábola de altura h. Determine la relación entre R y h para la cual el centroide de la región está en C. Utilice el método de las áreas compuestas.

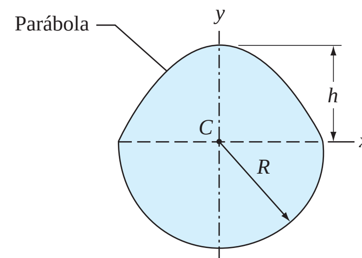


Fig. P8.22

8.23 El centroide de la región plana ilustrada está en C. Aplique el método de las áreas compuestas para determinar el radio R del corte semicircular.

8.24 Calcule las coordenadas centroidales de la región en forma de L en términos de b y t aplicando el método de las áreas compuestas.

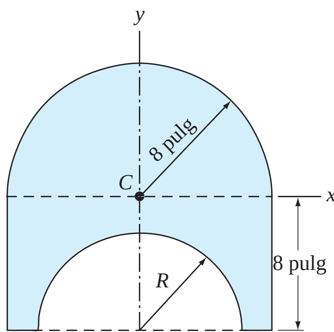


Fig. P8.23

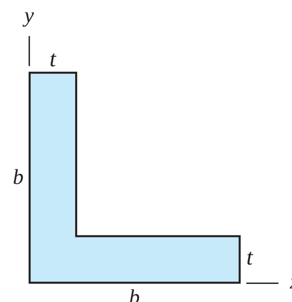


Fig. P8.24

8.25 Aplicando el método de las áreas compuestas, deduzca la expresión para la coordenada x centroidal del segmento circular en términos de R y α.

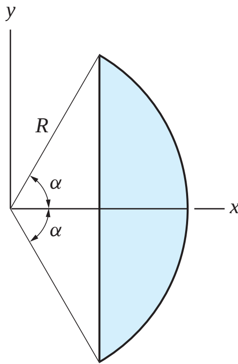


Fig. P8.25

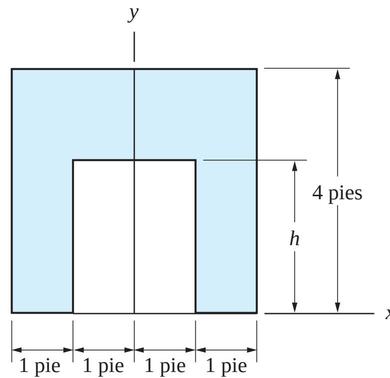


Fig. P8.26

8.26 Con el método de las áreas compuestas, encuentre la dimensión h que maximiza la coordenada centroidal $\bar{y}$ de la región plana ilustrada. Además, calcule el valor correspondiente de $\bar{y}$.

8.27 Si el centroide de la región plana se encuentra en C, encuentre el radio R. Utilice el método de las áreas compuestas.

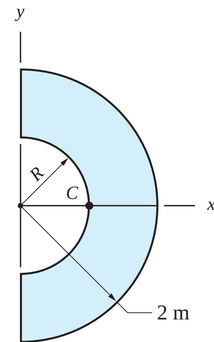


Fig. P8.27

8.28-8.33 Utilizando el método de las áreas compuestas, ubique los centroides de las curvas planas ilustradas.

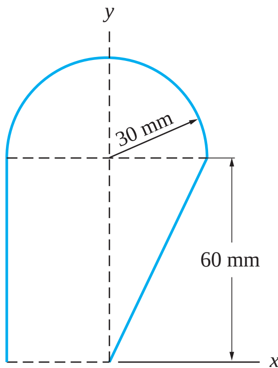


Fig. P8.28

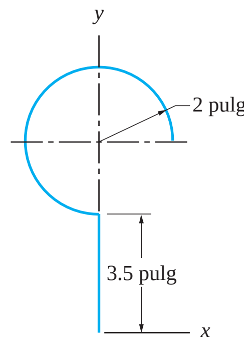


Fig. P8.29

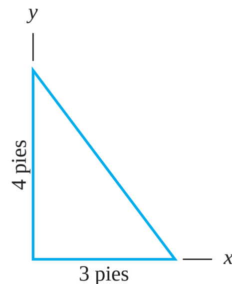


Fig. P8.30

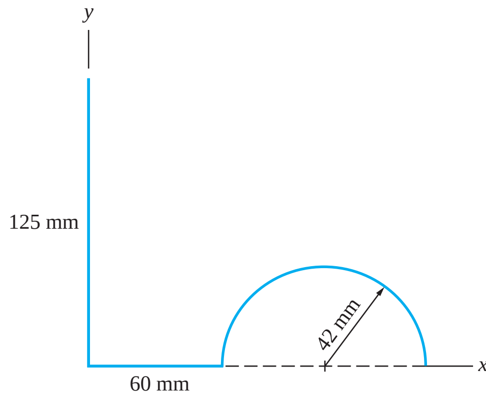


Fig. P8.31

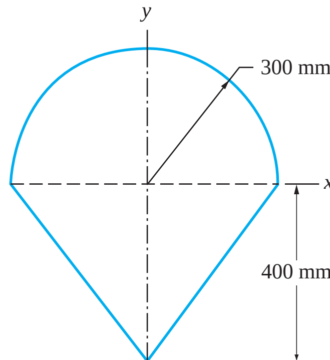


Fig. P8.32

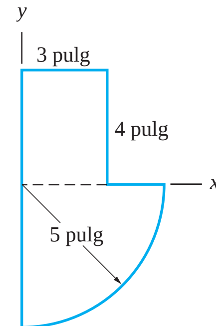


Fig. P8.33

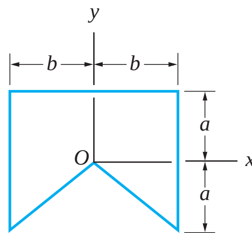


Fig. P8.34

8.34 Determine la relación a/b para la cual el centroide de la curva compuesta estará ubicado en el punto O.

8.35 Mediante integración numérica ubique el centroide de la región plana simétrica.

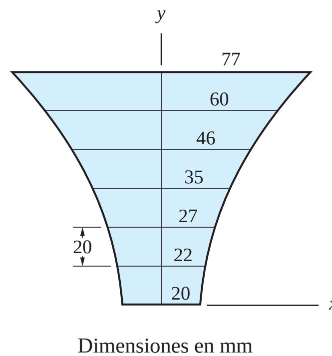


Fig. P8.35

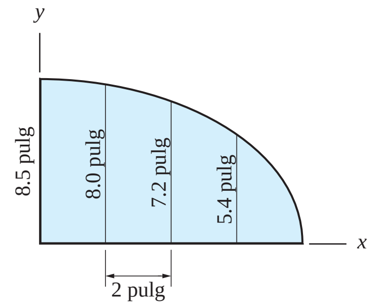


Fig. P8.36

8.36 Determine las coordenadas centroidales de la región plana mediante integración numérica.

8.37 Calcule la coordenada y del centroide de la parábola ilustrada, de la cual su ecuación es $y = 40(1 - x^2/3600)$, donde x y y están en pulgadas. Utilice integración numérica con $\Delta x = 15$ pulg.

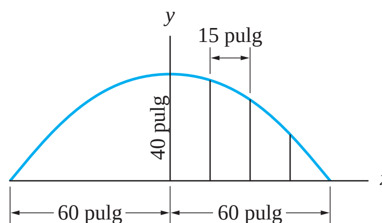


Fig. P8.37

8.38 La ecuación de la catenaria ilustrada es $y = 100 \cosh(x/100)$ donde x y y están medidas en pies (la catenaria es la forma de un cable suspendido entre dos puntos). Ubique la coordenada y del centroide de la catenaria mediante integración numérica empleando $\Delta x = 25$ pies.

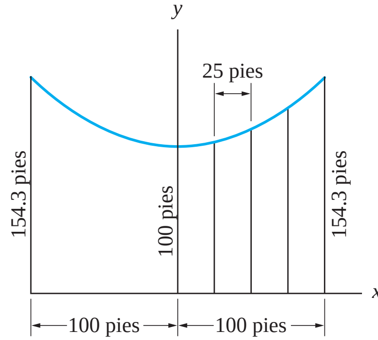


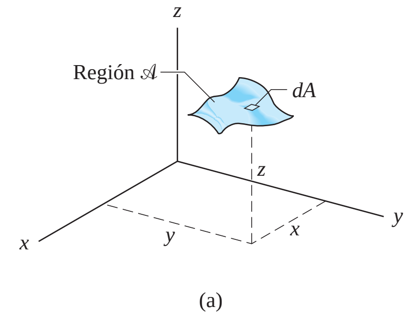
Fig. P8.38

8.3 Centroides de superficies curvas, volúmenes y curvas espaciales

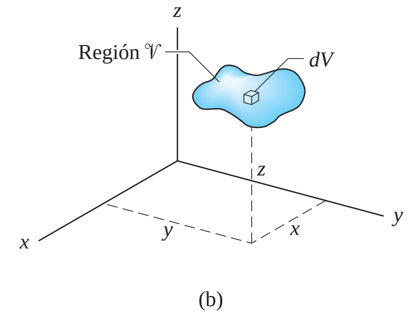
Los centroides de superficies curvas, volúmenes y curvas espaciales se definen por expresiones que son análogas a las utilizadas para regiones planas. La única diferencia es que se necesitan tres coordenadas, en vez de dos, para ubicar los centroides para formas tridimensionales. En la tabla siguiente se dan las expresiones que definen las coordenadas centroidales para varias formas tridimensionales.

Superficie curva que ocupa una región $\mathscr{A}$	**Volumen que ocupa una región $\mathscr{V}$**	**Curva espacial $\mathscr{L}$**
Fig. 8.7(a)	Fig. 8.7(b)	Fig. 8.7(c)
Área $A = \int_{\mathscr{A}} dA$	Volumen $V = \int_{\mathscr{V}} dV$	Longitud $L = \int_{\mathscr{L}} ds$
$\bar{x} = \dfrac{\int_{\mathscr{A}} x\, dA}{A}$	$\bar{x} = \dfrac{\int_{\mathscr{V}} x\, dV}{V}$	$\bar{x} = \dfrac{\int_{\mathscr{L}} x\, ds}{L}$
$\bar{y} = \dfrac{\int_{\mathscr{A}} y\, dA}{A}$	$\bar{y} = \dfrac{\int_{\mathscr{V}} y\, dV}{V}$	$\bar{y} = \dfrac{\int_{\mathscr{L}} y\, ds}{L}$
$\bar{z} = \dfrac{\int_{\mathscr{A}} z\, dA}{A}$	$\bar{z} = \dfrac{\int_{\mathscr{V}} z\, dV}{V}$	$\bar{z} = \dfrac{\int_{\mathscr{L}} z\, ds}{L}$

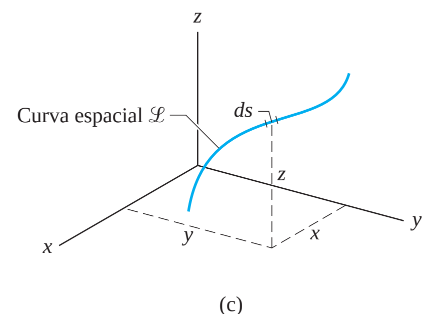
(8.10)



(a)



(b)



(c)

Fig. 8.7

El término $\int_{\mathscr{A}} x\, dA$ en ocasiones se designa Q_{yz} y se le refiere como *primer momento del área relativa al plano yz*. De manera similar, $Q_{xz} = \int_{\mathscr{A}} y\, dA$ y $Q_{xy} = \int_{\mathscr{A}} z\, dA$ se denominan *primeros momentos del área relativos a los planos xz y xy*, respectivamente. Las extensiones de esta notación y terminología a volúmenes y curvas espaciales son obvias.

En las definiciones de las ecuaciones (8.10) se supone que el elemento diferencial (dA, dV o ds) está ubicado en el punto que tiene coordenadas x, y o z. Para otras elecciones de elementos, como las que ocurren en la integración simple o doble, puede ser necesario remplazar x, y o z en las ecuaciones (8.10) por las coordenadas centroidales del elemento: $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$, $\bar{z}_{el}$. Como este procedimiento de integración es similar al descrito en el apartado 8.2, no se repetirá aquí.

La simetría de un cuerpo puede tener un efecto importante en la determinación de su centroide, como se explica a continuación:

- *Si un volumen tiene una simetría plana, su centroide se encuentra en ese plano*. (El enunciado análogo para áreas planas ya se demostró en el apartado 8.2; la demostración para volúmenes en esencia es la misma.)
- *Si un volumen tiene dos planos de simetría que se intersecan a lo largo de una línea, su centroide se encuentra en esa línea*. (La demostración de este enunciado se deduce directamente del argumento sobre simetría anterior.)

  Este argumento sobre simetría es útil al determinar los centroides de volúmenes de revolución. Por ejemplo, considere el volumen que se muestra en la figura 8.8 que se genera girando un área plana respecto al eje y. Como cualquier plano que contiene el eje y es un plano de simetría, el centroide C del volumen se debe encontrar en el eje y; es decir, $\bar{x} = 0$ y $\bar{z} = 0$.
- *El centroide del volumen de un cuerpo prismático está ubicado en el centroide del área del apartado transversal que forma el plano medio del volumen*.

  Para demostrar este enunciado, considere la figura 8.9, en donde se muestra un cuerpo prismático de espesor h que ocupa la región $\mathcal{V}$. El plano de coordenadas xy coincide con el plano medio del cuerpo y el eje z es el eje centroidal (pasa por los centroides de las áreas de las secciones transversales). El enunciado anterior se demostrará si se puede demostrar que el origen del sistema de coordenadas es el centroide C del cuerpo; es decir, si se puede demostrar que $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$. No hay duda que C se encuentra en el plano xy ($\bar{z} = 0$), debido a que es el plano de simetría. Para demostrar que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, es suficiente demostrar que $\int_{\mathcal{V}} y\,dV = \int_{\mathcal{V}} x\,dV = 0$. Utilizando el elemento diferencial de volumen $dV = h\,dA$ que se muestra en la figura 8.9, se obtiene $\int_{\mathcal{V}} y\,dV = \int_{\mathcal{A}} y\,(h\,dA) = h\int_{\mathcal{A}} y\,dA = 0$, donde $\mathcal{A}$ es la región plana del apartado transversal. La última igualdad se deduce del hecho que $\int_{\mathcal{A}} y\,dA = 0$ si y se mide desde el centroide del área del apartado transversal. Se puede demostrar de una manera similar que $\int_{\mathcal{A}} x\,dA = 0$.

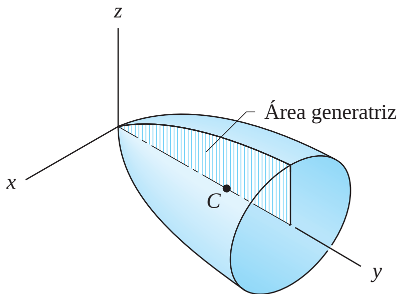


Fig. 8.8

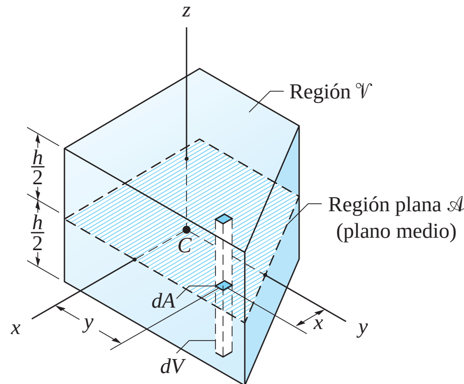


Fig. 8.9

Se pueden utilizar argumentos similares para ubicar los centroides de superficies y curvas planas. Por ejemplo, si se conocen las coordenadas centroidales de un arco semicircular, como el que se ilustra en la figura 8.10(a), de inmediato se pueden deducir las coordenadas centroidales de la superficie de la mitad del cilindro ilustrado en la figura 8.10(b).

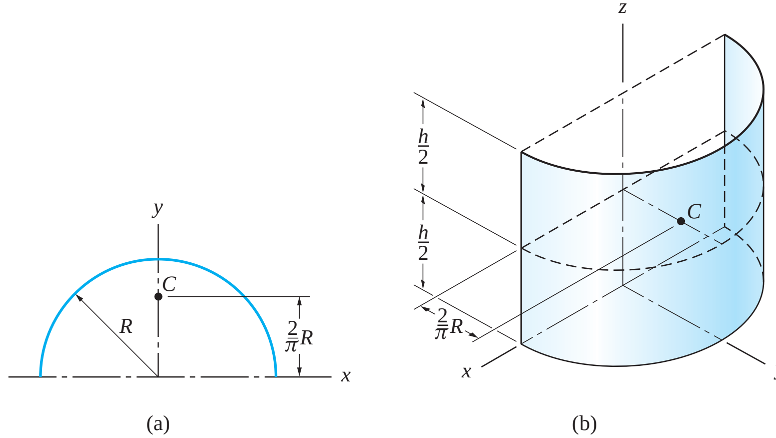


Fig. 8.10

El método de las formas compuestas también se aplica a superficies curvas, volúmenes y curvas espaciales. Las expresiones para las coordenadas centroidales de superficies compuestas y curvas se pueden obtener ampliando las ecuaciones (8.8) y (8.9) a tres dimensiones. Las ecuaciones para volúmenes compuestos se pueden escribir por analogía con las áreas compuestas. Los resultados son

Áreas compuestas

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_i A_i \bar{x}_i}{\Sigma_i A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma_i A_i \bar{y}_i}{\Sigma_i A_i} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma_i A_i \bar{z}_i}{\Sigma_i A_i} \tag{8.11}$$

Volúmenes compuestos

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_i V_i \bar{x}_i}{\Sigma_i V_i} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma_i V_i \bar{y}_i}{\Sigma_i V_i} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma_i V_i \bar{z}_i}{\Sigma_i V_i} \tag{8.12}$$

Curvas compuestas

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_i L_i \bar{x}_i}{\Sigma_i L_i} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma_i L_i \bar{y}_i}{\Sigma_i L_i} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma_i L_i \bar{z}_i}{\Sigma_i L_i} \tag{8.13}$$

Observe que estas expresiones son idénticas a las ecuaciones (8.10), excepto que las integraciones se remplazaron por sumatorias.

A fin de facilitar la aplicación de las ecuaciones (8.11) y (8.12), en las tablas 8.3 y 8.4 se presentan las propiedades de algunas superficies y volúmenes básicos.

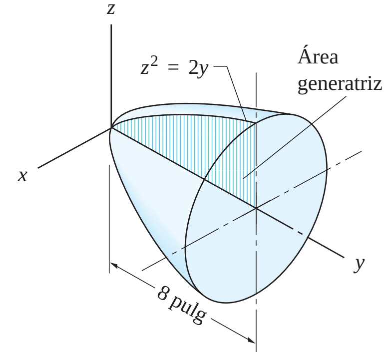
Tetraedro recto $\bar{x} = \frac{1}{4}a \quad \bar{y} = \frac{1}{4}b \quad \bar{z} = \frac{1}{4}h \quad V = \frac{1}{6}abh$	Pirámide $\bar{z} = \frac{3}{4}h \quad V = \frac{1}{3}abh$
Cono $\bar{z} = \frac{3}{4}h \quad V = \frac{\pi}{3}R^2h$	Hemisferio $\bar{z} = \frac{5}{8}R \quad V = \frac{2\pi}{3}R^3$
Semielipsoide de revolución $\bar{z} = \frac{5}{8}h \quad V = \frac{2\pi}{3}R^2h$	Paraboloide de revolución $\bar{z} = \frac{2}{3}h \quad V = \frac{\pi}{2}R^2h$

Tabla 8.3 Centroides de volúmenes

Superficie cónica $\bar{z} = \frac{2}{3}h \quad A = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$
Superficie hemisférica $\bar{z} = \frac{1}{2}R \quad A = 2\pi R^2$

Tabla 8.4 Centroides de superficies

Problema de ejemplo 8.5



(a)

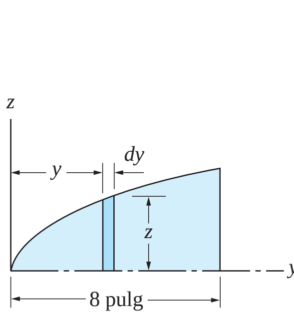
Determine las coordenadas centroidales del volumen que se muestra en la figura (a), el cual se genera girando el área bajo la curva $z^2 = 2y$ respecto al eje y. Las coordenadas se miden en pulgadas.

Solución

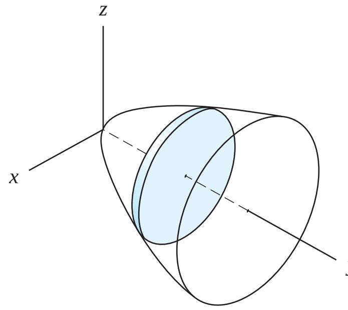
Por simetría, $\bar{x} = \bar{z} = 0$. Para encontrar $\bar{y}$ se debe utilizar integración. Hay dos técnicas de integración simple convenientes para volúmenes de revolución; el método de discos delgados y el de cascarones delgados.

Método I: Discos delgados

En este método, un elemento diferencial del área generatriz es la franja vertical que se muestra en la figura (b). Cuando el área generatriz se gira respecto al eje y para formar el volumen de revolución, el elemento diferencial de área genera el disco delgado de espesor dy y radio z que se muestra en la figura (c). Así pues, las propiedades del volumen se pueden determinar integrando las propiedades del disco.



(b)



(c)

El volumen del disco es

$$dV = \pi z^2\, dy = 2\pi y\, dy$$

Integrando para determinar el volumen V, se obtiene

$$V = 2\pi \int_0^8 y\, dy = 2\pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^8 = 64\pi \text{ pulg}^3$$

Como la distancia desde el disco hasta el plano xz es y, el primer momento correspondiente es $dQ_{xz} = y\, dV$, que al sustituir la expresión para dV se convierte en

$$dQ_{xz} = y(2\pi y\, dy) = 2\pi y^2\, dy$$

La integración produce para el primer momento del volumen

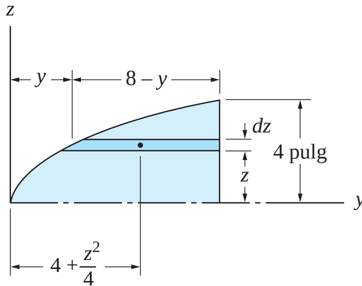
$$Q_{xz} = 2\pi \int_0^8 y^2\, dy = 2\pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^8 = 341\pi \text{ pulg}^4$$

Por tanto, las coordenadas centroidales del volumen son

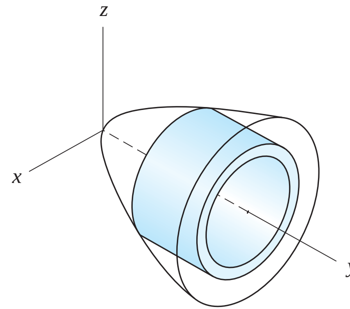
$$\bar{y} = \frac{Q_{xz}}{V} = \frac{341\pi}{64\pi} = 5.33 \text{ pulg} \qquad \bar{x} = \bar{z} = 0 \qquad \textit{Respuesta}$$

Método II: Cascarones delgados

En este método, un elemento diferencial del área generatriz es la franja horizontal que se muestra en la figura (d). La rotación respecto al eje *y* genera un cascarón de espesor infinitesimal *dz*, como se muestra en la figura (e).



(d)



(e)

El volumen del cascarón delgado (circunferencia × espesor × longitud) es

$$dV = 2\pi z\, dz\,(8 - y) = 2\pi z \left(8 - \frac{z^2}{2}\right) dz = !\,(16z - z^3)\, dz$$

Observando que el intervalo de z es de 0 a 4 pulg, el volumen está dado por

$$V = \pi \int_0^4 (16z - z^3)\, dz = \pi \left[8z^2 - \frac{z^4}{4}\right]_0^4 = 64\pi \text{ pulg}^3$$

Con referencia a la figura (d), se observa que la coordenada *y* del centroide del cascarón delgado es $\bar{y}_{\text{el}} = y + (8 - y)/2 = 4 + (y/2) = 4 + (z^2/4)$ y su primer momento respecto al plano *xz* es entonces

$$dQ_{xz} = \bar{y}_{\text{el}}\, dV = \left(4 + \frac{z^2}{4}\right) !\,(16z - z^3)\, dz = \pi \left(64z - \frac{z^5}{4}\right) dz$$

Por tanto, se obtiene

$$Q_{xz} = \pi \int_0^4 \left(64z - \frac{z^5}{4}\right) dz = \pi \left[32z^2 - \frac{z^6}{24}\right]_0^4 = 341\pi \text{ pulg}^4$$

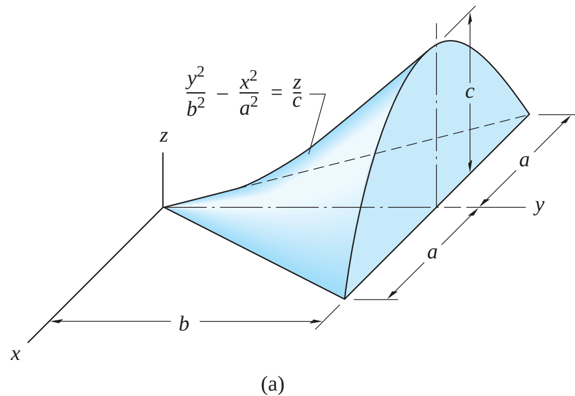
y las coordenadas centroidales del volumen son

$$\bar{y} = \frac{Q_{xz}}{V} = \frac{341\pi}{64\pi} = 5.33 \text{ pulg} \qquad \bar{x} = \bar{z} = 0 \qquad \textit{Respuesta}$$

Por supuesto, estas respuestas son idénticas a las que se obtuvieron mediante el método de discos delgados.

Problema de ejemplo **8.6**

Ubique el centroide del paraboloide hiperbólico que se muestra en la figura (a) utilizando: 1. integración simple con un elemento diferencial de volumen paralelo al plano xz y 2. integración doble. La ecuación de la superficie que limita el volumen es $(y^2/b^2) - (x^2/a^2) = z/c$.



(a)

Solución

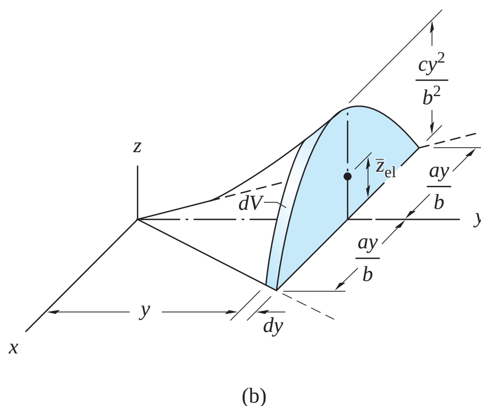
Observando que $\bar{x} = 0$ por simetría, se ve que sólo se necesita integrar para encontrar $\bar{y}$ y $\bar{z}$.

Parte 1: Integración simple

Las dimensiones de un elemento diferencial de volumen dV, paralelo al plano xz, se muestran en la figura (b). Como el apartado transversal del elemento es una parábola, se puede consultar la tabla 8.1 para determinar dV y $\bar{z}_{el}$ (el volumen y la coordenada centroidal del elemento).

$$dV = \frac{2}{3}\left(2\frac{a}{b}y\right)\left(\frac{cy^2}{b^2}\right) dy = \frac{4}{3}\frac{ac}{b^3}y^3\, dy$$

$$\bar{z}_{el} = \frac{2}{5}\frac{cy^2}{b^2}$$



(b)

Como los límites de integración son $y = 0$ y $y = b$, el volumen es

$$V = \int_{\mathcal{V}} dV = \frac{4}{3}\frac{ac}{b^3}\int_0^b y^3\,dy = \frac{abc}{3}$$

y los primeros momentos respecto a los planos xz y xy son

$$Q_{xz} = \int_{\mathcal{V}} y\,dV = \frac{4}{3}\frac{ac}{b^3}\int_0^b y^4\,dy = \frac{4ab^2c}{15}$$

$$Q_{xy} = \int_{\mathcal{V}} \bar{z}_{\text{el}}\,dV = \left(\frac{4}{3}\frac{ac}{b^3}\right)\left(\frac{2}{5}\frac{c}{b^2}\right)\int_0^b y^5\,dy = \frac{4abc^2}{45}$$

Por tanto, las coordenadas centroidales del paraboloide hiperbólico son

$$\bar{x} = 0$$

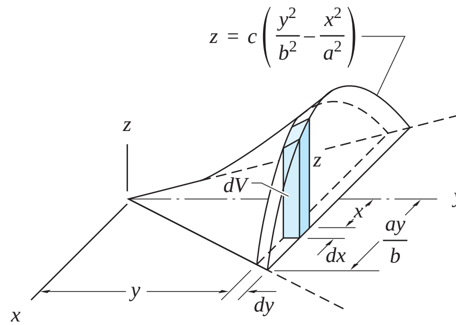
$$\bar{y} = \frac{Q_{xz}}{V} = \frac{4ab^2c/15}{abc/3} = \frac{4b}{5}$$ *Respuesta*

$$\bar{z} = \frac{Q_{xy}}{V} = \frac{4abc^2/45}{abc/3} = \frac{4c}{15}$$

Parte 2: Integración doble

Utilizando el elemento diferencial doble de volumen que se muestra en la figura (c), se tiene

$$dV = z\,dx\,dy \qquad \bar{z}_{\text{el}} = \frac{z}{2}$$



(c)

Si se elige integrar primero sobre x, luego sobre y y partiendo del hecho de que el volumen es simétrico con respecto al plano yz, se tiene

$$V = \int_{\mathcal{V}} dV = 2\int_0^b \left(\int_0^{ay/b} z\,dx\right) dy$$

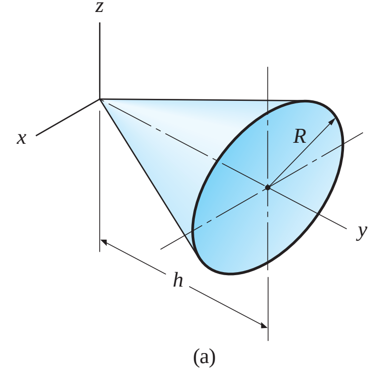
$$Q_{xz} = \int_{\mathcal{V}} y\,dV = 2\int_0^b \left(\int_0^{ay/b} yz\,dx\right) dy$$

$$Q_{xy} = \int_{\mathcal{V}} \bar{z}_{\text{el}}\,dV = 2\int_0^b \left(\int_0^{ay/b} \frac{z}{2}z\,dx\right) dy$$

Sustituyendo $z = c[(y^2/b^2) - (x^2/a^2)]$ en las expresiones anteriores y realizando las integraciones se obtienen los mismos resultados que se encontraron en la parte 1.

Problema de ejemplo 8.7

Ubique el centroide de la superficie cónica que se muestra en la figura (a).



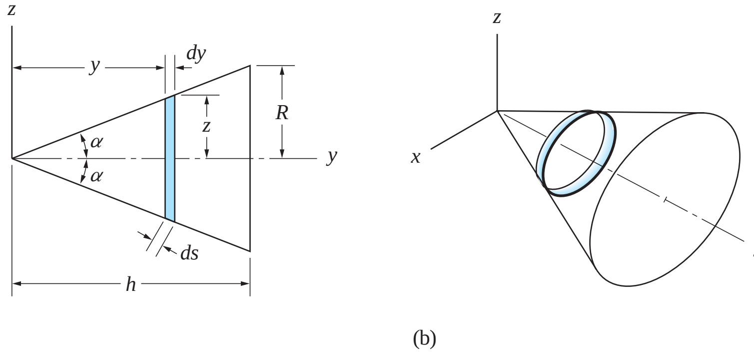
(a)

Solución

Por simetría, se ve que $\bar{x} = \bar{z} = 0$. Como la superficie cónica es una superficie de revolución, para calcular $\bar{y}$ se puede utilizar integración simple.

Como se muestra en la figura (b), el elemento diferencial de área se tomó como el área del "anillo", técnicamente conocido como *cono truncado*, que se genera girando el segmento de línea de longitud diferencial ds respecto al eje y. El área de este elemento diferencial (circunferencia × altura inclinada) es

$$dA = 2\pi z\, ds$$



(b)

Si 2α es el ángulo del cono como se muestra en la figura (b), se tiene que $z = y \tan\alpha$ y $ds = dy/\cos\alpha$. Sustituyendo estas identidades, junto con $\tan\alpha = R/h$ y $\cos\alpha = h/\sqrt{R^2 + h^2}$, en las expresiones para el área diferencial, se obtiene

$$dA = \frac{2\pi R\sqrt{R^2 + h^2}}{h^2}\, y\, dy$$

Integrando para encontrar el área de la superficie cónica, se obtiene

$$A = \frac{2\pi R\sqrt{R^2 + h^2}}{h^2}\int_0^h y\, dy = \frac{2\pi R\sqrt{R^2 + h^2}}{h^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h$$
$$= \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$

De la figura (b), se observa que y es la distancia desde el plano xz hasta el elemento diferencial de área. Por tanto, su primer momento relativo al plano es $dQ_{xz} = y\, dA$. Sustituyendo la expresión determinada antes para dA, e integrando, el primer momento de la superficie cónica es

$$Q_{xz} = \frac{2\pi R\sqrt{R^2 + h^2}}{h^2}\int_0^h y^2\, dy = \frac{2\pi R\sqrt{R^2 + h^2}}{h^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \frac{2}{3}\pi Rh\sqrt{R^2 + h^2}$$

Por tanto, las coordenadas centroidales de la superficie cónica son

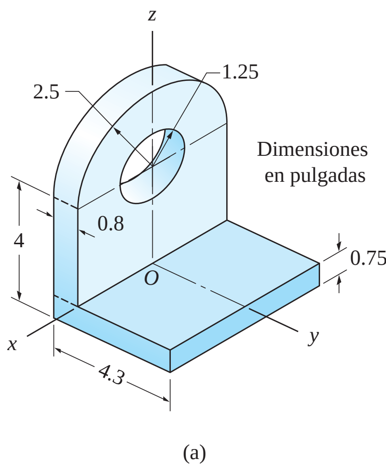
$$\bar{x} = \bar{z} = 0 \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{Q_{xz}}{A} = \frac{(2/3) \quad Rh\sqrt{R^2 + h^2}}{\pi R\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{2h}{3}$$

Observe que estos resultados concuerdan con los datos dados en la tabla 8.4 para una superficie cónica.

Problema de ejemplo **8.8**

Utilice el método de los volúmenes compuestos para determinar la ubicación del centroide del volumen para la parte de una máquina que se muestra en la figura (a).

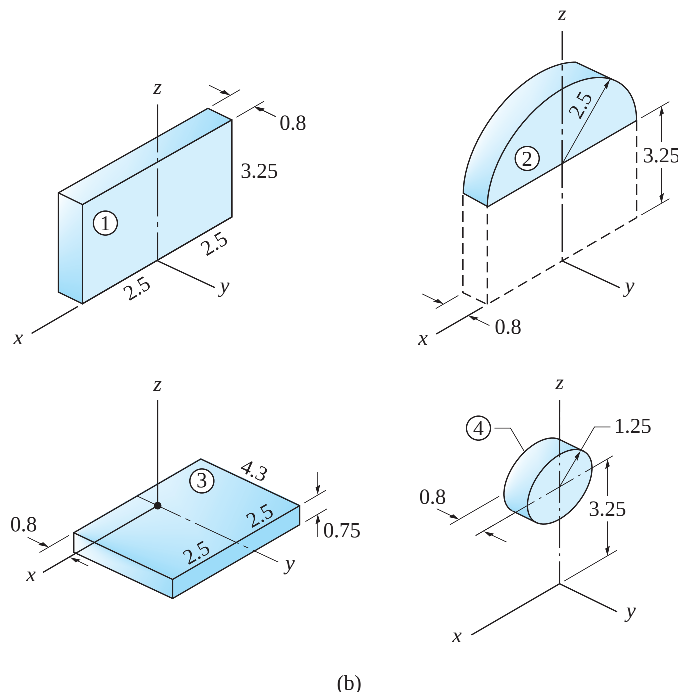


(a)

Solución

Se observa que $\bar{x} = 0$ debido a que el plano yz es un plano de simetría del volumen.

Para calcular $\bar{y}$ y $\bar{z}$, la parte de la máquina se puede considerar que está compuesta de los cuatro volúmenes que se ilustran en la figura (b); el sólido rectangular 1, más el semicilindro 2, más el sólido rectangular 3, menos el cilindro 4. La mayoría de las coordenadas centroidales de estos volúmenes se pueden determinar por simetría; sólo $\bar{z}$ del volumen 2 se debe encontrar consultando la tabla 8.1.



(b)

Los cálculos de los volúmenes y primeros momentos relativos a los planos *xy* y *xz* se muestran en la tabla siguiente:

Parte	**Volumen V (pulg^3)**	**$\bar{y}$ (pulg)**	**$V\bar{y}$ (pulg^4)**	**$\bar{z}$ (pulg)**	**$V\bar{z}$ (pulg^4)**
1	$5(3.25)(0.8) = 13.000$	-0.40	-5.20	$+\dfrac{3.25}{2} = +1.625$	$+21.13$
2	$\dfrac{\pi(2.5)^2}{2}(0.8) = 7.854$	-0.40	-3.14	$+3.25 + \dfrac{4(2.5)}{3\pi} = +4.311$	$+33.86$
3	$5(4.30)(0.75) = 16.125$	$+\dfrac{4.30}{2} - 0.80 = +1.35$	$+21.77$	$-\dfrac{0.75}{2} = -0.375$	-6.05
4	$-\pi(1.25)^2(0.80) = -3.927$	-0.40	$+1.57$	$+3.250$	-12.76
Σ	33.052	$\cdots$	$+15.00$	$\cdots$	$+36.18$

Utilizando los resultados presentados en la tabla, las coordenadas centroidales de la parte de máquina son

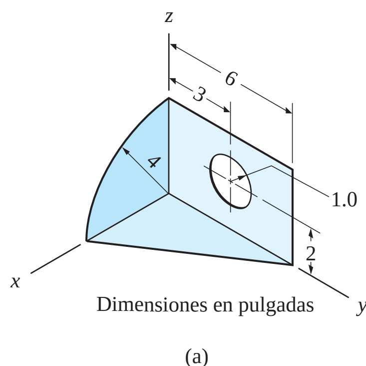
$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma V\bar{y}}{V} = \frac{15.00}{33.05} = 0.454 \text{ pulg}$$ *Respuesta*

$$\bar{z} = \frac{\Sigma V\bar{z}}{V} = \frac{36.18}{33.05} = 1.095 \text{ pulg}$$

Problema de ejemplo 8.9

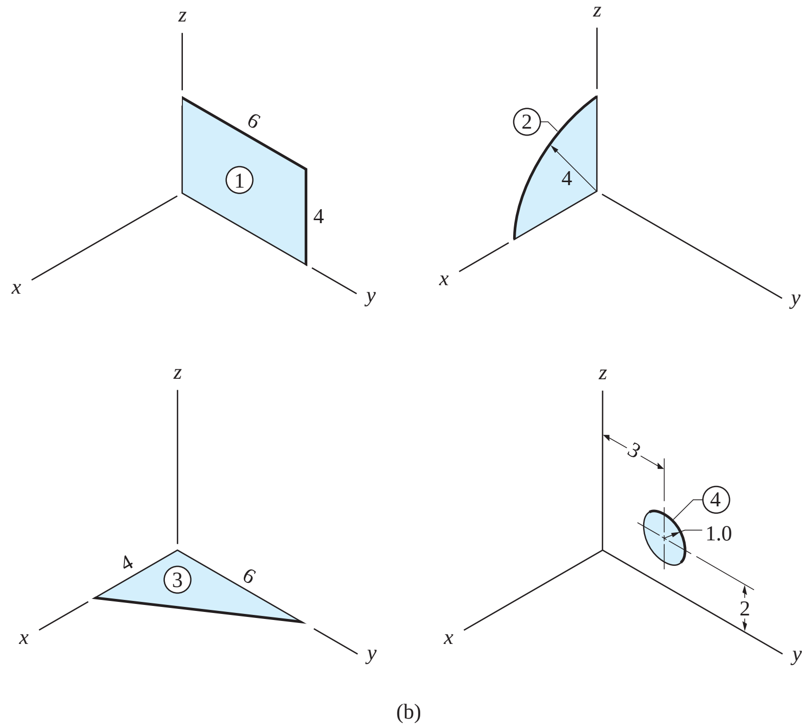
Calcule las coordenadas centroidales de la superficie sombreada que se muestra en la figura (a).



(a)

Solución

La superficie en la figura (a) se puede descomponer en las cuatro áreas planas que se muestran en la figura (b): el rectángulo 1, más el cuarto de círculo 2, más el triángulo 3, menos el círculo 4. La ubicación del centroide de cada área compuesta se puede determinar por simetría o consultando la tabla 8.1.



(b)

En la tabla siguiente se indican los cálculos para las áreas y los primeros momentos de las áreas.

Parte	**Área A (pulg^2)**	**$\bar{x}$ (pulg)**	**$A\bar{x}$ (pulg^3)**	**$\bar{y}$ (pulg)**	**$A\bar{y}$ (pulg^3)**	**$\bar{z}$ (pulg)**	**$A\bar{z}$ (pulg^3)**
1	$4(6) = 24$	0	0	$+3$	$+72.00$	$+2$	$+48.00$
2	$\frac{!\,(4)^2}{4} = 4\pi$	$+\frac{4R}{3\pi} = +\frac{4(4)}{3\pi}$	$+21.33$	0	0	$+\frac{4R}{3\pi} = +\frac{4(4)}{3\pi}$	$+21.33$
3	$\frac{1}{2}(4)(6) = 12$	$+\frac{1}{3}(4)$	$+16.00$	$+\frac{1}{3}(6)$	$+24.00$	0	0
4	$-!\,(1)^2 = -\pi$	0	0	$+3$	-3π	$+2$	-2π
Σ	45.42	$\cdots$	$+37.33$	$\cdots$	$+86.58$	$\cdots$	$+63.05$

Por tanto, las coordenadas centroidales de la superficie sombreada que se muestra en la figura (a) son

$$\bar{x} = \frac{37.33}{45.42} = 0.822 \text{ pulg}$$

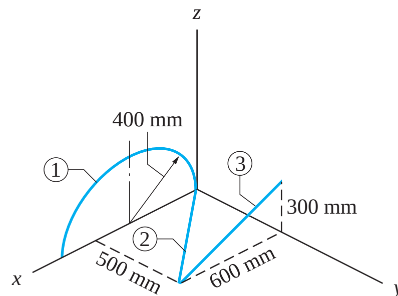
$$\bar{y} = \frac{86.58}{45.42} = 1.906 \text{ pulg} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\bar{z} = \frac{63.05}{45.42} = 1.388 \text{ pulg}$$

Usted debe ubicar este punto en la figura (a) para verificar que representa una ubicación razonable del centroide para el área sombreada.

Problema de ejemplo **8.10**

Determine las coordenadas centroidales para la curva compuesta formada por tres segmentos: el arco semicircular 1 y las líneas rectas 2 y 3.



Solución

Segmento 1 (arco semicircular)

$$L_1 = \pi R = 400\pi \text{ mm}$$

$$\bar{x}_1 = 400 \text{ mm}, \quad \bar{y}_1 = 0 \qquad \text{(por inspección)}$$

$$\bar{z}_1 = \frac{2R}{\pi} = \frac{2(400)}{\pi} = \frac{800}{\pi} \text{ mm} \qquad \text{(de la tabla 8.2)}$$

Segmento 2 (línea recta)

$$L_2 = \sqrt{500^2 + 600^2} = 781.0 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_2 = 300 \text{ mm} \qquad \bar{y}_2 = 250 \text{ mm} \qquad \bar{z}_2 = 0 \qquad \text{(por inspección)}$$

Segmento 3 (línea recta)

$$L_3 = \sqrt{600^2 + 300^2} = 670.8 \text{ mm}$$
$$\bar{x}_3 = 300 \text{ mm} \qquad \bar{y}_3 = 500 \text{ mm} \qquad \bar{z}_3 = 150 \text{ mm} \qquad \text{(por inspección)}$$

Los cálculos restantes se realizan en la tabla siguiente:

Segmento	**Longitud L (mm)**	**$\bar{x}$ (mm)**	**$L\bar{x}$ (mm^2)**	**$\bar{y}$ (mm)**	**$L\bar{y}$ (mm^2)**	**$\bar{z}$ (mm)**	**$L\bar{z}$ (mm^2)**
1	400π	400	502.7×10^3	0	0	$\frac{800}{\pi}$	320.0×10^3
2	781.0	300	234.3×10^3	250	195.3×10^3	0	0
3	670.8	300	201.2×10^3	500	335.4×10^3	150	100.6×10^3
Σ	2708.4	···	938.2×10^3	···	530.7×10^3	···	420.6×10^3

Por tanto, las coordenadas centroidales de la curva compuesta son

$$\bar{x} = \frac{\Sigma L\bar{x}}{\Sigma L} = \frac{938.2 \times 10^3}{2708.4} = 346 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma L\bar{y}}{\Sigma L} = \frac{530.7 \times 10^3}{2708.4} = 196 \text{ mm}$$ *Respuesta*

$$\bar{z} = \frac{\Sigma L\bar{z}}{\Sigma L} = \frac{420.6 \times 10^3}{2708.4} = 155 \text{ mm}$$

Debe ubicar este punto en la figura para verificar que representa una ubicación razonable para el centroide de la curva compuesta.

Problemas

8.39 Mediante integración ubique el centroide del volumen del hemisferio. Compare sus resultados con los de la tabla 8.3.

8.40 Mediante integración encuentre el centroide de la superficie del hemisferio. Compare su resultado con los de la tabla 8.4.

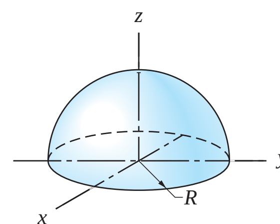


Fig. P8.39, P8.40

8.41 Ubique el centroide del volumen obtenido girando el triángulo respecto al eje x. Utilice integración.

8.42 Resuelva el problema 8.41 suponiendo que el triángulo se gira respecto al eje y.

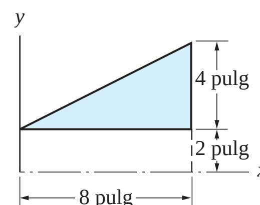


Fig. P8.41, P8.42

8.43 Mediante integración encuentre las coordenadas centroidales para el volumen obtenido girando el área ilustrada respecto al eje x.

8.44 Resuelva el problema 8.43 suponiendo que el área se gira respecto al eje y.

8.45 Verifique la coordenada centroidal z de la pirámide que se muestra en la tabla 8.3 por integración.

8.46 Mediante integración calcule la coordenada z del centroide de la mitad del cono.

8.47 Determine la coordenada centroidal z de la superficie curva de la mitad del cono por integración.

8.48 Mediante integración determine las coordenadas centroidales x y y para el volumen ilustrado.

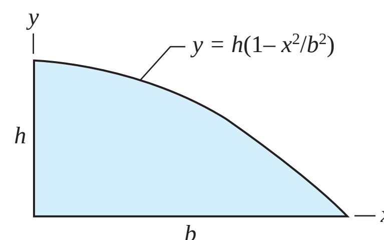


Fig. P8.43, P8.44

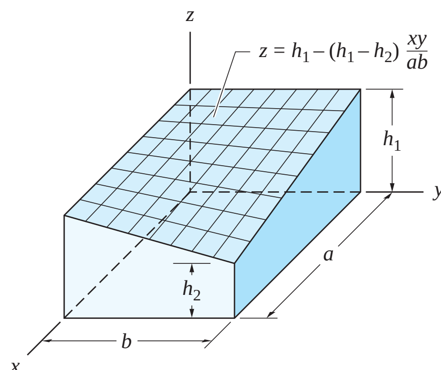


Fig. P8.48

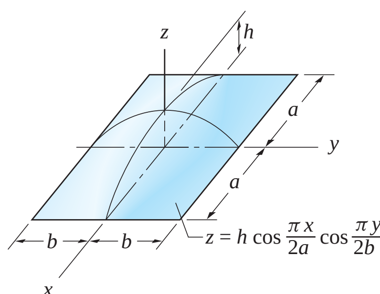


Fig. P8.49

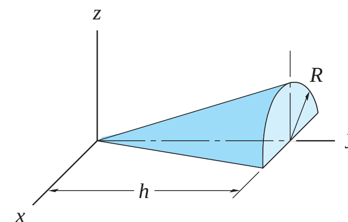


Fig. P8.46, P8.47

8.49 Ubique el centroide del volumen entre la superficie curva y el plano xy mediante integración.

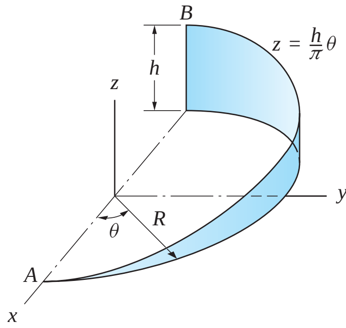


Fig. P8.50, P8.51

8.50 Mediante integración ubique el centroide de la superficie curva.

8.51 Mediante integración determine las coordenadas centroidales de la curva que conecta los puntos A y B.

8.52-8.57 Mediante el método de los volúmenes compuestos determine las coordenadas centroidales del volumen.

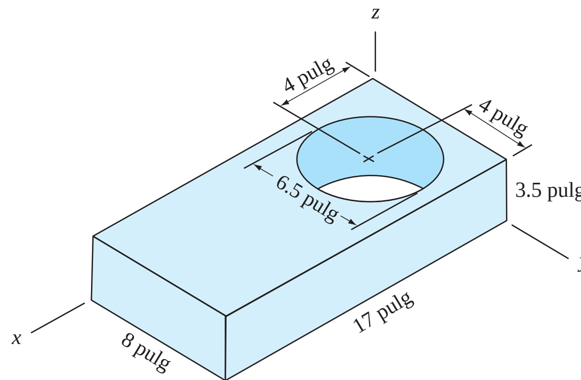


Fig. P8.52

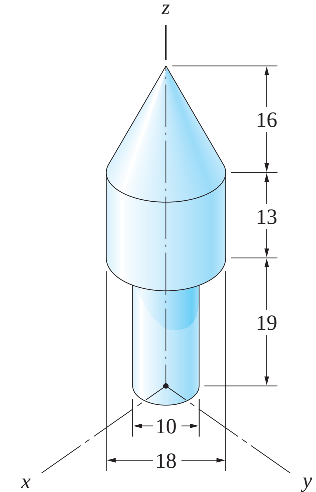


Fig. P8.53

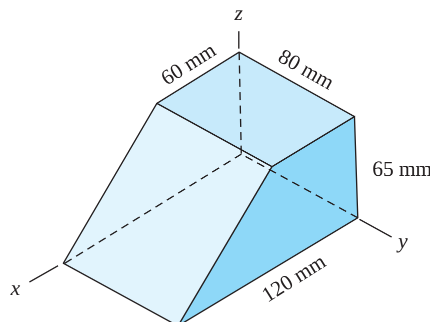


Fig. P8.54

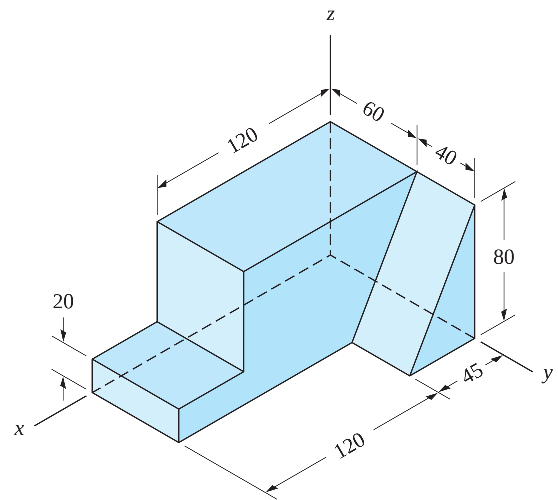


Fig. P8.55

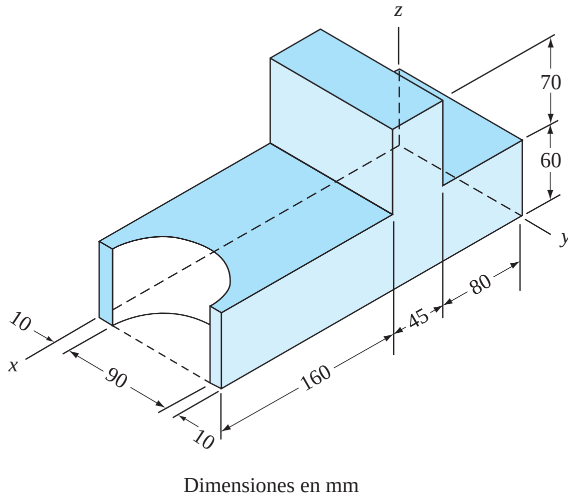


Fig. P8.56

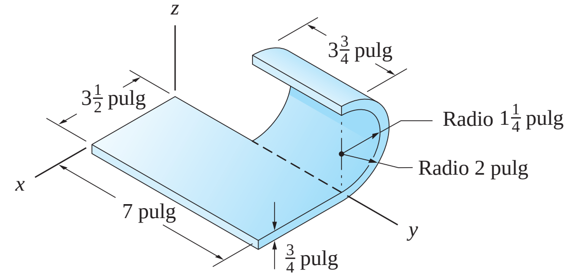


Fig. P8.57

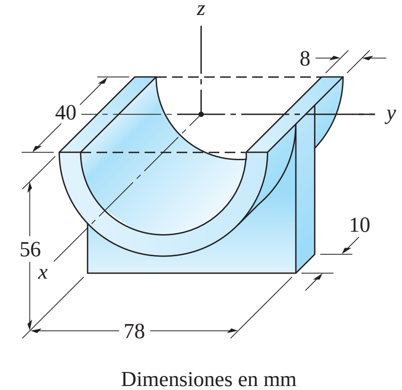


Fig. P8.58

8.58 Con el método de los volúmenes compuestos encuentre la coordenada centroidal *z* del medio cojinete.

8.59 El recipiente cilíndrico tendrá su máxima estabilidad contra el volcamiento cuando su centroide se ubique en su posición más baja posible. Determine la profundidad *h* de la parte cilíndrica que se debe remover para lograr esto.

8.60 a 8.65 Mediante el método de las superficies compuestas ubique el centroide de la superficie.

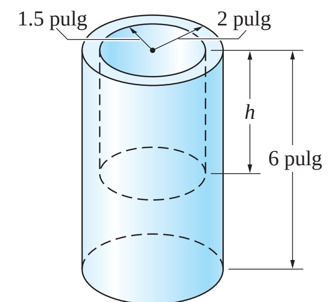


Fig. P8.59

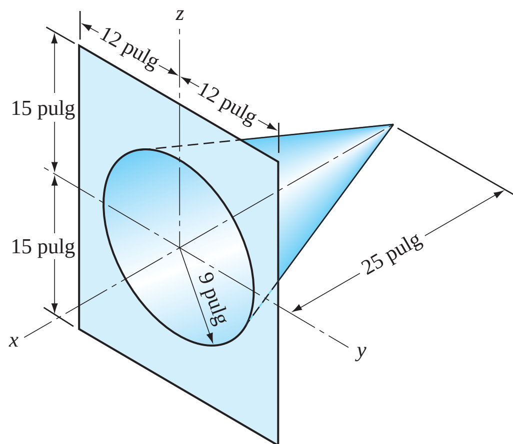


Fig. P8.60

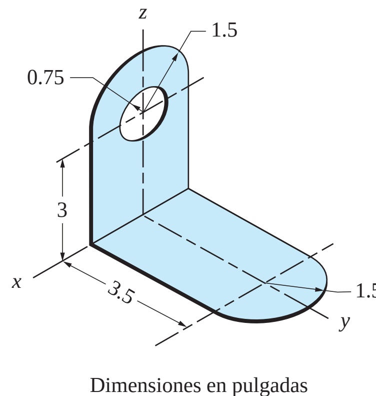


Fig. P8.61

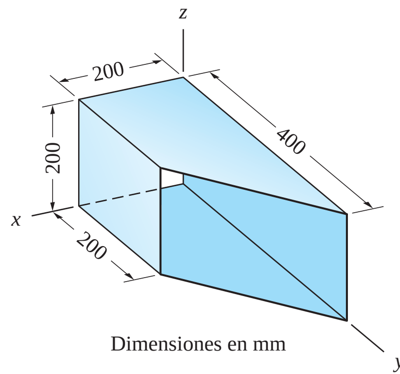


Fig. P8.62

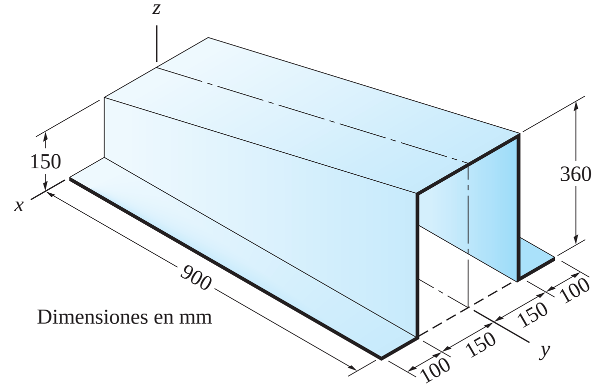


Fig. P8.63

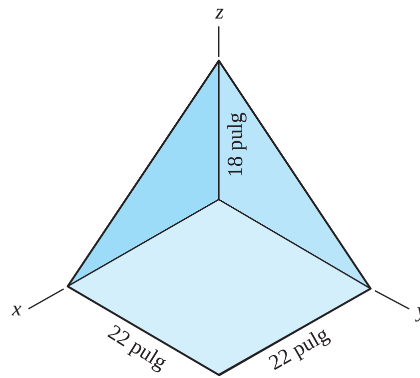


Fig. P8.64

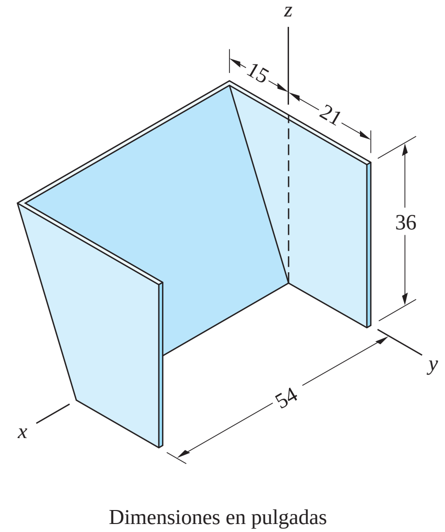


Fig. P8.65

8.66 El portarretrato y su ménsula triangular de soporte forman una superficie compuesta. Calcule la altura h del soporte que minimiza la coordenada z centroidal del conjunto.

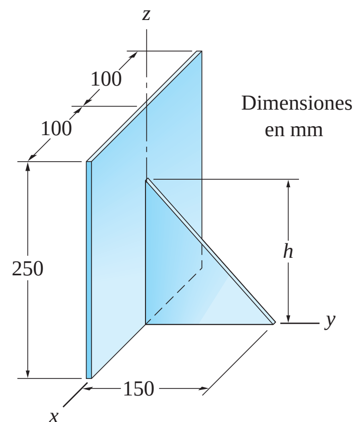


Fig. P8.66

8.67 a 8.69 Mediante el método de las curvas compuestas ubique el centroide de la figura de alambre.

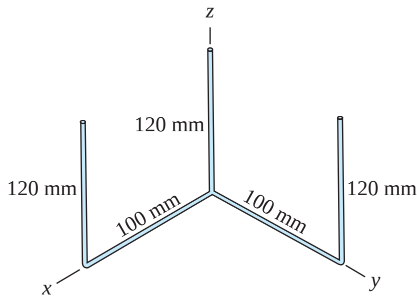


Fig. P8.67

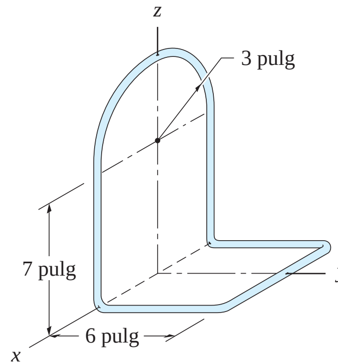


Fig. P8.68

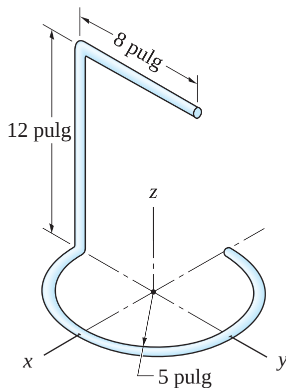


Fig. P8.69

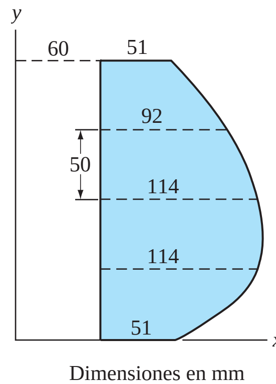


Fig. P8.70, P8.71

8.70 Mediante integración numérica encuentre el centroide del volumen generado girando el área ilustrada respecto al eje *x*.

8.71 Resuelva el problema 8.70 suponiendo que el área se gira respecto al eje *y*.

8.72 Ubique el centroide del volumen generado girando el área ilustrada respecto a la línea *AB*. Utilice integración numérica.

8.73 (a) Resuelva el problema 8.72 suponiendo que el área se gira respecto al eje *x*. (b) Compruebe su resultado en la parte (a) con la tabla 8.3 si la curva *OB* es una parábola.

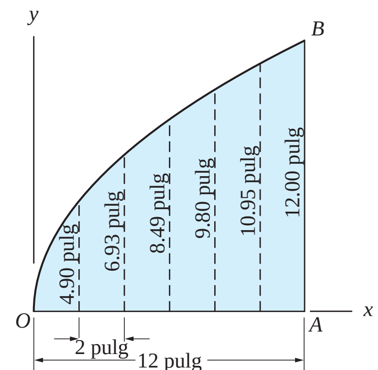


Fig. P8.72, P8.73

8.74 Mediante integración numérica con $\Delta x = 1.0$ m ubique el centroide de la superficie generada girando la parábola respecto al eje y.

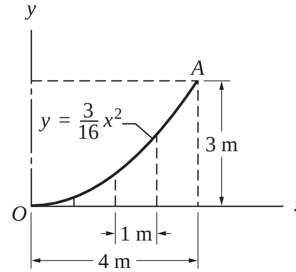


Fig. P8.74, P8.75

8.75 Resuelva el problema 8.74 suponiendo que la parábola OA se gira respecto al eje x.

8.4 Teoremas de Pappus-Guldinus

Los teoremas de Pappus-Guldinus* proporcionan métodos relativamente simples para calcular áreas superficiales y volúmenes de cuerpos de revolución, utilizando los primeros momentos de curvas y áreas.

Teorema I *La superficie generada girando una curva plana 360° respecto a un eje no intersecante en el plano de la curva es igual a 2π por el primer momento de la curva respecto al eje de revolución.*

Comprobación

Considere la curva $\mathscr{L}$ de longitud L, que se muestra en la figura 8.11, que se encuentra en el plano xy. Cuando esta curva se gira 360° respecto al eje x, el área del anillo generado por la longitud diferencial de la curva ds es $dA = 2\pi\, y\, ds$. Por tanto, el área superficial generada por toda la curva $\mathscr{L}$ se convierte en

$$A = 2\pi \int_{\mathscr{L}} y\, ds = 2\pi\, Q_x \qquad (8.14)$$

donde $Q_x = \int_{\mathscr{L}} y\, ds$ es el primer momento de la curva respecto al eje x. Esto completa la comprobación.

*Nombrados en honor del geómetra griego Pappus (siglo IV a.C.) y del matemático suizo Paul Guldinus (1577-1643).

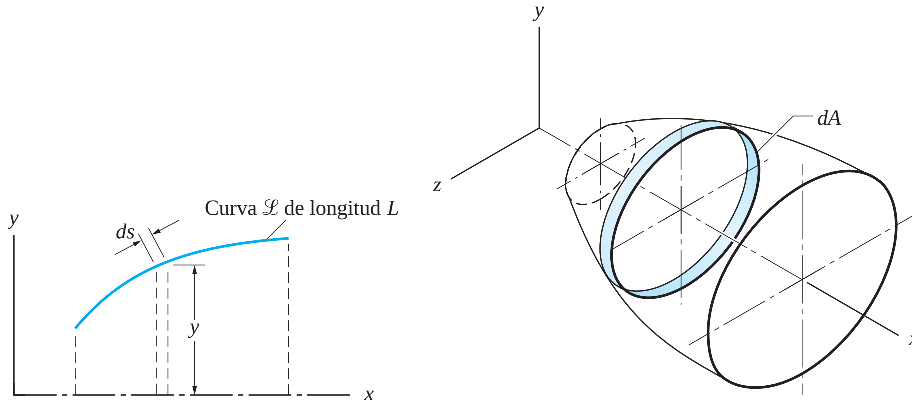


Fig. 8.11

Teorema II *El volumen generado girando un área plana 360° respecto a un eje no intersecante en el plano del área es igual a 2π por el primer momento del área respecto al eje de revolución.*

Comprobación

Considere la región $\mathscr{A}$ de área A, que se muestra en la figura 8.12, que se encuentra en el plano xy. Cuando esta área se gira 360° respecto al eje x, el volumen generado por el área diferencial dA es $dV = 2\pi\, y\, dA$. Por tanto, el volumen generado por toda el área es

$$V = 2\pi \int_{\mathscr{A}} y\, dA = 2\pi\, Q_x \tag{8.15}$$

donde $Q_x = \int_{\mathscr{A}} y\, dA$ es el primer momento del área respecto al eje x. Esto completa la comprobación.

Observe que si la curva o área generatriz se gira un ángulo menor que 360°, este ángulo, medido en radianes, debe remplazar 2π en las ecuaciones (8.14) u (8.15).

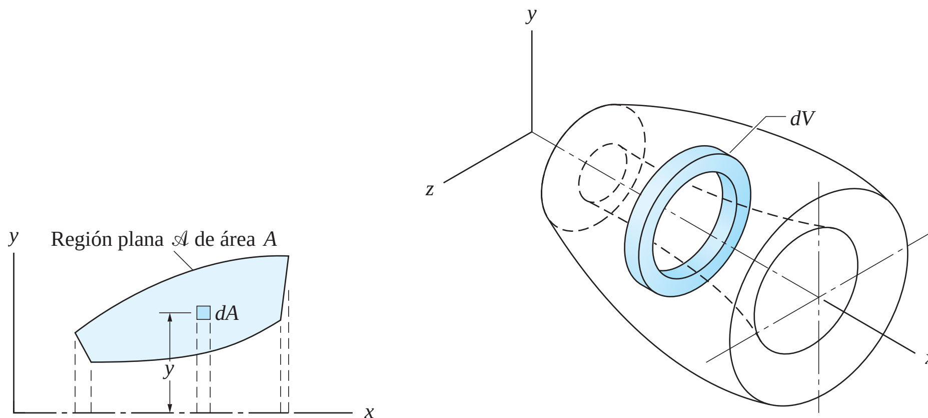
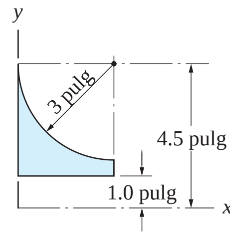


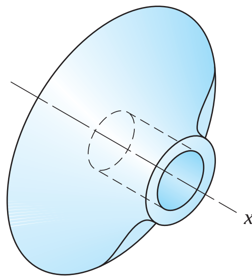
Fig. 8.12

Problema de ejemplo 8.11



(a)

El área que se muestra en la figura (a) se gira alrededor del eje x para formar el cuerpo ilustrado en la figura (b). Utilizando los teoremas de Pappus-Guldinus, calcule: 1. el volumen del cuerpo y 2. el área de la superficie curva del cuerpo.



(b)

Solución

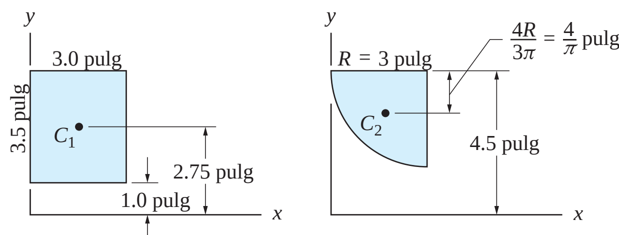
Parte 1

De acuerdo con el teorema II, el volumen del cuerpo es $V = 2\pi Q_x$, donde Q_x es el primer momento del área en la figura (a) respecto al eje x. De acuerdo con el método de las áreas compuestas, Q_x es igual al primer momento de un rectángulo menos el primer momento del cuarto de círculo, los dos tomados respecto al eje x; consulte la figura (c). Se consulta la tabla 8.1 para ubicar el centroide del cuarto de círculo y el centroide del rectángulo ya se determinó por simetría. Por tanto, se obtiene

$$Q_x = \Sigma A\bar{y} = (3 \times 3.5)(2.75) - \frac{\pi(3)^2}{4}\left(4.5 - \frac{4}{\pi}\right) = 6.066 \text{ pulg}^3$$

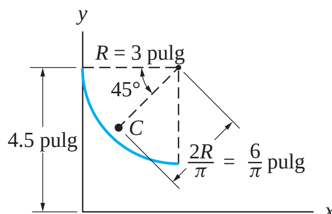
De aquí el volumen del cuerpo es

$$V = 2\pi Q_x = 2\pi(6.066) = 38.1 \text{ pulg}^3$$ *Respuesta*



(c)

Parte 2



(d)

La superficie curva del cuerpo en la figura (b) se genera girando el arco del cuarto de círculo ilustrado en la figura (d) respecto al eje x. De acuerdo con el teorema I, esta área es igual a $2\pi Q_x$, donde Q_x es el primer momento del arco respecto al eje x. La ubicación del centroide para el arco se puede encontrar en la tabla 8.3. Utilizando $L = \pi R/2$ para la longitud del arco y con referencia a la figura (d), se obtiene

$$Q_x = L\bar{y} = \frac{\pi(3)}{2}\left(4.5 - \frac{6}{\pi}\text{ sen } 45°\right) = 14.842 \text{ pulg}^2$$

El área de la superficie curva es

$$A = 2\pi Q_x = 2\pi(14.842) = 93.3 \text{ pulg}^2$$ *Respuesta*

Problemas

8.76 En el cono truncado de 4 pulg de diámetro se perfora un agujero. Calcule el volumen del área superficial del cuerpo resultante.

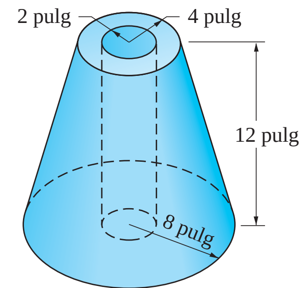


Fig. P8.76

8.77 Un toro se forma girando el círculo respecto al eje AB. Calcule el volumen y el área superficial del toro.

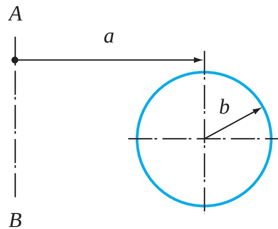


Fig. P8.77

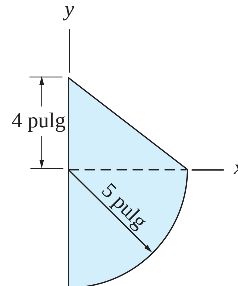


Fig. P8.78

8.78 Un sólido de revolución se forma girando el área plana que se muestra respecto al eje y. Determine el área superficial y el volumen del sólido.

8.79 Calcule el volumen del casquete esférico que se forma cuando el segmento circular se gira respecto al eje y.

8.80 Calcule el área superficial de la esfera truncada que se forma girando el arco circular AB respecto al eje y.

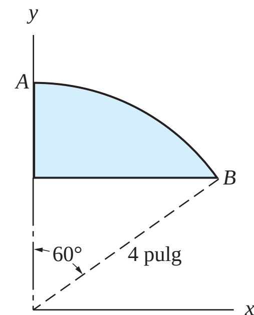


Fig. P8.79, P8.80

8.81 El borde de una polea de acero para banda en V se forma girando el área plana que se muestra respecto al eje AB. Encuentre la masa del borde, si la densidad del acero es 7850 kg/m^3.

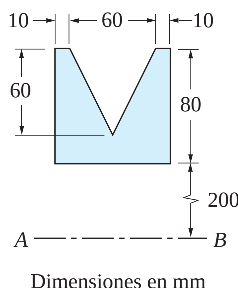


Fig. P8.81

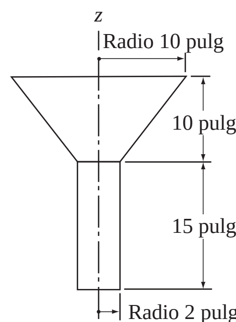


Fig. P8.82

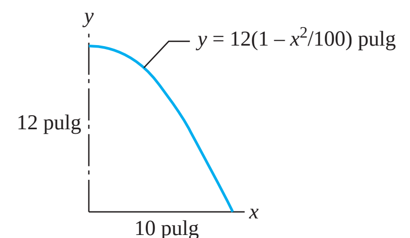


Fig. P8.83

8.82 Determine el volumen de la parte de máquina que se muestra.

8.83 Determine el área superficial del paraboloide que genera girando la parábola respecto al eje y. (*Sugerencia:* calcule Q_y de la parábola por integración.)

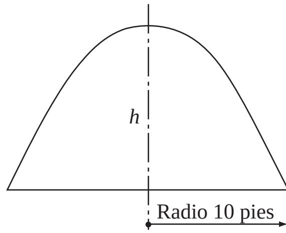


Fig. P8.84

8.84 El volumen del domo con forma de paraboloide es 2000 pies^3. Determine la altura *h* del domo.

8.85 Encuentre el área superficial del codo a 90° para conductos.

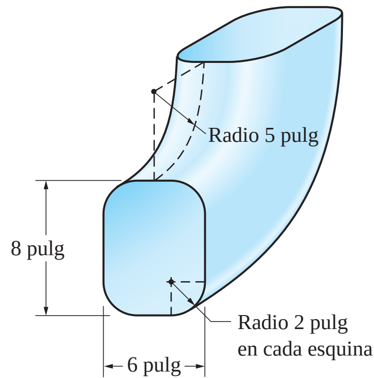


Fig. P8.85

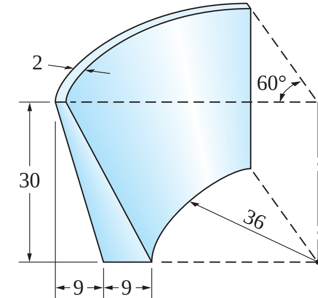


Fig. P8.86

8.86 Determine el volumen de la presa de arco de concreto.

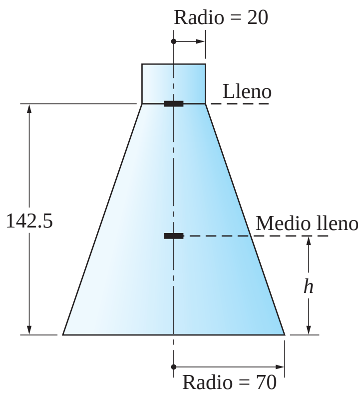


Fig. P8.87

8.87 (a) Encuentre el volumen de líquido contenido en el matraz cuando está lleno hasta la marca "lleno". (b) Determine la elevación *h* de la marca "medio lleno".

8.88 Determine la relación *b*/*a* para la cual el volumen del relleno es igual al volumen del material removido de la excavación cónica. Suponga que el relleno es axial simétrico respecto a la excavación.

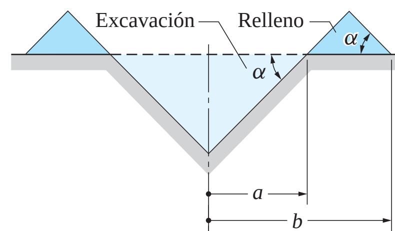


Fig. P8.88

8.5 Centro de gravedad y centro de masa

La resultante de las fuerzas de gravedad que actúan sobre un cuerpo, el cual conocemos como el *peso* del cuerpo, actúa por un punto denominado *centro de gravedad* del cuerpo. El centro de gravedad entonces se determina por la distribución del peso dentro del cuerpo.

El *centro de masa* de un cuerpo es un concepto muy importante en dinámica (es el punto por el cual actúa la fuerza de inercia resultante); es una propiedad de la distribución de la masa dentro del cuerpo. Sin embargo, como el peso y la masa difieren sólo por un factor constante (siempre que el campo gravitacional sea uniforme), se tiene que los centros de masa y gravedad coinciden en la mayoría de las aplicaciones. Las diferencias surgen sólo en problemas en los que el campo gravitacional no

es uniforme. Por tanto, no es sorprendente que los ingenieros con frecuencia utilicen los términos *centro de gravedad* y *centro de masa* de forma indistinta.

a. Centro de gravedad

El peso de un cuerpo es el ejemplo más común de una fuerza distribuida. Para un cuerpo que ocupa la región $\mathcal{V}$, como se muestra en la figura 8.13, el peso de un elemento de volumen diferencial dV es $dW = \gamma\, dV$, donde γ es el peso específico (peso por volumen unitario). El peso total W del cuerpo es entonces la resultante de un número infinito de fuerzas paralelas dW; es decir,

$$W = \int_{\mathcal{V}} dW = \int_{\mathcal{V}} \gamma\, dV$$

El punto G por el que actúa W se denomina *centro de peso* o de forma más común, *centro de gravedad del cuerpo*, consulte la figura 8.13(b).

Las coordenadas de G se pueden determinar igualando el momento resultante del peso distribuido al momento de W respecto a los ejes coordenados. Con referencia a la figura 8.13(a) y (b), se obtiene

$$\Sigma M_x = -W\bar{y} = -\int_{\mathcal{V}} y\, dW \qquad \Sigma M_y = W\bar{x} = \int_{\mathcal{V}} x\, dW$$

de donde se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{V}} x\, dW}{\int_{\mathcal{V}} dW} = \frac{\int_{\mathcal{V}} x\gamma\, dV}{\int_{\mathcal{V}} \gamma\, dV} \tag{8.16a}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{V}} y\, dW}{\int_{\mathcal{V}} dW} = \frac{\int_{\mathcal{V}} y\gamma\, dV}{\int_{\mathcal{V}} \gamma\, dV} \tag{8.16b}$$

Si imaginamos que el cuerpo y los ejes coordenados se giran de manera que el eje x o bien el y sea vertical, la igualdad de momentos daría

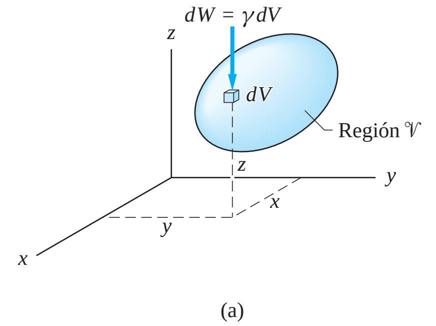
$$\bar{z} = \frac{\int_{\mathcal{V}} z\, dW}{\int_{\mathcal{V}} dW} = \frac{\int_{\mathcal{V}} z\gamma\, dV}{\int_{\mathcal{V}} \gamma\, dV} \tag{8.16c}$$

Las integrales en las ecuaciones (8.16) se pueden evaluar mediante las mismas técnicas que se utilizaron para ubicar los centroides de volúmenes en el apartado 8.3.

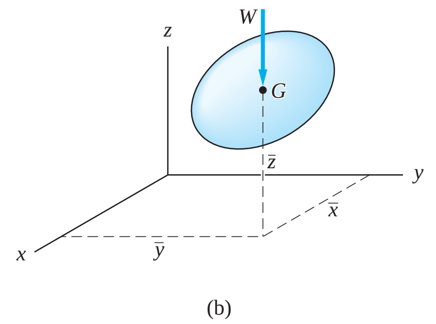
Para cuerpos homogéneos, el peso específico γ es constante y por tanto se cancela en las ecuaciones (8.16), lo que da

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{V}} x\, dV}{\int_{\mathcal{V}} dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{V}} y\, dV}{\int_{\mathcal{V}} dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_{\mathcal{V}} z\, dV}{\int_{\mathcal{V}} dV}$$

Comparando estas ecuaciones con las ecuaciones (8.10), se puede hacer la observación importante siguiente:



(a)



(b)

Fig. 8.13

El centro de gravedad de un cuerpo homogéneo coincide con el centroide de su volumen.

Por tanto, las tablas en donde se dan los centroides de volúmenes, como la tabla 8.3, se pueden utilizar para determinar la ubicación de los centros de gravedad de cuerpos homogéneos.

b. *Centro de masa*

El centro de masa de un cuerpo se define como el punto que tiene las coordenadas siguientes:

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{V}} x\, dm}{\int_{\mathcal{V}} dm} = \frac{\int_{\mathcal{V}} x\rho\, dV}{\int_{\mathcal{V}} \rho\, dV}$$
$$\bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{V}} y\, dm}{\int_{\mathcal{V}} dm} = \frac{\int_{\mathcal{V}} y\rho\, dV}{\int_{\mathcal{V}} \rho\, dV} \qquad (8.17)$$
$$\bar{z} = \frac{\int_{\mathcal{V}} z\, dm}{\int_{\mathcal{V}} dm} = \frac{\int_{\mathcal{V}} z\rho\, dV}{\int_{\mathcal{V}} \rho\, dV}$$

En las ecuaciones (8.17), dm es la masa del elemento diferencial dV en la figura 8.13(a), dada por $dm = \rho\, dV$, donde ρ es densidad (masa por volumen unitario). Si el campo gravitacional es constante, lo que es una suposición válida en la mayoría de los problemas de ingeniería, el peso específico γ y la masa ρ están relacionados por $\gamma = \rho g$, donde g es la aceleración de la gravedad (constante). En este caso, el centro de gravedad y el centro de masa para un cuerpo dado coinciden.

c. *Cuerpos compuestos*

Si un cuerpo está compuesto de varias formas simples, se puede utilizar el método de los cuerpos compuestos para encontrar su centro de gravedad o de masa. Remplazando las integrales en las ecuaciones (8.16) por sumatorias, se obtiene para el centro de gravedad

$$\bar{x} = \frac{\sum W_i \bar{x}_i}{\sum W_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum W_i \bar{y}_i}{\sum W_i} \qquad \bar{z} = \frac{\sum W_i \bar{z}_i}{\sum W_i} \qquad (8.18)$$

donde W_i es el peso de la componente i-ésima del cuerpo y $(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i,\ \bar{z}_i)$ son las coordenadas de su centro de gravedad.

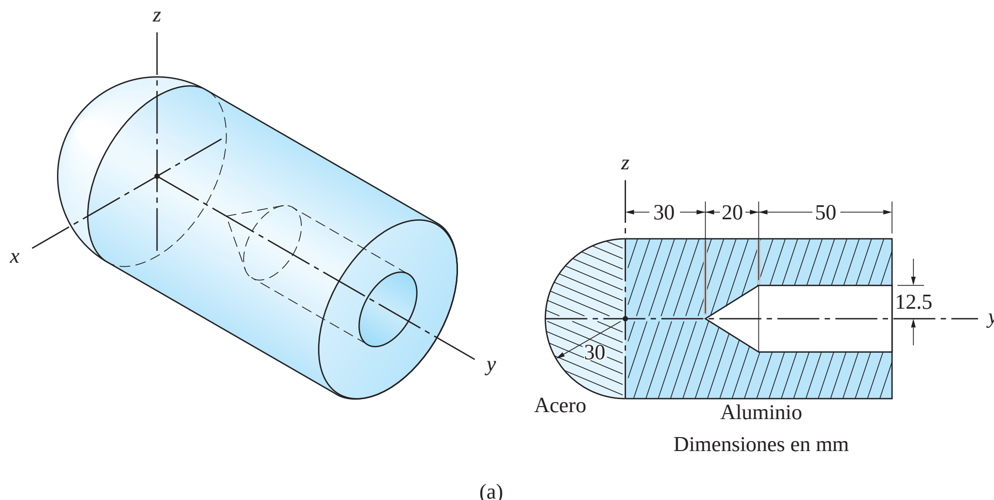
De manera similar, la ubicación del centro de masa de un cuerpo compuesto se puede obtener con las ecuaciones (8.17):

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum m_i \bar{y}_i}{\sum m_i} \qquad \bar{z} = \frac{\sum m_i \bar{z}_i}{\sum m_i} \qquad (8.19)$$

donde m_i es la masa de la componente i-ésima y $(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i,\ \bar{z}_i)$ son las coordenadas de su centro de masa.

Problema de ejemplo 8.12

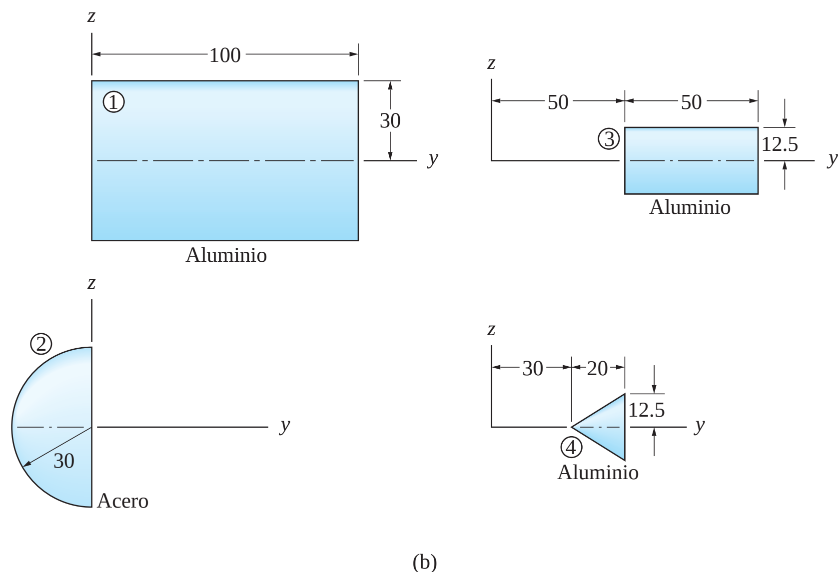
La parte de máquina en la figura (a) consiste de un hemisferio de acero unido a un cilindro de aluminio en el que se ha taladrado un agujero. Determine la ubicación del centro de masa. Las densidades para el aluminio y el acero son 2700 kg/m^3 y 7850 kg/m^3, respectivamente.



(a)

Solución

Por simetría, se observa que $\bar{x} = \bar{z} = 0$. Si la parte de máquina fuera homogénea su centro de masa coincidiría con el centroide del volumen contenido y $\bar{y}$ se podría determinar utilizando el método de los volúmenes compuestos descrito en el apartado 8.3. Como la parte de máquina no es homogénea, $\bar{y}$ se debe determinar mediante el método de los cuerpos compuestos.



(b)

La parte está compuesta de los cuatro cuerpos que se muestran en la figura (b): el cilindro de aluminio 1, más el hemisferio de acero 2, menos el cilindro de aluminio 3, menos el cono de aluminio 4. Como cada uno de estos cuerpos es homogéneo, cada centro de masa coincide con el centroide del volumen contenido.

Cilindro de aluminio 1

$$m = \rho V = \rho\pi R^2 h = 2700\pi(0.030)^2(0.100) = 0.7634 \text{ kg}$$
$$\bar{y} = \frac{100}{2} = 50 \text{ mm} \qquad \text{(por simetría)}$$
$$m\bar{y} = (0.7634)(50) = 38.17 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

Hemisferio de acero 2

$$m = \rho V = \rho \frac{2\pi}{3} R^3 = 7850 \frac{2\pi}{3}(0.030)^3 = 0.4439 \text{ kg}$$
$$\bar{y} = -\frac{3}{8}R = -\frac{3}{8}(30) = -11.25 \text{ mm} \qquad \text{(consultando la tabla 8.3)}$$
$$m\bar{y} = (0.4439)(-11.25) = -4.994 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

Cilindro de aluminio 3 (que se restará)

$$m = -\rho V = -\rho\pi R^2 h = -2700\pi(0.0125)^2(0.050) = -0.066\,27 \text{ kg}$$
$$\bar{y} = 75 \text{ mm} \qquad \text{(por simetría)}$$
$$m\bar{y} = (-0.066\,27)(75) = -4.970 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

Cono de aluminio 4 (que se restará)

$$m = -\rho V = -\rho \frac{\pi}{3} R^2 h = -2700 \frac{\pi}{3}(0(0125)^2(0.020) = -0(008\,836 \text{ kg}$$
$$\bar{y} = 30 + \frac{3}{4}(20) = 45 \text{ mm} \qquad \text{(consultando la tabla 8.3)}$$
$$m\bar{y} = (-0.008\,836)(45) = -0.3976 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

Totales

$$\Sigma m = 0.7634 + 0.4439 - 0.066\,27 - 0.008\,836 = 1.1322 \text{ kg}$$
$$\Sigma m\bar{y} = 38.17 - 4.994 - 4.970 - 0.3976 = 27.81 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

Por tanto, las coordenadas del centro de masa de la máquina son

$$\bar{x} = \bar{z} = 0 \quad \bar{y} = \frac{\Sigma m\bar{y}}{\Sigma m} = \frac{27.81}{1.1322} = 24.6 \text{ mm} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problemas

8.89 El cilindro de acero con un agujero cilíndrico está conectado al cono de cobre. Encuentre el centro de gravedad del conjunto. Las densidades del acero y del cobre son 489 lb/pie^3 y 556 lb/pie^3, respectivamente.

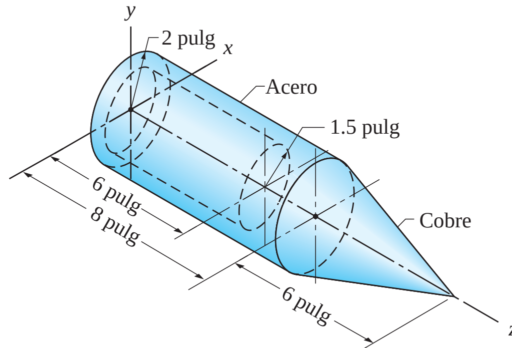


Fig. P8.89

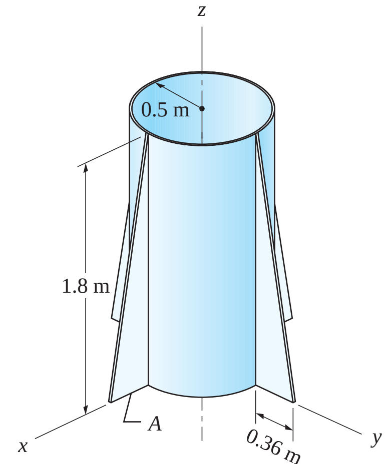


Fig. P8.90

8.90 El fuselaje del cohete es un cascarón cilíndrico de 80 kg de masa. La masa de cada una de las cuatro aletas triangulares unidas al fuselaje es 12 kg. Todos los componentes son delgados y de espesor uniforme. Determine las coordenadas del centro de masa del fuselaje.

8.91 ¿Cuál es la relación L/R para la cual la figura de alambre uniforme se puede equilibrar en la posición indicada?

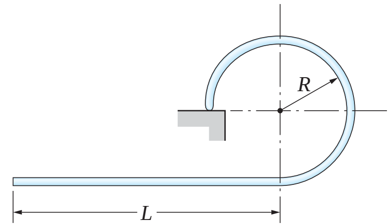


Fig. P8.91

8.92 Para sujetar una pieza de madera dura a la ménsula que está formada de plancha metálica de 1/20 pulg de espesor se utilizan tornillos pequeños. Para el acero, $\gamma = 0.283$ lb/pulg^3 y para la madera dura, $\gamma = 0.029$ lb/pulg^3. Ubique el centro de gravedad del conjunto.

8.93 Para fabricar la división que se muestra se utiliza madera contrachapada con dos espesores diferentes. Encuentre la relación t_2/t_1 máxima permisible si la división no debe volcarse.

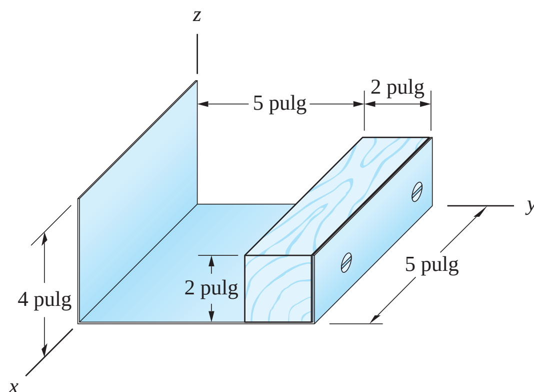
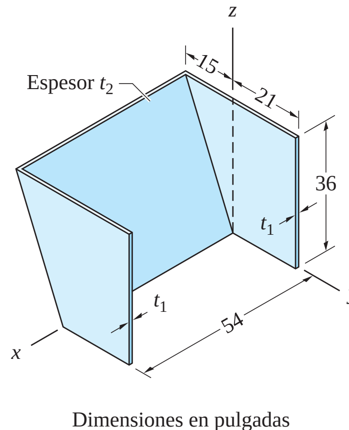


Fig. P8.92



Dimensiones en pulgadas

Fig. P8.93

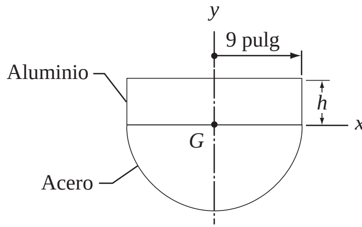


Fig. P8.94

8.94 El cilindro de aluminio está unido al hemisferio de acero. Encuentre la altura h del cilindro para la cual el centro de gravedad del conjunto está en G. Utilice $\gamma = 0.283$ lb/pulg^3 para el acero y $\gamma = 0.096$ lb/pulg^3 para el aluminio.

8.95 Dos barras uniformes de diámetros diferentes están unidas entre sí como se muestra. La barra AB está hecha de aluminio ($\rho = 2700$ kg/m^3) y la barra CD está hecha de cobre ($\rho = 8910$ kg/m^3). Encuentre las coordenadas del centro de masa del conjunto.

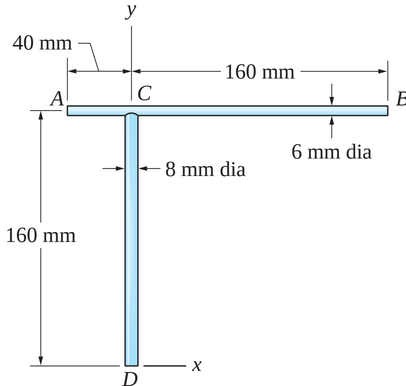


Fig. P8.95

8.96 El conjunto se forma uniendo una placa semicircular de acero ($\gamma = 490$ lb/pie^3) a una placa triangular de aluminio ($\gamma = 166$ lb/pie^3). Las dos placas son homogéneas y de 1/8 pulg de espesor. Encuentre las coordenadas del centro de gravedad del conjunto.

8.97 El pasador de acero A se inserta parcialmente en el tubo de aluminio B. Determine la coordenada x de centro de masa del conjunto. Utilice $\rho = 2660$ kg/m^3 para el aluminio y $\rho = 7850$ kg/m^3 para el acero.

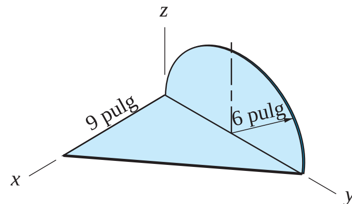


Fig. P8.96

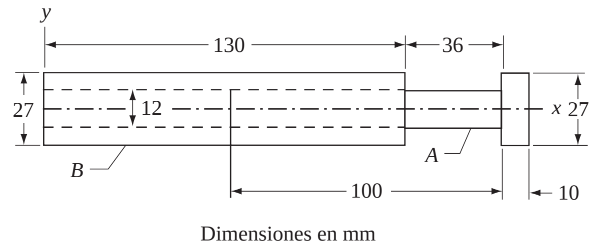


Fig. P8.97

8.98 Ubique el centro de gravedad del martillo si la masa de la cabeza de acero es 0.919 kg y la masa del mango de madera dura es 0.0990 kg.

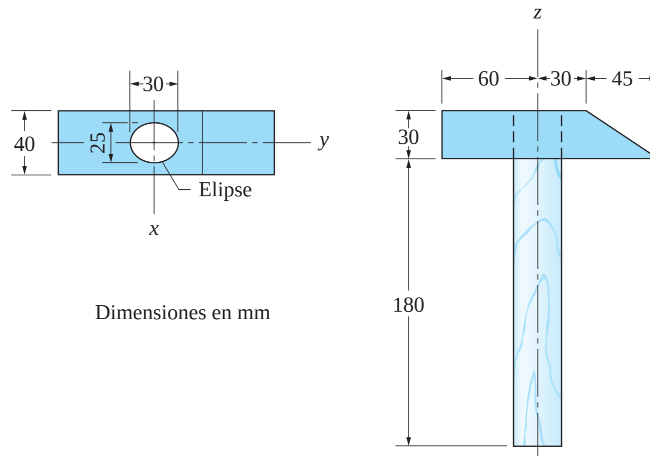


Fig. P8.98

8.99 El peso total del rin y el neumático es 24 lb. Para equilibrar estáticamente el conjunto rin y neumático (mover su centro de gravedad al punto O), se colocan pesos de plomo de 2 oz al rin en A y B. ¿Cuál fue la ubicación del centro de gravedad del conjunto antes de que se agregaran los pesos para logar el equilibrio?

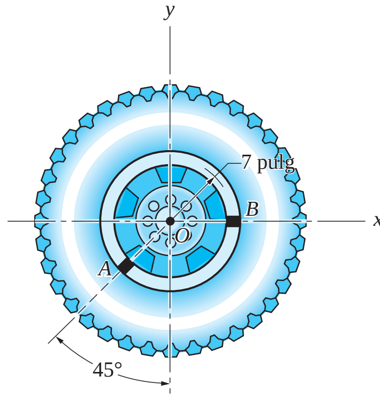


Fig. P8.99

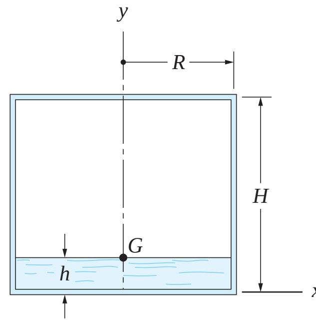


Fig. P8.100

8.100 El tanque cilíndrico de agua con $R = 12$ pies y $H = 18$ pies tiene paredes delgadas de acero de espesor uniforme y pesa 23 000 lb cuando está vacío. Determine la profundidad del agua h para la cual el centro de gravedad G del tanque más el agua estará ubicado en la superficie del agua. Para el agua utilice $\gamma = 62.4$ lb/pie^3.

8.101 La barra delgada de acero está unida rígidamente a la hoja de plástico. Las masas son 4.5 kg/m^2 para la hoja de plástico y 0.098 kg/m para la barra de acero. Determine las coordenadas del centro de masa del conjunto.

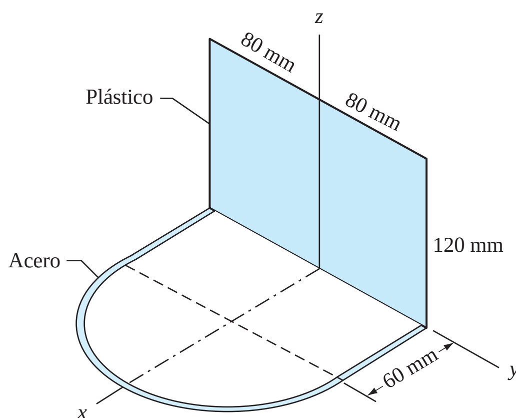


Fig. P8.101

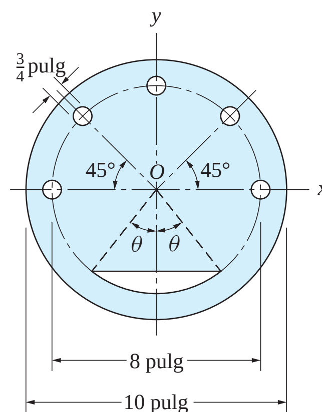


Fig. P8.102

8.102 En una placa uniforme se taladrarán cinco agujeros de $\frac{3}{4}$ pulg de diámetro. Determine el ángulo θ para el segmento circular que se debe remover para que el centro de gravedad permanezca en el punto O.

8.6 Cargas normales distribuidas

Nuestro análisis de cargas distribuidas en el apartado 3.6 estuvo limitado a casos simples debido a que el estudio de centroides se pospuso hasta este capítulo. Ahora es posible analizar las cargas normales distribuidas en un contexto general.

a. Caso general

Considere el caso general de una carga normal distribuida, como se muestra en la figura 8.14(a). La magnitud de la carga está caracterizada por $p(x, y, z)$, la *intensidad de carga* (fuerza por área unitaria). Si $d\mathbf{R}$ es la fuerza que actúa sobre el área diferencial dA, se tiene $d\mathbf{R} = \mathbf{n}p\, dA$, donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a dA (en la dirección de p). Entonces la resultante de la carga distribuida es la fuerza $\mathbf{R}$ que se muestra en la figura 8.14(b), donde

$$\mathbf{R} = \int_{\mathscr{A}} d\mathbf{R} = \int_{\mathscr{A}} \mathbf{n}p\, dA \tag{8.20}$$

Las ecuaciones de momentos se pueden utilizar para determinar la línea de acción de $\mathbf{R}$; es decir, las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ (por supuesto, si $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ y la suma de momentos no es cero, la resultante es un par). En general, $\mathbf{n}$, p y dA son funciones de

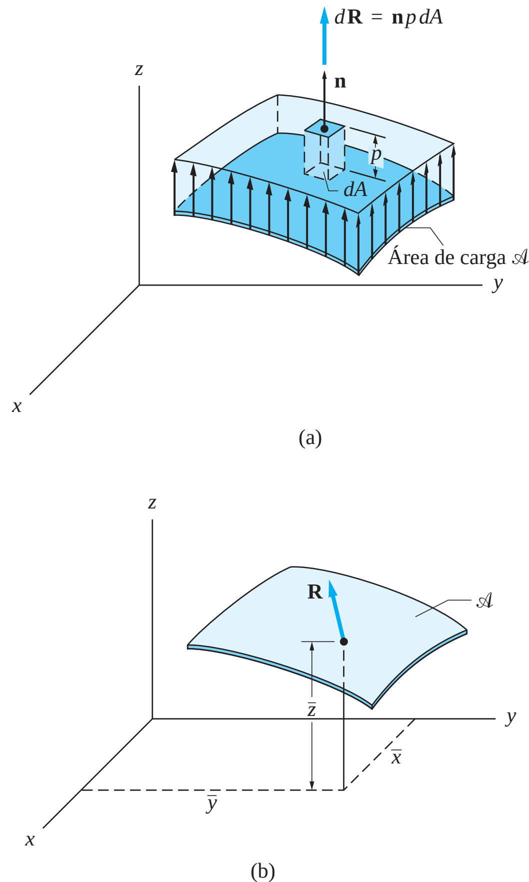


Fig. 8.14

x, y y z, y la evaluación de las integrales puede ser complicada. Los casos especiales siguientes se presentan con suficiente frecuencia para darles una atención especial: superficies planas, cargas lineales, presión uniforme sobre superficies curvas y presión de fluidos.

b. Cargas normales sobre superficies planas

La carga que se muestra en la figura 8.15(a) es paralela al eje z y se supone que está distribuida por toda el área $\mathscr{A}$, que se encuentra en el plano xy. En este caso, la intensidad de carga p es una función sólo de x y y. La fuerza resultante se muestra en la figura 8.15(b). De acuerdo con las ecuaciones (3.18) y (3.19) del apartado 3.6, la magnitud de la fuerza resultante y su línea de acción se determinan con

$$R = \int_{\mathscr{V}} dV = V \qquad \bar{x} = \frac{\int_{\mathscr{V}} x\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int_{\mathscr{V}} y\, dV}{V} \tag{8.21}$$

donde V es el volumen de la región $\mathscr{V}$ entre la superficie de carga y el área de carga.

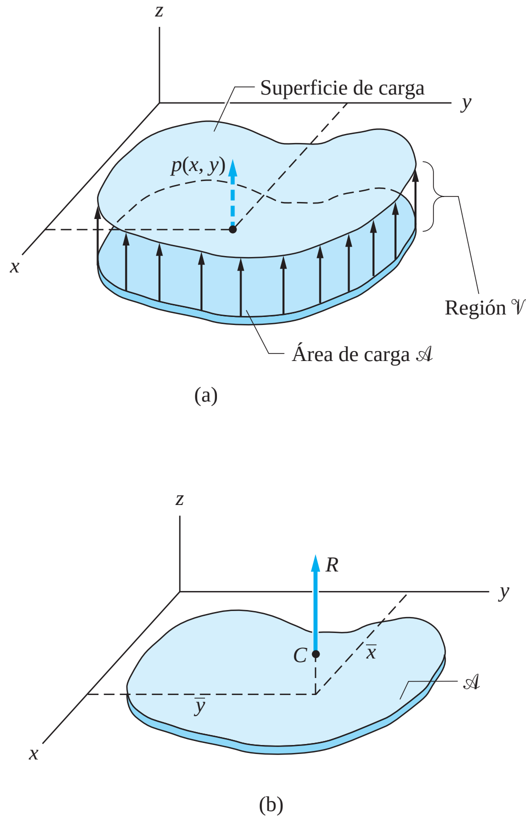


Fig. 8.15

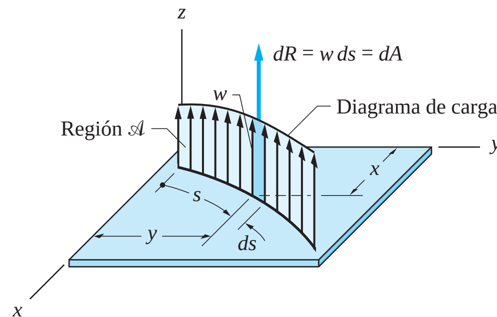
Por tanto, se llega a las conclusiones establecidas en el apartado 3.6:

- La magnitud de la fuerza resultante es igual al volumen bajo la superficie de carga.
- La línea de acción de la fuerza resultante pasa por el centroide del volumen bajo la superficie de carga.

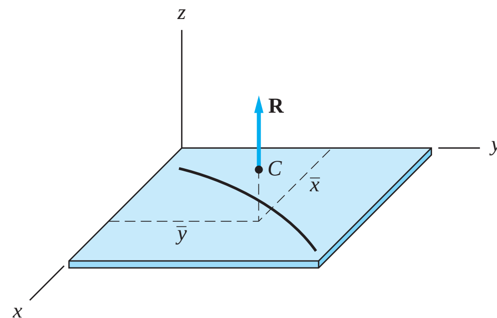
c. Cargas lineales

Las cargas lineales; es decir, las cargas distribuidas para las cuales el ancho del área de carga es despreciable comparado con su longitud, también se introdujeron en el apartado 3.6. En esa sección, el énfasis fue sobre las cargas distribuidas a lo largo de líneas rectas. Aquí, se determinan las resultantes de cargas que están distribuidas a lo largo de curvas planas.

En la figura 8.16(a) se muestra una carga, paralela al eje z, que actúa a lo largo de una curva que se encuentra en el plano xy. Sea s la longitud medida a lo largo de la curva. La carga está caracterizada por la *intensidad de carga w(s)* con unidades de lb/pie, N/m, etc. La gráfica de $w(s)$ se denomina *diagrama de carga*. Sea A el área de la región (superficie curva) $\mathscr{A}$ bajo el diagrama de carga. La resultante **R** de la línea de acción se muestra en la figura 8.16(b), con su línea de acción ubicada por $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Como la carga lineal se puede considerar como un número infinito de fuerzas paralelas diferenciales, para encontrar la magnitud y la línea de acción de **R** se recurre a la integración.



(a)



(b)

Fig. 8.16

Como se muestra en la figura 8.16(a), dR representa la fuerza infinitesimal que actúa sobre la longitud diferencial de la línea ds. Como $dR = w\,ds = dA$, donde dA es el área diferencial bajo el diagrama de carga, se observa que la magnitud de la fuerza resultante es igual al área de la superficie curva $\mathcal{A}$; es decir,

$$R = \int_{\mathcal{A}} dR = \int_{\mathcal{A}} w\,ds = \int_{\mathcal{A}} dA = A \tag{8.22}$$

Igualando los momentos de los sistemas de cargas en las figuras 8.16(a) y (b) respecto a los ejes coordenados se obtiene

$$\Sigma M_x = R\bar{y} = \int_{\mathcal{A}} y\,dR \qquad \Sigma M_y = -R\bar{x} = -\int_{\mathcal{A}} x\,dR$$

Después de sustituir $R = A$ y $dR = dA$, se obtiene

$$A\bar{y} = \int_{\mathcal{A}} y\,dA \qquad A\bar{x} = \int_{\mathcal{A}} x\,dA$$

de donde se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{A}} x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{A}} y\,dA}{A} \tag{8.23}$$

Comparando las ecuaciones (8.23) y (8.10), se concluye que **R** actúa en el centroide de la región bajo el diagrama de carga. Este punto está identificado con C en la figura 8.16(b). La coordenada z del centroide es irrelevante, ya que **R** es un vector deslizante.

En resumen, las cargas lineales distribuidas a lo largo de una curva plana tienen las propiedades siguientes:

- La magnitud de la fuerza resultante es igual al área bajo el diagrama de carga.
- La línea de acción de la fuerza resultante pasa por el centroide del área bajo el diagrama de carga.

A estas conclusiones se llegó en el apartado 3.6 para cargas distribuidas a lo largo de líneas rectas; ahora se aprecia que también son válidas para líneas curvas.

d. Presión uniforme sobre superficies curvas

Presión uniforme se refiere al caso especial en el que la magnitud de la intensidad de carga es constante. Si p es constante, la ecuación (8.20) se transforma en

$$\mathbf{R} = \int_{\mathcal{A}} p\mathbf{n}\,dA = p\int_{\mathcal{A}} \mathbf{n}\,dA \tag{8.24}$$

Mediante el análisis vectorial se puede demostrar que

$$\mathbf{n}\,dA = dA_x\,\mathbf{i} + dA_y\,\mathbf{j} + dA_z\,\mathbf{k}$$

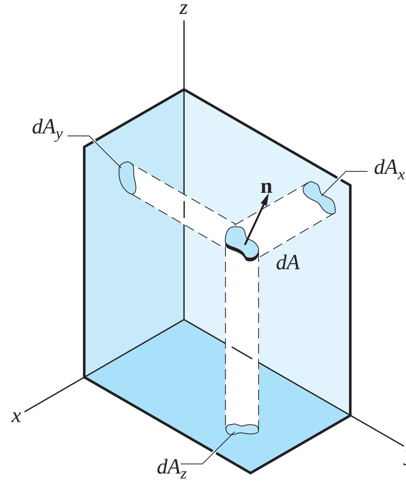


Fig. 8.17

donde dA_x, dA_y y dA_z son las proyecciones de dA sobre los tres planos coordenados, como se muestra en la figura 8.17. Por tanto, la ecuación (8.24) se puede escribir como

$$\mathbf{R} = p\left(\mathbf{i}\int_{\mathscr{A}} dA_x + \mathbf{j}\int_{\mathscr{A}} dA_y + \mathbf{k}\int_{\mathscr{A}} dA_z\right) = p(A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})$$

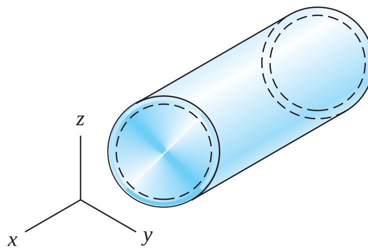
o

$$R_x = pA_x \qquad R_y = pA_y \qquad R_z = pA_z \tag{8.25}$$

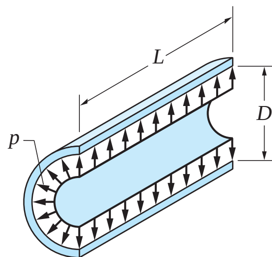
donde A_x, A_y y A_z son las proyecciones del área de carga sobre los planos coordenados. En principio, se podrían utilizar las ecuaciones de momentos para determinar la línea de acción de **R**. Sin embargo, en muchos casos la línea de acción se puede determinar por simetría.

Existen muchas aplicaciones prácticas en las que los resultados de las ecuaciones (8.25) se pueden utilizar. Por ejemplo, considere el recipiente cilíndrico con diámetro interior D, como se muestra en la figura 8.18(a), que está sometido a una presión interna uniforme p. La mitad del recipiente y la presión que actúa sobre él se muestran en la figura 8.18(b). Es claro que la presión p tiene una fuerza resultante p_b que tiende a romper el recipiente (cortarlo a lo largo). Esta fuerza de ruptura se puede calcular utilizando integración como se indica en la ecuación (8.24). Sin embargo, de la ecuación (8.25), de inmediato se obtiene $P_b = pA_y = pDL$, como se muestra en la figura 8.18(c).

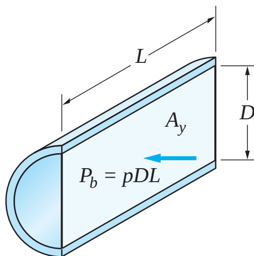
Si bien la fórmula "la fuerza es igual a la presión por el área proyectada" es muy útil, se debe recordar que sólo es válida para presión uniforme.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8.18

e. Presión de fluidos

Si una superficie está sumergida en un fluido de peso específico γ, la presión ejercida por el fluido es $p = \gamma h$, donde h es la profundidad medida desde la superficie libre del fluido. La resultante de esta presión se podría obtener por integración, pero si la superficie es curva, el análisis se puede complicar debido a que tanto la magnitud como la dirección de p varían. Suele ser más fácil encontrar la resultante mediante el análisis de equilibrio de un volumen de agua que está limitado por la superficie curva, como se ilustra a continuación.

Ahora se determina la resultante de la presión del agua que actúa sobre la superficie curva *AB* de la presa ilustrada en la figura 8.19(a) considerando el equilibrio del cuerpo de agua contenido en la región *ABC*, como se muestra en la figura 8.19(b). El DCL del agua en la figura 8.19(c) contiene las fuerzas siguientes:

R_1: resultante de la presión uniforme ejercida por el agua arriba de la región.
R_2: resultante de la presión que varía linealmente debido al agua que se encuentra a la derecha de la región.
R_{AB}: resultante de la presión ejercida por la presa; es igual y opuesta a la fuerza del agua que actúa sobre la parte *AB* de la presa.
W: peso del agua contenida en la región; actúa en el centroide *G* de la región *ABC*.

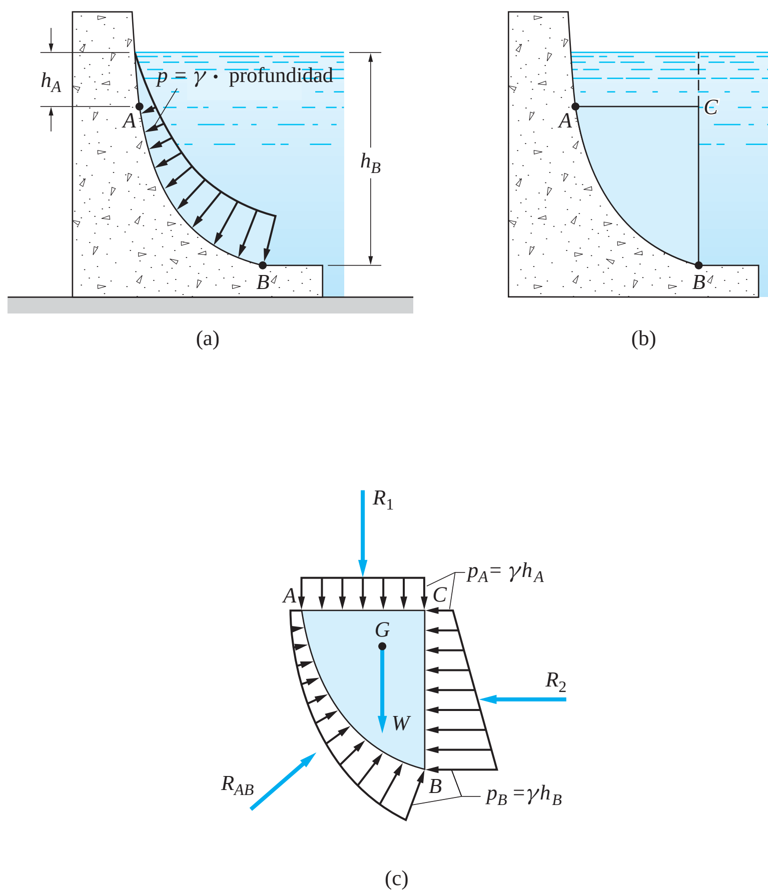


Fig. 8.19

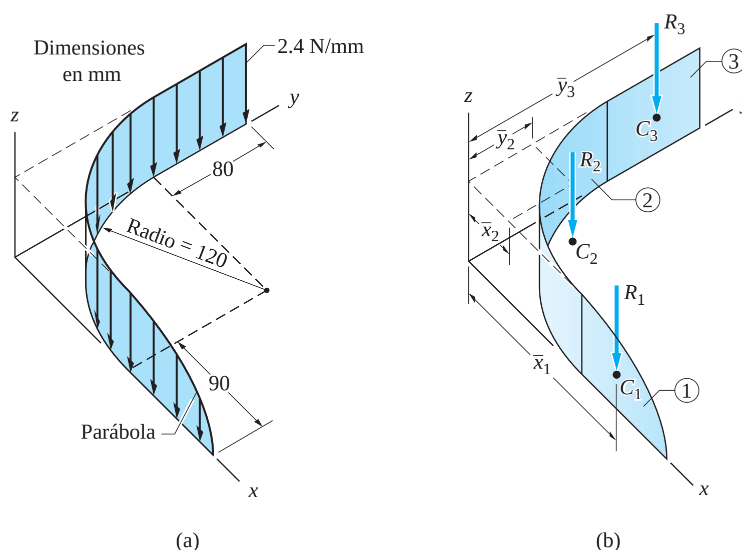
Las fuerzas R_1, R_2 y W se pueden determinar con los métodos descritos antes en esta sección. Entonces las componentes horizontal y vertical de R_{AB} se pueden encontrar mediante las ecuaciones de equilibrio de fuerzas. Para determinar la línea de acción de R_{AB} se necesitaría una ecuación de momentos.

Problema de ejemplo **8.13**

Determine la resultante de la carga lineal que se muestra en la figura (a).

Solución

Como se indica en la figura (b), la carga lineal original se representa como la suma de las tres componentes siguientes: 1. la carga parabólica distribuida a lo largo de una línea recta sobre el eje *x*, 2. la carga uniforme distribuida a lo largo del cuarto de círculo que se encuentra en el plano *xy* y 3. la carga rectangular a lo largo del eje *y*. La fuerza resultante de cada componente de carga es igual al área bajo el diagrama de carga correspondiente, actuando por el centroide del diagrama.



(a) (b)

Componente de carga 1

Consultando la tabla 8.1 para la parábola, se obtiene

$$R_1 = A_1 = \frac{2}{3}(90)(2.4) = 144.0 \text{ N}$$

$$\bar{x}_1 = 120 + \frac{3}{8}(90) = 153.75 \text{ mm} \qquad \bar{y}_1 = 0$$

Componente de carga 2

$$R_2 = A_2 = \frac{\pi R}{2}(2.4) = \frac{\pi(120)}{2}(2.4) = 452.4 \text{ N}$$

Observando que las coordenadas centroidales *x* y *y* para la superficie curva son las mismas que las coordenadas centroidales para el cuarto de círculo que se encuentra en el plano *xy*, de la tabla 8.2 se obtiene

$$\bar{x}_2 = \bar{y}_2 = R - \frac{2R}{\pi} = 0.3634\text{R} = 0.3634(120) = 43.6 \text{ mm}$$

Componente de carga 3

$$R_3 = A_3 = (80)(2.4) = 192.0 \text{ N}$$
$$\bar{x}_3 = 0 \qquad \bar{y}_3 = 120.0 + 40.0 = 160.0 \text{ mm}$$

Carga resultante

A partir de los datos anteriores, se tiene que la magnitud de la resultante es

$$R = \Sigma R = 144.0 + 452.4 + 192.0 = 788.4 \text{ N} \qquad \textit{Respuesta}$$

Las coordenadas del punto por el que actúa **R** se determinan con

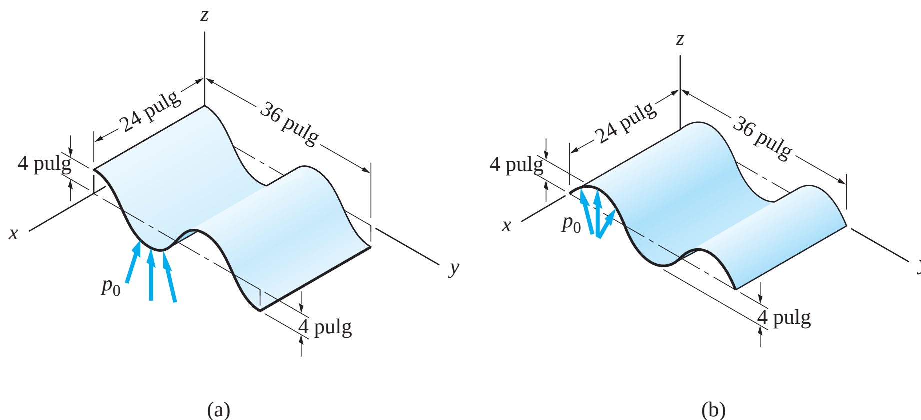
$$\bar{x} = \frac{\Sigma R\bar{x}}{R} = \frac{(144.0)(153.75) + (452.4)(43.6) + (192.0)(0)}{788.4}$$
$$= 53.1 \text{ mm} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma R\bar{y}}{R} = \frac{(144.0)(0) + (452.4)(43.6) + (192.0)(160.0)}{788.4}$$
$$= 64.0 \text{ mm} \qquad \textit{Respuesta}$$

Debe ubicar este punto en la figura (a) para confirmar que representa una ubicación razonable para la línea de acción de la fuerza resultante.

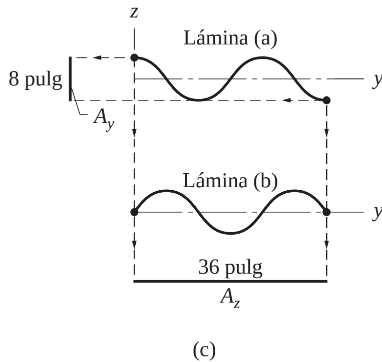
Problema de ejemplo **8.14**

Los lados inferiores de las láminas corrugadas de 36 pulg × 24 pulg que se muestran en las figuras (a) y (b) soportan una presión normal uniforme de $p_0 = 0.6$ lb/pulg^2. Calcule las componentes rectangulares de la fuerza resultante que actúa sobre el lado inferior de cada lámina.



Solución

Como cada lámina está sometida a una presión normal uniforme, es posible determinar las componentes de la fuerza resultante utilizando la presión por el área proyectada. Entonces $R_x = p_0A_x$, $R_y = p_0A_y$ y $R_z = p_0A_z$, donde A_x, A_y y A_z son las áreas proyectadas de la superficie de carga sobre los tres planos coordenados.



(c)

En la ilustración de la figura (c) se muestra que las áreas proyectadas son

Lámina (a)

$$A_x = 0 \qquad A_y = 8 \times 24 = 192 \text{ pulg}^2$$
$$A_z = 36 \times 24 = 864 \text{ pulg}^2$$

Lámina (b)

$$A_x = 0 \qquad A_y = 0$$
$$A_z = 36 \times 24 = 864 \text{ pulg}^2$$

Por tanto, para la lámina (a), las componentes rectangulares de la fuerza resultante son

$$R_x = p_0 A_x = 0 \qquad R_y = p_0 A_y = 0.6(192) = 115.2 \text{ lb}$$
$$R_z = p_0 A_z = 0.6(864) = 518 \text{ lb}$$
Respuesta

Para la lámina (b), se tiene

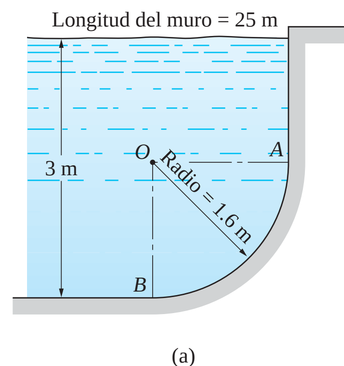
$$R_x = p_0 A_x = 0 \qquad R_y = p_0 A_y = 0$$
$$R_z = p_0 A_z = 0.6(864) = 518 \text{ lb}$$
Respuesta

Problema de ejemplo 8.15

Una alberca está llena con agua hasta una profundidad de 3 m, como se muestra en la figura (a). Determine la magnitud y la línea de acción de la fuerza resultante que actúa sobre la parte circular *AB* del muro. La longitud del muro (dimensión perpendicular a la hoja de este libro) es 25 m y la densidad del agua es 1000 kg/m^3.

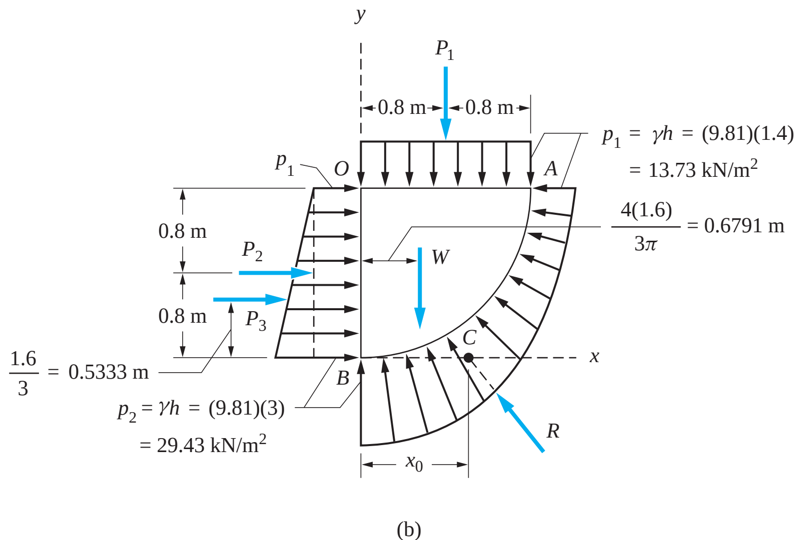
Solución

El diagrama de cuerpo libre del agua contenida en la región *OAB* (25 m de longitud) se muestra en la figura (b). Las presiones p_1 y p_2 son iguales a los productos del peso



(a)

específico del agua γ y las profundidades en A y B, respectivamente. Si ρ es la masa, se tiene $\gamma = \rho g = 1000(9.81) = 9.81 \text{ kN/m}^3$.



(b)

Las fuerzas resultantes P_1 y P_2 son causadas por las cargas uniformemente distribuidas que se muestran, y P_3 se debe a la parte triangular de la carga. Cada una de estas fuerzas es igual al producto de la presión (para P_3 se utiliza la presión promedio) y el área sobre la que actúa la presión.

$$P_1 = p_1 A = (13.73)(1.6)(25) = 549.2 \text{ kN}$$

$$P_2 = p_1 A = (13.73)(1.6)(25) = 549.2 \text{ kN}$$

$$P_3 = \frac{p_2 - p_1}{2} A = \frac{29.43 - 13.73}{2}(1.6)(25) = 314.0 \text{ kN}$$

Las líneas de acción de P_1, P_2 y P_3 pasan por los centroides de los diagramas de carga correspondientes. El peso W del agua contenida en la región OAB es

$$W = \gamma \times \text{volumen} = (9.81)\frac{!\ (1.6)^2}{4}(25) = 493.1 \text{ kN}$$

Si se designa **R** como la fuerza resultante ejercida sobre el agua por la parte curva del muro, sus componentes se pueden encontrar a partir de ecuaciones de equilibrio de fuerzas. Con referencia al DCL en la figura (b), se obtiene

$$\Sigma F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \quad P_2 + P_3 - R_x = 0$$

$$R_x = P_2 + P_3 = 549.2 + 314.0 = 863.2 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad +\!\uparrow \quad R_y - W - P_1 = 0$$

$$R_y = W + P_1 = 493.1 + 549.2 = 1042.3 \text{ kN}$$

Por tanto, la magnitud y dirección de **R** son

$$R = \sqrt{(863.2)^2 + (1042.3)^2}$$
$$= 1353 \text{ kN}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{1042.3}{863.2} = 50.4°$$

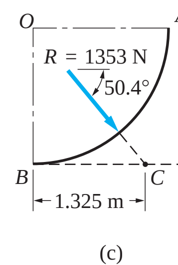
Para determinar la línea de acción de **R**, se aplica la ecuación de equilibrio de momentos. Eligiendo el punto B en la figura (b) como el centro de momentos y designando x_0 como la distancia entre B y C (el punto donde R interseca el eje x), se obtiene

$$\Sigma M_B = 0 \quad \circlearrowleft + \quad R_y x_0 - P_1(0.8) - P_2(0.8) - P_3(0.5333) - W(0.6791) = 0$$

de donde se obtiene

$$x_0 = \frac{549.2(0.8) + 549.2(0.8) + 314.0(0.5333) + 493.1(0.6791)}{1042.3} = 1.325 \text{ m}$$

La fuerza ejercida por el agua sobre el muro es igual y opuesta a la fuerza determinada antes, como se muestra en la figura (c).



(c)

Respuesta

Problemas

A menos que se especifique integración, los problemas siguientes se deben analizar consultando la información de las tablas 8.1 a 8.3.

8.103 La presión del viento que actúa sobre un cilindro se puede aproximar con $p = p_0 \cos\theta$, donde p_0 es una constante (observe que en el lado a sotavento la presión es negativa). Determine la fuerza resultante de la presión del viento sobre un cilindro de radio R y la longitud L por integración.

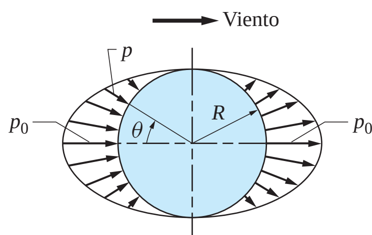


Fig. P8.103

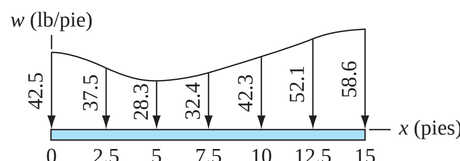


Fig. P8.104

8.104 La viga soporta la carga lineal distribuida que se muestra. Utilice integración numérica para determinar la fuerza resultante y su línea de acción.

8.105 La presión que actúa sobre la placa cuadrada varía como

$$p = p_0\left(\frac{x}{b} + \frac{xy}{b^2}\right)$$

donde p_0 es una constante. Mediante integración encuentre la fuerza resultante de la presión y las coordenadas x y y de su línea de acción.

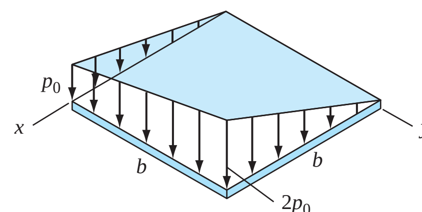


Fig. P8.105

8.106 La intensidad de la carga lineal que actúa sobre el borde de la placa semicircular varía como $w = w_0\, y/a$, donde w_0 es una constante y a es el radio de la placa. Utilice integración para determinar la fuerza resultante y para ubicar su línea de acción.

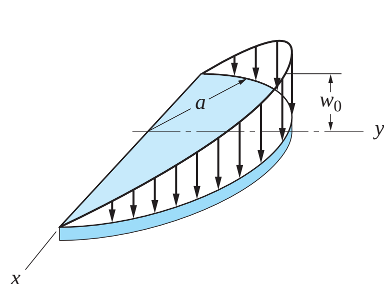


Fig. P8.106

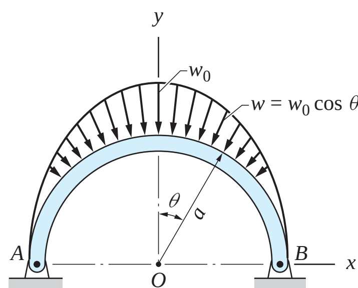


Fig. P8.107

8.107 Mediante integración determine la fuerza resultante de la carga lineal normal que actúa sobre el arco circular.

8.108 Si la intensidad de la carga lineal es $w = [(40x - x^2)/40$ lb/pulg, donde x se mide en pulgadas, utilice integración para encontrar la resultante.

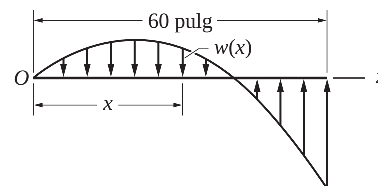


Fig. P8.108

8.109 Determine la fuerza resultante de la carga lineal y las coordenadas x y y de su línea de acción.

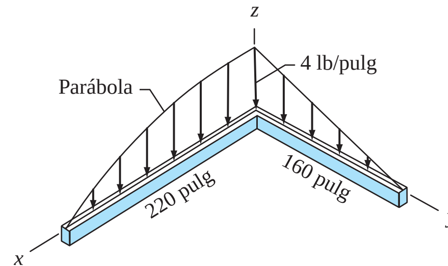


Fig. P8.109

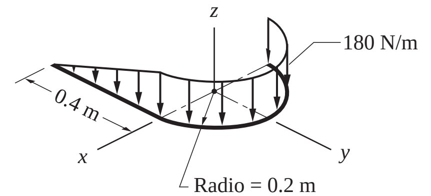
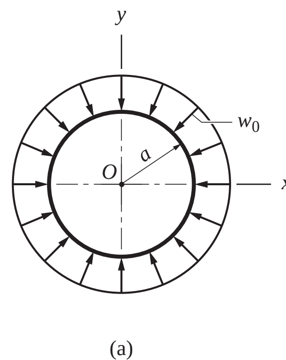
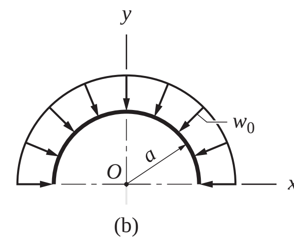


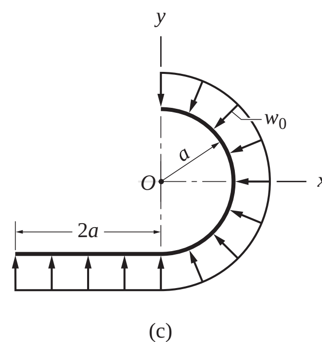
Fig. P8.110

8.110 Encuentre la resultante de la carga lineal que se muestra en la figura.

8.111 Determine la fuerza resultante o el par resultante para cada una de las cargas lineales que se indican. En cada caso la carga es normal a la línea y tiene una intensidad constante w_0.







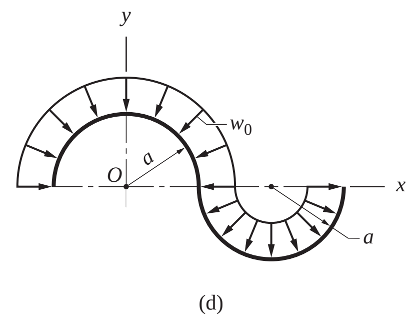


Fig. P8.111

8.112 La superficie interior de cada cascarón delgado soporta una presión normal uniforme de intensidad p_0. Calcule R, la magnitud de la fuerza resultante para cada caso.

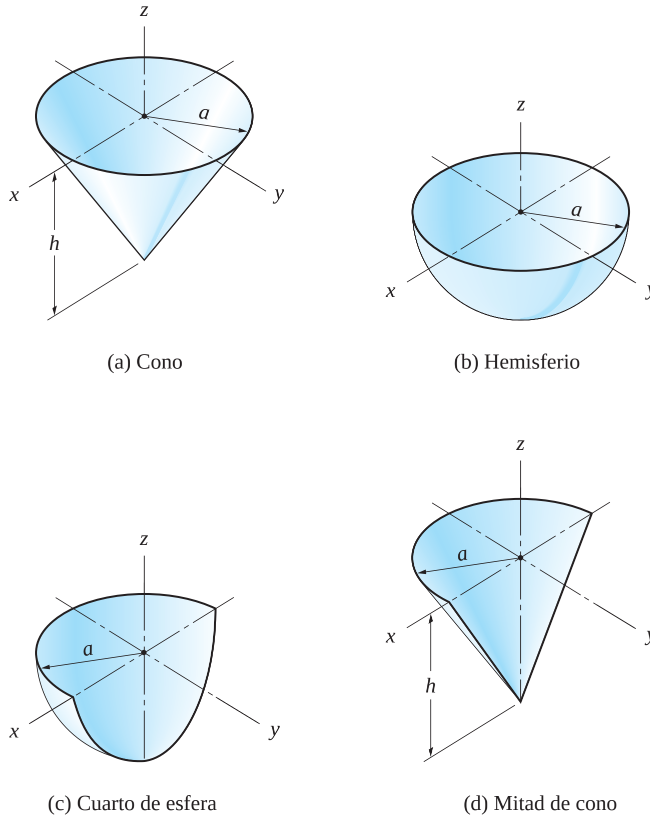


Fig. P8.112

8.113 Calcule la fuerza resultante causada por el agua que actúa sobre la presa de arco parabólico. Los niveles de agua son 16 pies en el lado corriente arriba y cero en el lado corriente abajo. Para el agua utilice $\gamma = 62.4$ lb/pie^3.

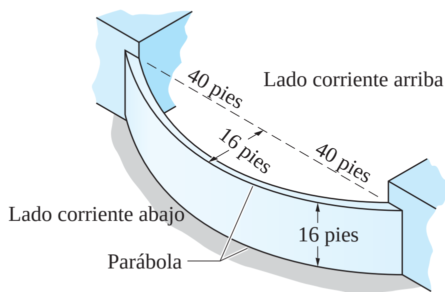


Fig. P8.113

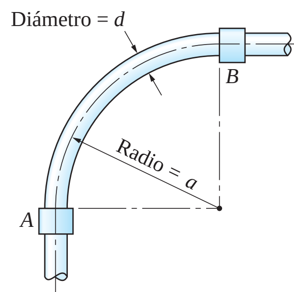


Fig. P8.114

8.114 Determine la fuerza resultante que actúa sobre el codo del tubo de pared delgada cuando éste soporta una presión uniforme interna p_0.

8.115 La placa delgada de área A está sumergida en un fluido de peso específico γ. Demuestre que la fuerza resultante de la presión del fluido sobre un lado de la placa es $R = \gamma \bar{h} A$ donde $\bar{h}$ es la profundidad del centroide C del área de la placa.

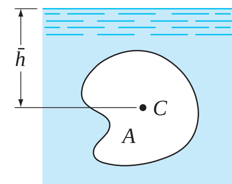


Fig. P8.115

8.116 Cada una de las tres compuertas tiene un ancho constante c (perpendicular a la hoja de este libro). Calcule la fuerza P necesaria para mantener cada compuerta en la posición indicada. Exprese sus respuestas en términos de b, c, h y γ (el peso específico del fluido).

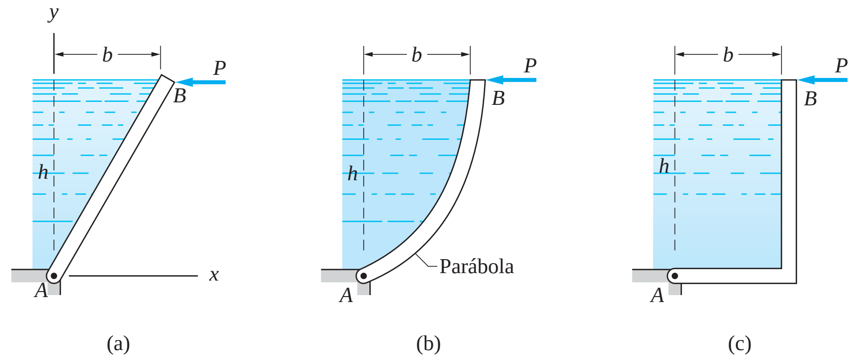


Fig. P8.116

8.117 La presa de concreto que se muestra en sección transversal retiene agua dulce ($\rho = 1000$ kg/m^3). Determine la fuerza resultante **R** de la presión del agua que actúa sobre una longitud de un metro de la presa. Además, calcule las coordenadas de un punto sobre la línea de acción de **R**.

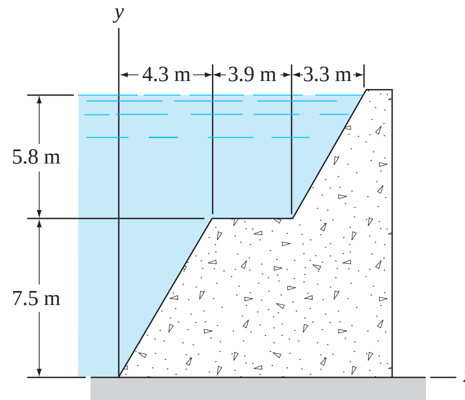


Fig. P8.117

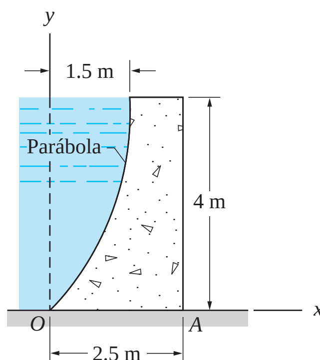


Fig. P8.118

8.118 Una presa de concreto de agua salada se muestra en sección transversal. ¿Es segura la presa contra el volcamiento respecto al borde A? Las densidades son 2400 kg/m^3 para el concreto y 1030 kg/m^3 para el agua salada.

8.119 Determine la fuerza F necesaria para jalar el tapón de 2.5 oz del drenaje de un lavabo si la profundidad del agua es 9 pulg. Utilice $\gamma = 0.036$ lb/pulg^3 para el agua e ignore el peso de la cadena.

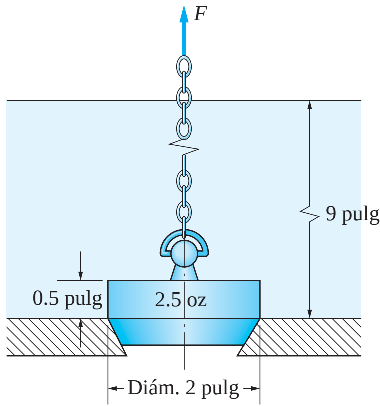


Fig. P8.119

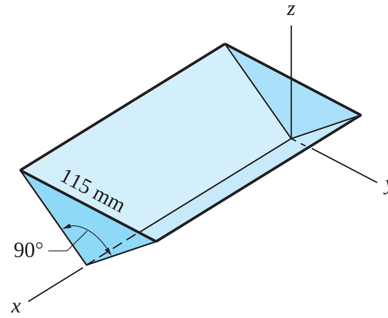


Fig. P8.120

8.120 Si el canalón está lleno con agua ($\rho = 1000$ kg/m^3), determine la resultante de la presión del agua que actúa sobre una de las placas extremas triangulares equiláteras.

8.121 La presión que actúa sobre la placa circular de radio a varía como $p = p_0[1 + (r/a)\cos\theta]$, donde p_0 es una constante. Mediante integración encuentre la fuerza resultante y ubique su línea de acción.

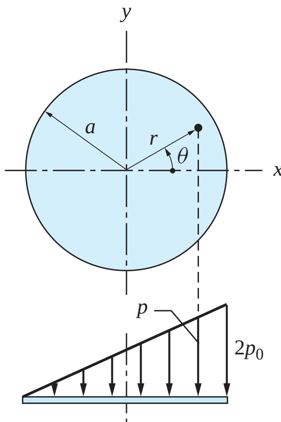


Fig. P8.121

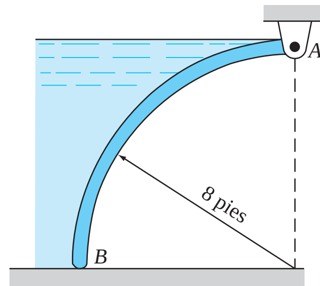


Fig. P8.121

8.122 La compuerta de cuarto de círculo de 10 pies de ancho AB está articulada en A. Determine la fuerza de contacto entre la compuerta y la superficie lisa en B debida a la presión del agua que actúa sobre la compuerta. Utilice $\gamma = 62.4$ lb/pie^3 para el agua.

Repaso de ecuaciones

Primeros momentos de áreas y curvas

Área plana: $Q_x = \int_{\mathcal{A}} y\, dA \quad Q_y = \int_{\mathcal{A}} x\, dA$

Curva plana: $Q_x = \int_{\mathcal{L}} y\, ds \quad Q_y = \int_{\mathcal{L}} x\, ds$

Áreas y curvas compuestas

$$Q_x = \Sigma_i (Q_x)_i \qquad Q_y = \Sigma_i (Q_y)_i$$

Coordenadas centroidales de áreas y curvas

Área plana: $\bar{x} = Q_y / A \quad \bar{y} = Q_x / A$

Curva plana: $\bar{x} = Q_y / L \quad \bar{y} = Q_x / L$

Teoremas de Pappus-Guldinus

$$A = 2\pi Q_x$$

A = área de la superficie generada girando una curva plana respecto al eje x

Q_x = primer momento de la curva generatriz respecto al eje x

$$V = 2\pi Q_x$$

V = volumen del sólido generado girando un área plana respecto al eje x

Q_x = primer momento del área generatriz respecto al eje x

Centro de gravedad: cuerpos compuestos

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_i W_i \bar{x}_i}{\Sigma_i W_i} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma_i W_i \bar{y}_i}{\Sigma_i W_i} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma_i W_i \bar{z}_i}{\Sigma_i W_i}$$

Resultante de una carga normal sobre una superficie plana

R = volumen bajo la superficie de carga

$\bar{x}, \bar{y}$ = coordenadas centroidales del volumen bajo la superficie de carga

Resultante de una presión uniforme sobre una superficie curva

$$R_x = pA_x \qquad R_y = pA_y \qquad R_z = pA_z$$

Problemas de repaso

8.123 El centro de gravedad de la figura plana se ubica en G. Determine las longitudes a y b.

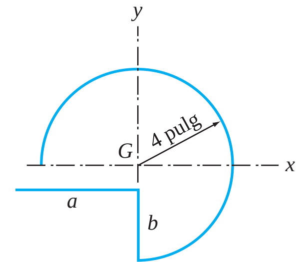


Fig. P8.123

8.124 La compuerta de 10 m de ancho retiene el agua que tiene una profundidad de 6 pies. Calcule la magnitud de la reacción en la articulación en A y la fuerza de contacto entre la compuerta y la superficie lisa en B. Ignore el peso de la compuerta.

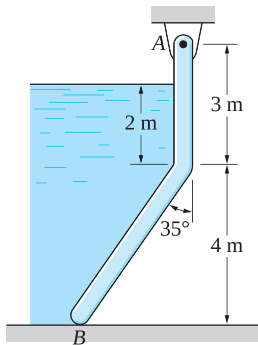


Fig. P8.124

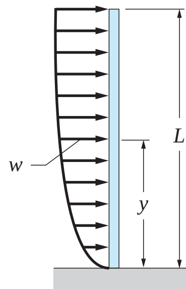


Fig. P8.125

8.125 La presión del viento que actúa sobre un poste de longitud L resulta en la carga lineal $w = w_0[1 - \exp(-5y/L)]$, donde w_0 es una constante. Mediante integración determine el par reactivo en la base del poste.

8.126 El recipiente abierto en su parte superior y cerrado en su parte inferior, está hecho de lámina metálica de espesor uniforme. Ubique su centro de gravedad.

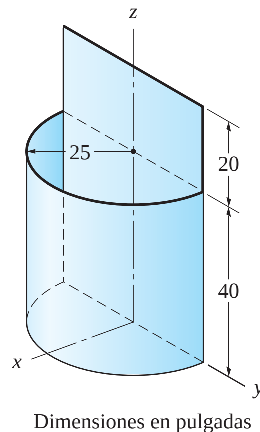


Fig. P8.126

8.127 Encuentre el volumen del sólido que se genera girando el área plana ilustrada respecto al eje y.

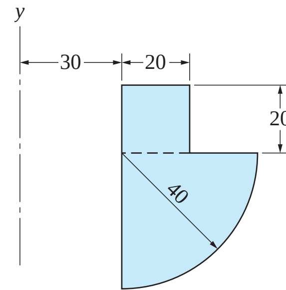


Fig. P8.127, P8.128

8.128 Determine el área superficial del sólido que genera girando el área plana ilustrada respecto al eje y.

8.129 La placa rectangular está sometida a la presión

$$p = p_0 \frac{x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$$

Determine la fuerza resultante de la presión y las coordenadas de su punto de aplicación.

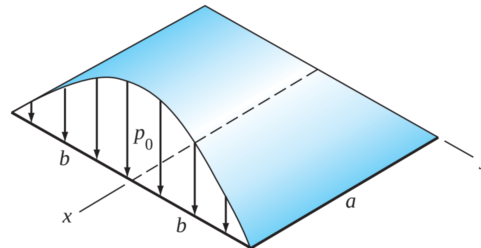


Fig. P8.129

8.130 Calcule la tensión en cada una de las sogas que soportan la placa de acero uniforme con peso de 0.284 lb/pulg^3.

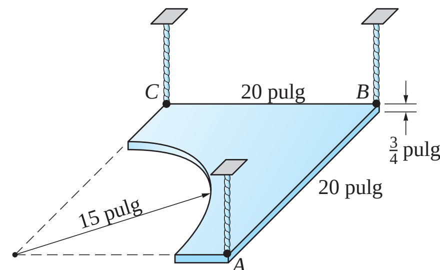


Fig. P8.130

8.131 Utilizando el método de las áreas compuestas, encuentre el centroide del complemento parabólico truncado.

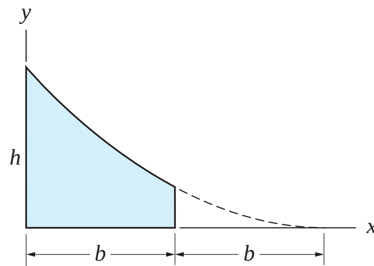


Fig. P8.131, P8.132

8.132 Encuentre el centroide del complemento parabólico truncado mediante integración.

8.133 El destornillador tiene un mango de plástico y un cuerpo de acero de 9 pulg. Encuentre la coordenada x de su centro de masa. Utilice $\gamma = 0.055$ lb/pulg^3, para el plástico y $\gamma = 0.283$ lb/pulg^3 para el acero.

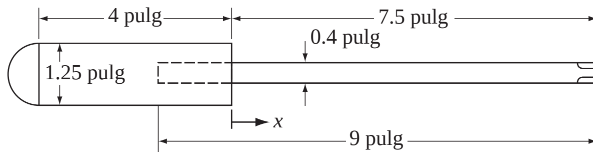


Fig. P8.133

8.134 Determine la dimensión h si el centroide del sólido homogéneo asimétrico está ubicado en C.

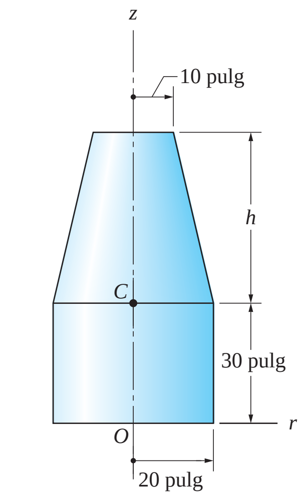


Fig. P8.134

8.135 Dos cascarones semiesféricos de diámetro interior de 1 m están unidos entre sí con 12 pernos espaciados regularmente. Si la presión interior se eleva hasta 300 kPa arriba de la presión atmosférica, determine la fuerza de tensión en cada perno.

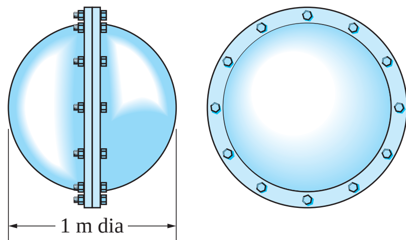


Fig. P8.135

8.136 Calcule el área de la superficie generada cuando la curva z plana se gira respecto (a) al eje x y (b) al eje y.

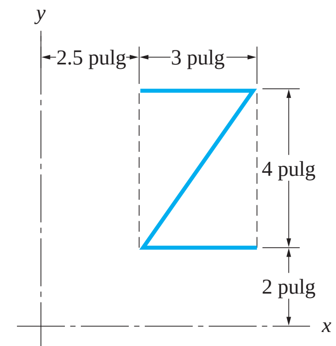


Fig. P8.136

8.137 Determine la resultante de la carga lineal si $w_0 = 36$ lb/pie.

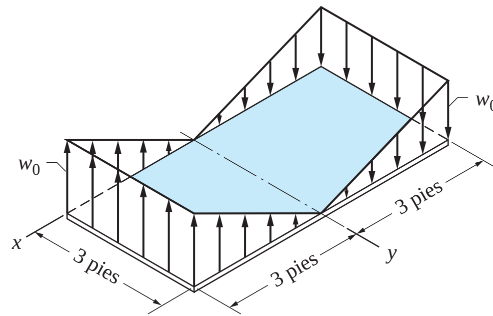


Fig. P8.137

8.138 Encuentre las coordenadas del centroide de la región plana. La región es simétrica respecto al eje *y*.

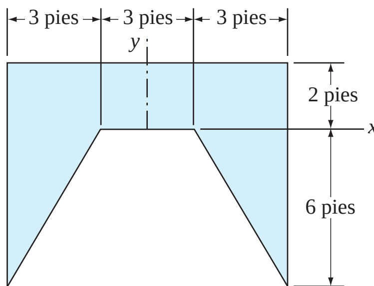


Fig. P8.138

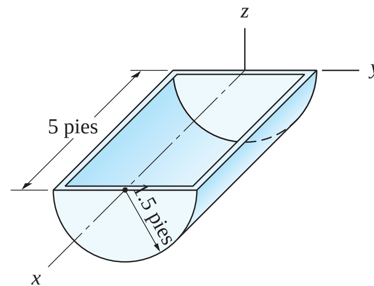


Fig. P8.139, P8.140

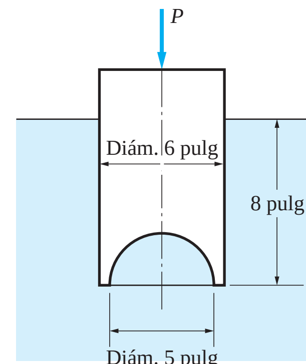


Fig. P8.141

8.139 El canalón de lámina metálica tiene pared con espesor uniforme. Determine las coordenadas de su centro de gravedad.

8.140 El canalón está lleno con agua ($\gamma = 62.4$ lb/pie^3). Determine la fuerza resultante de la presión del agua que actúa sobre uno de los extremos semicirculares y las coordenadas de su punto de aplicación.

8.141 La lata cilíndrica de pared delgada con una depresión esférica pesa 0.2 lb. Determine la fuerza *P* necesaria para empujar la lata dentro del agua hasta una profundidad de 8 pulg. Utilice $\gamma = 0.036$ lb/pulg^3 para el agua.

8.142 Encuentre la ubicación del centroide de la región plana.

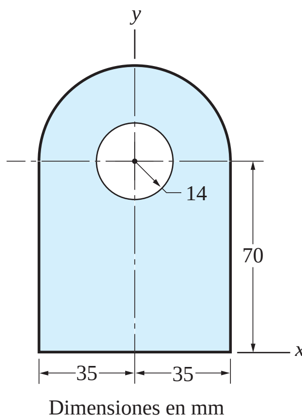


Fig. P8.142



9 Momentos y productos de inercia de áreas



La resistencia y rigidez de una viga la determinan el momento de inercia de su área de sección transversal. El cálculo de los momentos de inercia de áreas es el tema principal de este capítulo. Peter Dazeley/Photographer's Choice RF/Getty Images

9.1 Introducción

Los primeros momentos de áreas, como se presentaron en el capítulo 8, se relacionan con las integrales $\int x\ dA$ y $\int y\ dA$. En este capítulo, se analizan los segundos momentos de inercia de áreas planas, también conocidos como *momentos de inercia*, $\int x^2\ dA$ y $\int y^2\ dA$. También se introduce el *producto de inercia* $\int xy\ dA$.

Los momentos y productos de inercia se originan en el análisis de distribuciones de cargas lineales que actúan sobre áreas planas. Tales distribuciones ocurren en miembros sometidos a flexión (vigas) y en ejes circulares que soportan pares de torsión. Además, los momentos y productos de inercia se encuentran en la determinación de resultantes que actúan sobre superficies sumergidas.

En este capítulo también se estudia la dependencia de los momentos y productos de inercia en la orientación del sistema coordenado. Esta dependencia resulta en las ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia, que se utilizan para determinar los momentos de inercia máximo y mínimo en un punto. Este capítulo concluye con un análisis del círculo de Mohr, que es un método gráfico para representar las ecuaciones de transformación.

9.2 Momentos de inercia de áreas y momentos polares de inercia

a. Momento de inercia de área

En la sección 8.2, los primeros momentos del área de una región plana $\mathscr{A}$ respecto a los ejes x y y se definieron como

$$Q_x = \int_{\mathscr{A}} y\, dA \qquad Q_y = \int_{\mathscr{A}} x\, dA \tag{9.1}$$

donde A es el área de la región y x y y son las coordenadas del elemento diferencial de área dA, como se muestra en la figura 9.1.

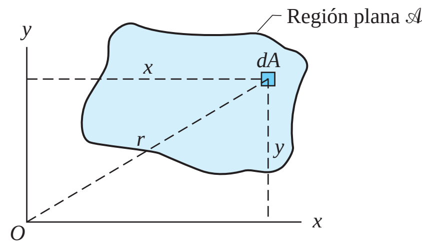


Fig. 9.1

Los *momentos de inercia del área* respecto a los ejes x y y, respectivamente, se definen por*

$$I_x = \int_{\mathscr{A}} y^2\, dA \qquad I_y = \int_{\mathscr{A}} x^2\, dA \tag{9.2}$$

Como las distancias x y y están elevadas al cuadrado, I_x e I_y en ocasiones se denominan *segundos momentos del área*.

La dimensión para el momento de inercia de área es $[L^4]$. Por tanto, las unidades son pulg^4, mm^4, etc. Aunque el primer momento de un área puede ser positivo, negativo o cero, su momento de inercia siempre es positivo, ya que tanto x como y en las ecuaciones (9.2) están elevadas al cuadrado.

*El término *momento de inercia de un área* no se debe confundir con *momento de inercia de un cuerpo*, el cual ocurre en el estudio de la dinámica. El último término se refiere a la habilidad de un cuerpo a resistir un cambio en su rotación y es una propiedad de la masa. Debido a que un área no tiene masa, no posee inercia. Sin embargo, el término *momento de inercia* se utiliza ya que las integrales en las ecuaciones (9.2) son similares a la expresión $\int r^2\, dm$ que define el momento de inercia de un cuerpo.

Advertencia Recuerde que el primer momento de inercia de un área se puede obtener con $Q_x = A\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es la coordenada centroidal del área. Un error que se comete con frecuencia es suponer que $I_x = A\bar{y}^2$. Si bien el primer momento de un área es igual al área por la distancia centroidal, el segundo momento de un área *no* es igual al área por la distancia centroidal al cuadrado.

b. Momento polar de inercia

Con referencia a la figura 9.1, el momento polar de inercia de un área respecto al punto O (hablando estrictamente, respecto a un eje por O, perpendicular al plano del área) se define por

$$J_O = \int_{\mathscr{A}} r^2\, dA \tag{9.3}$$

donde r es la distancia desde O hasta el elemento diferencial de área dA. Observe que el momento polar de un área siempre es positivo y que su dimensión es $[L^4\}$.

De la figura 9.1 se observa que $r^2 = y^2 + x^2$, lo que da la relación siguiente entre el momento polar de inercia y el momento de inercia:

$$J_O = \int_{\mathscr{A}} r^2\, dA = \int_{\mathscr{A}} (y^2 + x^2)\, dA = \int_{\mathscr{A}} y^2\, dA + \int_{\mathscr{A}} x^2\, dA$$

o

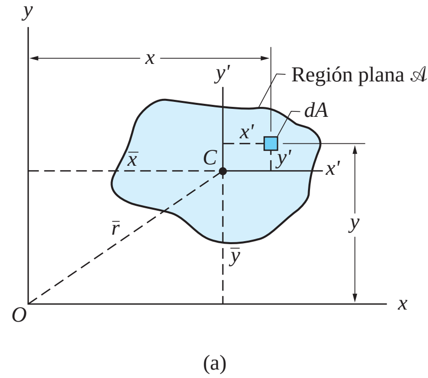
$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

Esta relación establece que el momento polar de inercia de un área respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos de inercia del área respecto a dos ejes perpendiculares que se intersecan en O.

c. Teoremas de los ejes paralelos

Existe una relación simple entre los momentos de inercia respecto a dos ejes paralelos, siempre que uno de los ejes pase por el centroide del área. Con referencia a la figura 9.2(a), sea C el centroide del área contenida en la región plana $\mathscr{A}$ y sea x' el eje centroidal que es paralelo al eje x. Denotamos el momento de inercia respecto al eje x' por $\bar{I}_x$, que se debe leer como el "momento de inercia respecto al eje x centroidal" (respecto al eje que es paralelo al eje x y que pasa por el centroide del área). Observe que la coordenada y del área diferencial dA se puede escribir como $y = \bar{y} + y'$, donde $\bar{y}$ (la coordenada centroidal del área) es la distancia entre los dos ejes. Las ecuaciones (9.2) producen la expresión siguiente para el momento de inercia del área respecto al eje x (observe que $\bar{y}$ es constante).

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{\mathscr{A}} y^2\, dA = \int_{\mathscr{A}} (\bar{y} + y')^2\, dA \\ &= \bar{y}^2 \int_{\mathscr{A}} dA + 2\bar{y} \int_{\mathscr{A}} y' dA + \int_{\mathscr{A}} (y')^2 dA \end{aligned} \tag{a}$$



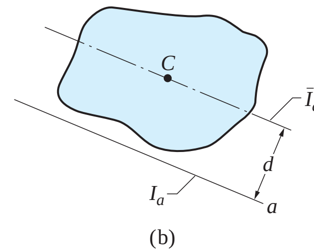


Fig. 9.2

Observando que $\int_{\mathscr{A}} dA = A$ (el área de la región), $\int_{\mathscr{A}} y'dA = 0$ (el primer momento del área respecto al eje centroidal desaparece) y $\int_{\mathscr{A}} (y')^2 dA = \bar{I}_x$ (el segundo momento del área respecto al eje x'), la ecuación (a) se simplifica a

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 \tag{9.5a}$$

Esta relación se conoce como *teorema de los ejes paralelos* para el momento de inercia de un área. La distancia $\bar{y}$ en ocasiones se denomina *distancia de transferencia* (la distancia a través de la cual el momento de inercia se debe "transferir"). Es importante recordar que el teorema es válido sólo si $\bar{I}_x$ es el momento de inercia respecto al eje centroidal x. Si este no es el caso, el término $\int_{\mathscr{A}} y'dA$ en la ecuación (a) no desaparecerá, dando lugar a un término adicional en la ecuación 9.5(a).

Como la dirección del eje x en la figura 9.2(a) puede elegirse arbitrariamente, el teorema de los ejes paralelos es aplicable a ejes de cualquier orientación. Por ejemplo, aplicando el teorema del eje y, resulta

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 \tag{9.5b}$$

donde $\bar{I}_y$ es el momento de inercia del área respecto al eje centroidal y; es decir, el eje y' en la figura 9.2(a) y $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide.

En general, el teorema de los ejes paralelos se puede escribir como

$$I_a = \bar{I}_a + Ad^2 \tag{9.6}$$

Como se ilustra en la figura 9.2(b), I_a es el momento de inercia respecto a un eje a orientado arbitrariamente, $\bar{I}_a$ representa el momento de inercia respecto al eje paralelo que pasa por el centroide C y d es la distancia entre los ejes (distancia de transferencia).

Por inspección de la ecuación (9.6), se observa que, dada la dirección del eje, el momento de inercia de un área es menor respecto al eje que pasa por el centroide del área. En otras palabras, $\bar{I}_a$ es menor que el momento de inercia respecto a cualquier otro eje que sea paralelo al eje a.

El teorema de los ejes paralelos también se aplica al momento polar de inercia. Denotando el momento polar de inercia del área respecto al origen O por J_O y respecto al centroide C por $\bar{J}_C$, se tiene de las ecuaciones (9.4) y (9.5)

$$J_O = I_x + I_y = (\bar{I}_x + A\bar{y}^2) + (\bar{I}_y + A\bar{x}^2)$$

Utilizando $\bar{I}_x + \bar{I}_y = \bar{J}_C$, esta ecuación se convierte en

$$J_O = \bar{J}_C + A\bar{r}^2 \tag{9.7}$$

donde $\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ es la distancia entre los puntos O y C, como se muestra en la figura 9.2(a).

d. Radio de giro

En algunas aplicaciones de ingeniería estructural, es práctica común introducir el *radio de giro de área*. Los radios de giro de un área respecto al eje x, el eje y y el origen O se definen como

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{9.8}$$

La dimensión del radio de giro es [L]. Sin embargo, el radio de giro no es una distancia con un significado físico claro, ni se puede determinar mediante una medición directa; su valor se puede estimar sólo con un cálculo utilizando las ecuaciones (9.8). Los radios de giro están relacionados por la ecuación

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2 \tag{9.9}$$

que se puede obtener sustituyendo las ecuaciones (9.8) en la ecuación (9.4).

e. Técnicas de integración

Al calcular el momento de inercia de un área respecto a un eje dado mediante integración, se debe elegir un sistema coordenado y decidir si se utiliza integración simple o doble. Los elementos diferenciales de área dA asociados con varios sistemas coordenados se analizaron en la sección 8.2 y se ilustraron en la figura 8.4.

Si se utiliza integración doble, los momentos de inercia se pueden calcular con las ecuaciones (9.2) de una manera directa. No obstante, en la integración simple las ecuaciones (9.2) se deben considerar en la forma

$$I_x = \int_{\mathscr{A}} dI_x \qquad I_y = \int_{\mathscr{A}} dI_y$$

donde dI_x y dI_y son los momentos de inercia del elemento de área dA respecto a los ejes x y y. En general, $dI_x = y^2\,dA$ sólo si todas las partes de un elemento de área están a la misma distancia y desde el eje x. Para satisfacer esta condición, el elemento de área debe ser un elemento diferencial doble ($dA = dx\,dy$) o una franja de ancho dy que sea paralela al eje x, como se muestra en la figura 8.4(c). Un argumento similar se aplica a dI_y.

f. *Método de las áreas compuestas*

Considere una región plana $\mathscr{A}$ que se ha dividido en subregiones $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, ... El momento de inercia del área de $\mathscr{A}$ respecto a un eje se puede calcular sumando los momentos de inercia de las subregiones respecto al mismo eje. Esta técnica, conocida como *método de las áreas compuestas*, se deduce directamente de la propiedad de las integrales definidas: la integral de una suma es igual a la suma de las integrales. Por ejemplo, I_x, el momento de inercia respecto al eje x, es igual a

$$I_x = \int_{\mathscr{A}} y^2\,dA = \int_{\mathscr{A}_1} y^2\,dA + \int_{\mathscr{A}_2} y^2\,dA + \int_{\mathscr{A}_3} y^2\,dA + \cdots$$

que se puede escribir como

$$I_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 + (I_x)_3 + \cdots \tag{9.10a}$$

donde $(I_x)_i$ es el momento de inercia del área de la subregión $\mathscr{A}_i$ respecto al eje x. Es obvio que el método de las áreas compuestas también se aplica al cálculo de los momentos polares de áreas:

$$J_O = (J_O)_1 + (J_O)_2 + (J_O)_3 + \cdots \tag{9.10b}$$

donde $(J_O)_i$ es el momento polar de inercia de la subregión $\mathscr{A}_i$ respecto al punto O.

Los momentos de inercia de las áreas componentes respecto a *sus ejes centroidales* se pueden encontrar en tablas, como las tablas 9.1 y 9.2. Entonces el teorema de los ejes paralelos se debe utilizar para convertir estos momentos de inercia al *eje común* antes de que se puedan sumar.

Rectángulo

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} \qquad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{12} \qquad \bar{I}_{xy} = 0$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{b^3h}{3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

Círculo

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} \qquad I_{xy} = 0$$

Triángulo rectángulo

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \qquad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{36} \qquad \bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{b^3h}{12} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$

Semicírculo

$$\bar{I}_x = 0.1098R^4 \qquad \bar{I}_{xy} = 0$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8} \qquad I_{xy} = 0$$

Triángulo isósceles

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \qquad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{48} \qquad \bar{I}_{xy} = 0$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{xy} = 0$$

Tabla 9.1 Propiedades inerciales de áreas planas: parte 1

Triángulo

$\bar{I}_x = \dfrac{bh^3}{36}$ $\qquad I_x = \dfrac{bh^3}{12}$

$\bar{I}_y = \dfrac{bh}{36}(a^2 - ab + b^2)$ $\qquad I_y = \dfrac{bh}{12}(a^2 + ab + b^2)$

$\bar{I}_{xy} = \dfrac{bh^2}{72}(2a - b)$ $\qquad I_{xy} = \dfrac{bh^2}{24}(2a + b)$

Mitad de complemento parabólico

$y = h\left(\dfrac{x}{b}\right)^2$

$\bar{I}_x = \dfrac{37bh^3}{2100}$ $\qquad I_x = \dfrac{bh^3}{21}$

$\bar{I}_y = \dfrac{b^3h}{80}$ $\qquad I_y = \dfrac{b^3h}{5}$

$\bar{I}_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{120}$ $\qquad I_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{12}$

Cuarto de círculo

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0.05488R^4$ $\qquad I_x = I_y = \dfrac{\pi R^4}{16}$

$\bar{I}_{xy} = -0.01647R^4$ $\qquad I_{xy} = \dfrac{R^4}{8}$

Media parábola

$y = h\left(\dfrac{x}{b}\right)^2$

$\bar{I}_x = \dfrac{8bh^3}{175}$ $\qquad I_x = \dfrac{2bh^3}{7}$

$\bar{I}_y = \dfrac{19b^3h}{480}$ $\qquad I_y = \dfrac{2b^3h}{15}$

$\bar{I}_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{60}$ $\qquad I_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{6}$

Cuarto de elipse

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\bar{I}_x = 0.05488ab^3$ $\qquad I_x = \dfrac{\pi ab^3}{16}$

$\bar{I}_y = 0.05488a^3b$ $\qquad I_y = \dfrac{\pi a^3b}{16}$

$\bar{I}_{xy} = -0.01647a^2b^2$ $\qquad I_{xy} = \dfrac{a^2b^2}{8}$

Sector circular

$I_x = \dfrac{R^4}{8}(2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha)$

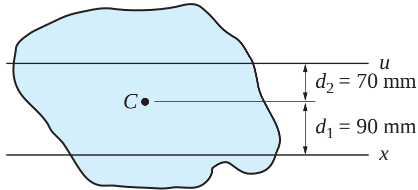
$I_y = \dfrac{R^4}{8}(2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha)$

$I_{xy} = 0$

Tabla 9.2 Propiedades inerciales de áreas planas: parte 2

Problema de ejemplo 9.1

El centroide de la región plana se ubica en C. Si el área de la región es 2000 mm^2 y su momento de inercia respecto al eje x es $I_x = 40 \times 10^6$ mm^4, determine I_u.



Solución

Observe que se pide transferir el momento de inercia del eje x al eje u, de los cuales ninguno es un eje centroidal. Por tanto, primero se debe calcular $\bar{I}_x$, el momento de inercia respecto el eje centroidal que es paralelo al eje x.

Del teorema de los ejes paralelos se tiene $I_x = \bar{I}_x + Ad_1^2$ lo que da

$$\bar{I}_x = I_x - Ad_1^2 = (40 \times 10^6) - (2000)(90)^2 = 23.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

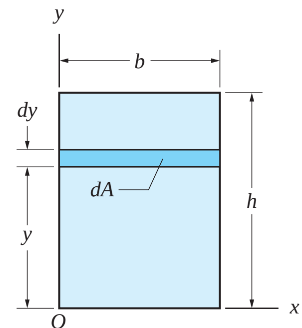
Después de determinar $\bar{I}_x$, el teorema de los ejes paralelos nos permite calcular el momento de inercia respecto a cualquier eje que sea paralelo al eje centroidal. Para I_u se tiene

$$I_u = \bar{I}_x + Ad_2^2 = (23.8 \times 10^6) + (2000)(70)^2$$
$$= 33.6 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad \textit{Respuesta}$$

Un error común es utilizar el teorema de los ejes paralelos para transferir el momento de inercia entre dos ejes, ninguno de los cuales es un eje centroidal. En este problema, por ejemplo, es tentador escribir $I_u = I_x + A(d_1 + d_2)^2$, lo que resultaría en una respuesta incorrecta de I_u.

Problema de ejemplo 9.2

Para el rectángulo, calcule lo siguiente: 1. el momento de inercia respecto al eje x por integración; 2. el momento de inercia respecto al eje centroidal que es paralelo al eje x y 3. el momento polar de inercia respecto al centroide.



Solución

Parte 1

El área del elemento diferencial que se muestra en la figura es $dA = b\,dy$. Como todas las partes del elemento están a una distancia y desde el eje x, se puede utilizar la ecuación (9.2):

$$I_x = \int_{\mathcal{A}} y^2\,dA = b\int_0^h y^2\,dy = \frac{by^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{bh^3}{3} \qquad \textit{Respuesta}$$

Este resultado concuerda con la información tabulada en la tabla 9.1 para un rectángulo.

Si se hubiera elegido utilizar integración doble con $dA = dx\,dy$, el análisis produciría

$$I_x = \int_{\mathcal{A}} y^2\,dA = \int_0^h \int_0^b y^2\,dx\,dy = \frac{bh^3}{3}$$

lo cual es idéntico al resultado anterior.

Parte 2

Se puede calcular $\bar{I}_x$ a partir del teorema de los ejes paralelos y del resultado de la parte 1.

Sustituyendo $I_x = bh^3/3$ en el teorema de los ejes paralelos y reconociendo que la distancia de transferencia d (la distancia entre el eje x y el eje x centroidal) es $h/2$, se tiene que

$$\bar{I}_x = I_x - Ad^2 = \frac{bh^3}{3} - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} \qquad \textit{Respuesta}$$

Esta respuesta también concuerda con los resultados en la tabla 9.1.

Parte 3

Un método para calcular $\bar{J}_C$ es utilizar $\bar{J}_C = \bar{I}_x + \bar{I}_y$. De los resultados de la parte 2, o de la tabla 9.1, se obtiene

$$\bar{J}_C = \bar{I}_x + \bar{I}_y = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) \qquad \textit{Respuesta}$$

Otro método para calcular $\bar{J}_C$ es primero calcular $J_O = I_x + I_y$ y luego transferir este resultado al centroide. De los resultados de la parte 1, se tiene

$$J_O = I_x + I_y = \frac{bh^3}{3} + \frac{hb^3}{3} = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2)$$

La distancia de transferencia es la distancia entre el punto O y el centroide del rectángulo; es decir, $d = \sqrt{(b/2)^2 + (h/2)^2}$. Del teorema de los ejes paralelos, se obtiene

$$\bar{J}_C = J_O - Ad^2 = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2) - bh\left(\frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4}\right)$$

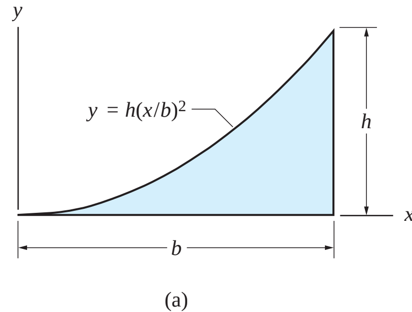
o

$$\bar{J}_C = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) \qquad \textit{Respuesta}$$

lo que concuerda con el resultado anterior.

Problema de ejemplo 9.3

Por integración, calcule el momento de inercia respecto al eje y del área que se muestra en la figura (a) mediante los métodos siguientes: 1. integración simple utilizando un elemento diferencial de área vertical; 2. integración doble y 3. integración simple empleando un elemento diferencial de área horizontal.



(a)

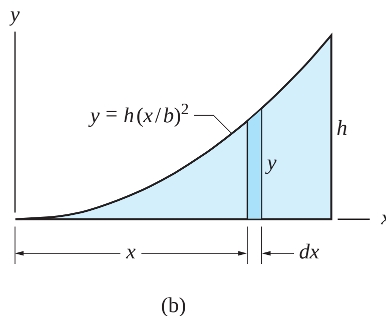
Solución

Parte 1

El elemento diferencial del área vertical se muestra en la figura (b). Como todas las partes del elemento están a la misma distancia x desde el eje y, se puede utilizar la ecuación (9.2) de manera directa. Con $dA = y\,dx = h(x/b)^2\,dx$, se tiene

$$I_y = \int_{\mathscr{A}} x^2\,dA = \frac{h}{b^2}\int_0^b x^4\,dx = \frac{h}{b^2}\frac{b^5}{5} = \frac{b^3h}{5} \qquad \textit{Respuesta}$$

Lo que concuerda con la información en la tabla 9.1 para la mitad de un complemento parabólico.



(b)

Parte 2

La ecuación (9.2) también se puede utilizar con el elemento diferencial doble de área $dA = dy\,dx$. Eligiendo integrar sobre y, se obtiene

$$I_y = \int_{\mathscr{A}} x^2\,dA = \int_0^b \int_0^{h(x/b)^2} x^2\,dy\,dx$$

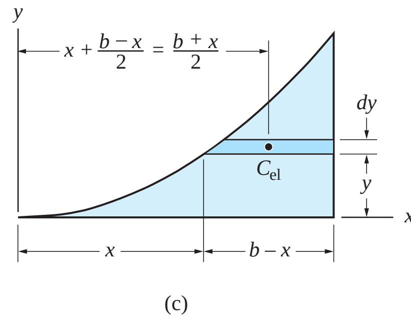
Integrando sobre x primero se obtendría

$$I_y = \int_{\mathscr{A}} x^2\, dA = \int_0^h \int_0^{b(y/h)^{1/2}} x^2\, dx\, dy$$

Al realizar cualquiera de las integraciones anteriores se produce la misma expresión para I_y que la encontrada en la parte 1.

Parte 3

El elemento diferencial de área horizontal se muestra en la figura (c). Como todas las partes del elemento diferencial de área no están a la misma distancia desde el eje y, la ecuación (9.2) no se puede aplicar de manera directa. Para encontrar I_y para toda el área, se debe integrar dI_y, el momento de inercia del elemento diferencial de área respecto al eje y.



(c)

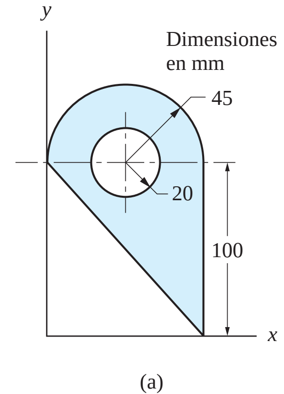
En la tabla 9.1 para un rectángulo se tiene $\bar{I}_y = hb^3/12$. Por tanto, el momento de inercia del elemento diferencial respecto a su eje centroidal vertical (eje paralelo al eje y que pasa por el centroide C_{el} del elemento) es $d\bar{I}_y = dy\,(b - x)^3/12$. De acuerdo con el teorema de los ejes paralelos, $dI_y = d\bar{I}_y + dA\,(d_{el}^2)$, donde d_{el} es la distancia entre el eje x y el eje centroidal vertical del elemento. Utilizando $d_{el} = (b + x)/2$, como se muestra en la figura (c), e integrando, se obtiene I_y para toda el área:

$$I_y = \int_{\mathscr{A}} dI_y = \int_0^h \left[\frac{dy\,(b - x)^3}{12} + (b - x)\, dy \left(\frac{b + x}{2} \right)^2 \right]$$

Sustituyendo $x = b(y/h)^{1/2}$ y completando la integración se obtiene el mismo resultado que el determinado en la parte 1.

Es obvio que el elemento diferencial del área horizontal no es tan conveniente como las otras elecciones en este problema.

Problema de ejemplo 9.4

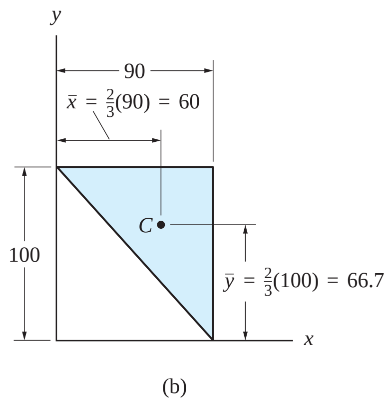


(a)

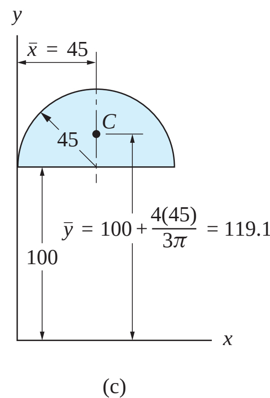
Para el área que se muestra en la figura (a), calcule los radios de giro respecto a los ejes *x* y *y*.

Solución

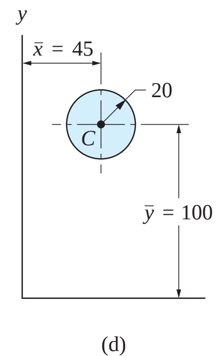
Se considera el área como compuesta de las tres partes que se ilustran en las figuras (b) a (d): un triángulo, más un semicírculo, menos un círculo. Los momentos de inercia de cada parte se obtienen en dos pasos. Primero, los momentos de inercia respecto a los ejes centroidales de la parte se determinan consultando la tabla 9.1. Luego se utiliza el teorema de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia respecto a los ejes *x* y *y*.



(b)



(c)



(d)

Triángulo

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{90(100)}{2} = 4500 \text{ mm}^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{90(100)^3}{36} = 2.50 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (2.50 \times 10^6) + (4500)(66.7)^2 = 22.52 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{hb^3}{36} = \frac{100(90)^3}{36} = 2.025 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (2.025 \times 10^6) + (4500)(60)^2 = 18.23 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Semicírculo

$$A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(45)^2}{2} = 3181 \text{ mm}^2$$

$$\bar{I}_x = 0.1098R^4 = 0.1098(45)^4 = 0.450 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (0.450 \times 10^6) + (3181)(119.1)^2 = 45.57 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi(45)^4}{8} = 1.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (1.61 \times 10^6) + (3181)(45)^2 = 8.05 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Círculo:

$$A = \pi R^2 = \pi(20)^2 = 1257 \text{ mm}^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi(20)^4}{4} = 0.1257 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (0.1257 \times 10^6) + (1257)(100)^2 = 12.70 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi(20)^4}{4} = 0.1257 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (0.1257 \times 10^6) + (1257)(45)^2 = 2.67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Área compuesta

Para determinar las propiedades para las áreas compuestas, se superponen los resultados anteriores (teniendo cuidado de restar las cantidades para el círculo) y se obtiene

$$A = \Sigma A = 4500 + 3181 - 1257 = 6424 \text{ mm}^2$$

$$I_x = \Sigma I_x = (22.52 + 45.57 - 12.70) \times 10^6 = 55.39 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

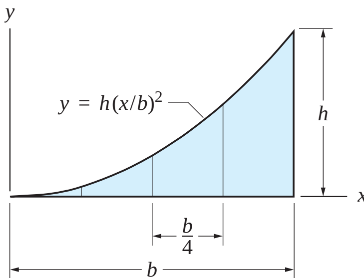
$$I_y = \Sigma I_y = (18.23 + 8.05 - 2.67) \times 10^6 = 23.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Por tanto, para los radios de giro se obtiene

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{55.39 \times 10^6}{6424}} = 92.9 \text{ mm} \qquad \textit{Respuesta}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{23.61 \times 10^6}{6424}} = 60.6 \text{ mm} \qquad \textit{Respuesta}$$

Problema de ejemplo 9.5



Utilizando integración numérica, calcule los momentos de inercia respecto a los ejes x y y para el medio complemento parabólico. Utilice la regla de Simpson con cuatro intervalos. Compare sus resultados con los valores exactos indicados en la tabla 9.2.

Solución

Dividiendo el intervalo de integración en cuatro secciones, cada una de ancho $\Delta x = b/4$, aplicando la regla de Simpson da (consulte el apéndice A)

$$\int_0^b f(x)\,dx \approx \frac{b/4}{3}(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + f_5) \qquad \text{(a)}$$

Las integrales que se deben evaluar son $I_x = \int_{\mathscr{A}} dI_x$ e $I_y = \int_{\mathscr{A}} dI_y$. Eligiendo una franja vertical de ancho dx y altura y como el elemento diferencial de área, se tiene

$dI_x = \frac{1}{3}y^3dx$ (momento de inercia de un rectángulo respecto a su base)
$dI_y = x^2dA = x^2y\,dx$ (todas las partes del elemento de área $dA = y\,dx$ están a la misma distancia x desde el eje y)

Por tanto,

$$I_x = \int_0^b \frac{1}{3}y^3\,dx \approx \frac{b}{12}\left(\frac{y_1^3}{3} + 4\frac{y_2^3}{3} + 2\frac{y_3^3}{3} + 4\frac{y_4^3}{3} + \frac{y_5^3}{3}\right) \qquad \text{(b)}$$

$$I_y = \int_0^b x^2 y\,dx \approx \frac{b}{12}\left(x_1^2 y_1 + 4x_2^2 y_2 + 2x_3^2 y_3 + 4x_4^2 y_4 + x_5^2 y_5\right) \qquad \text{(c)}$$

donde $y_i = h(x_i/b)^2$. Los términos en el lado derecho de las ecuaciones (b) y (c) se evalúan en la tabla siguiente:

i	x	y	$y^3/3$	x^2y
1	0.00	0.0000	0.000 00	0.000 00
2	$0.25b$	$0.0625h$	$0.000\,08h^3$	$0.003\,91b^2h$
3	$0.50b$	$0.2500h$	$0.005\,21h^3$	$0.062\,50b^2h$
4	$0.75b$	$0.5625h$	$0.059\,33h^3$	$0.316\,41b^2h$
5	$1.00b$	$1.0000h$	$0.333\,33h^3$	$1.000\,00b^2h$

Sustituyendo los valores de esta tabla en las ecuaciones (b) y (c) da

$$I_x = \frac{bh^3}{12}[1(0) + 4(0.000\,08) + 2(0.005\,21) + 4(0.059\,33)] + 1(0.333\,33)] = 0.0485bh^3$$ *Respuesta*

$$I_y = \frac{b^3h}{12}[1(0) + 4(0.003\,91) + 2(0.062\,50) + 4(0.316\,41)] + 1(1.000\,00)] = 0.2005b^3h$$ *Respuesta*

De acuerdo con la tabla 9.2, el medio complemento parabólico tiene $I_x = bh^3/21 = 0.0476bh^3$ e $I_y = b^3h/5 = 0.2000b^3h$. Por tanto, los errores introducidos por nuestra integración numérica son 1.9% para I_x y 0.25% para I_y.

Problemas

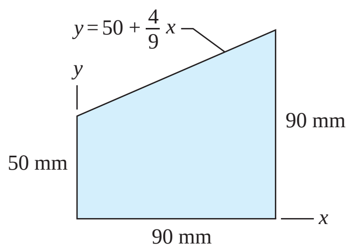


Fig. P9.1

9.1 Calcule el momento de inercia de la región sombreada respecto al eje y por integración.

9.2 Las propiedades de la región plana son $\bar{J}_C = 50 \times 10^3$ mm^4, $I_x = 600 \times 10^3$ mm^4 e $I_y = 350 \times 10^3$ mm^4. Calcule A, $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para la región.

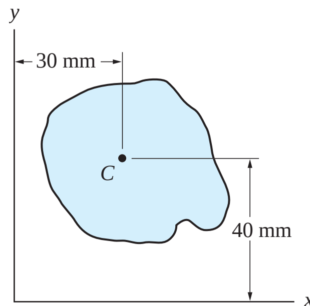


Fig. P9.2

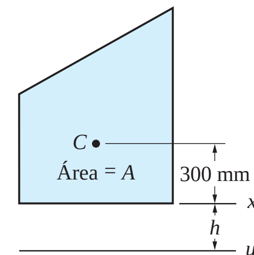


Fig. P9.3, P9.4

9.3 Los momentos de inercia respecto a los ejes x y u de la región plana son $I_x = 14 \times 10^9$ mm^4 e $I_u = 38 \times 10^9$ mm^4, respectivamente. Si $h = 200$ mm, determine el área de la región y el radio de giro respecto al eje centroidal paralelo al eje x.

9.4 Encuentre la distancia h para la cual el momento de inercia de la región plana respecto al eje u es igual a 120×10^9 mm^4, dado que $A = 90 \times 10^3$ mm^2 e $I_x = 14 \times 10^9$ mm^4.

9.5 Mediante integración, encuentre el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje x para el anillo delgado ($t \ll R$).

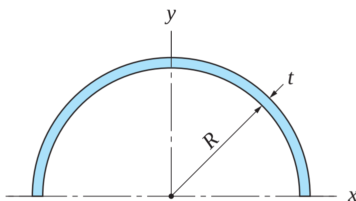


Fig. P9.5

9.6 Mediante integración determine el momento de inercia de la región sombreada respecto al eje x.

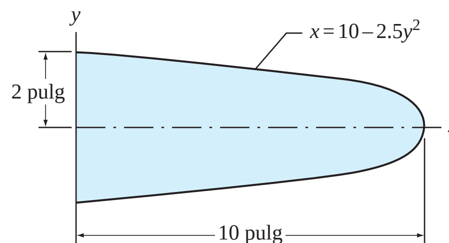


Fig. P9.6

9.7 Calcule I_x para la región sombreada utilizando integración.

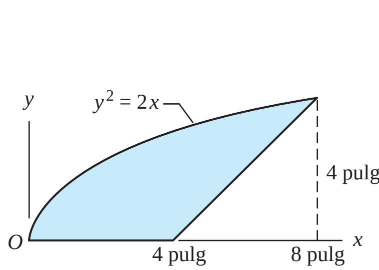


Fig. P9.7

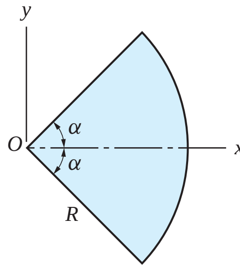


Fig. P9.8

9.8 Utilizando integración, calcule el momento polar de inercia respecto al punto O para el sector circular. Verifique su resultado con el de la tabla 9.2.

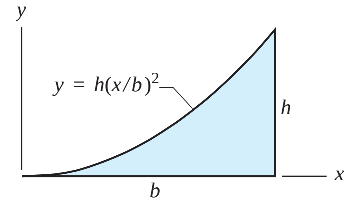


Fig. P9.9

9.9 Utilice integración para calcular I_x e I_y para la parábola. Verifique sus respuestas con los resultados para el medio complemento parabólico indicados en la tabla 9.2.

9.10 Por integración, determine los momentos de inercia respecto a los ejes x y y para la región ilustrada.

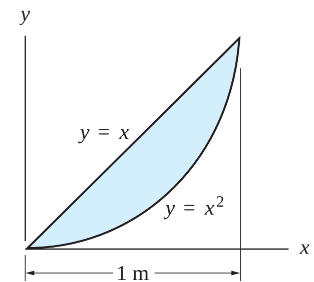


Fig. P9.10

9.11 Calcule el momento de inercia respecto al eje x para la región ilustrada utilizando integración.

9.12 Por integración, encuentre el momento de inercia respecto al eje y para la región ilustrada.

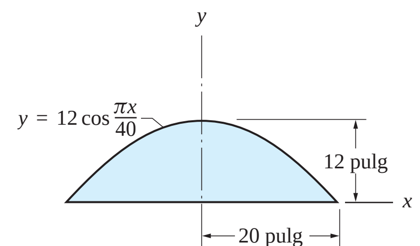


Fig. P9.11, P9.12

9.13 En la figura (a) se muestra la sección transversal de una columna en la que se utiliza un perfil estructural conocido como W8 × 67 (viga de patín ancho con peralte nominal de 8 pulg que pesa 67 lb/pie). En el *Structural Steel Handbook* del American Institute of Steel Construction se indican las propiedades de la sección transversal siguiente: $A = 19.7$ pulg^2, $\bar{I}_x = 272$ pulg^4 e $\bar{I}_y = 88.6$ pulg^4. Determine las dimensiones del rectángulo en la figura (b) que tiene los mismos $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ que el perfil W8 × 67.

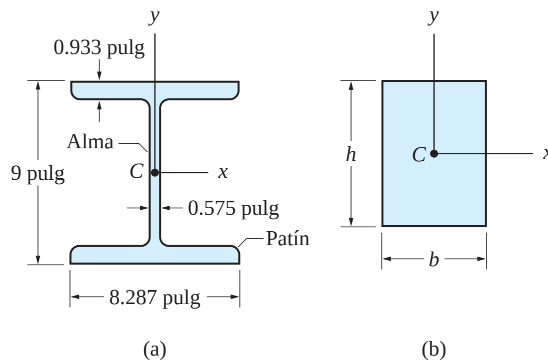


Fig. P9.13-P9.14

9.14 Calcule las dimensiones del rectángulo que se muestra en la figura (b) que tenga las mismas $\bar{k}_x$ y $\bar{k}_y$ que el perfil W8 × 67 en la figura (a). (Consulte las propiedades del perfil W8 × 67 del problema 9.13.)

Los problemas 9.15 a 9.29 se deben resolver utilizando el método de las áreas compuestas.

9.15 Calcule $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para el perfil W8 × 67 con las dimensiones indicadas en la figura. Suponga que el perfil se compone de rectángulos, ignorando los efectos debidos al redondeo de las esquinas. Compare sus resultados con los valores del manual indicados en el problema 9.13.

9.16 En la figura (a) se muestran las dimensiones de la sección transversal para el perfil estructural de acero conocido como C10 × 20 (canal con peralte nominal de 10 pulg, que pesa 20 lb/pie). En el *Structural Steel Handbook* del American Institute of Steel Construction se indican las propiedades siguientes para la sección transversal: $A = 5.88$ pulg^2, $\bar{I}_x = 78.9$ pulg^4 e $\bar{I}_y = 2.81$ pulg^4. Si se sueldan espalda con espalda dos de estos canales, como se muestra en la figura (b), encuentre $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para la sección transversal resultante.

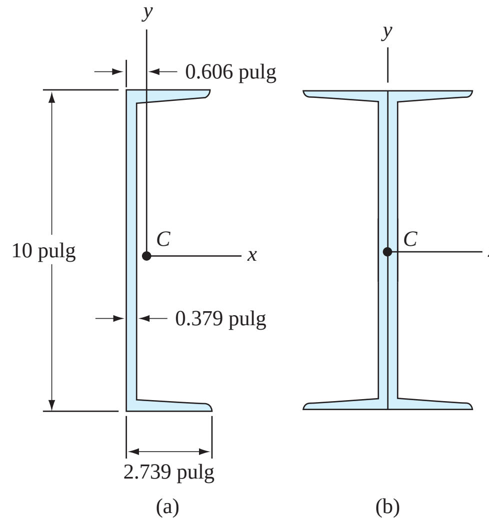


Fig. P9.16

9.17 Un perfil W8 × 67 se une a un perfil C10 × 20 para formar un miembro estructural que tiene la sección transversal ilustrada. Calcule $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para esta sección transversal. (Consulte los problemas 9.13 y 9.16 donde se indican las propiedades de los perfiles estructurales.)

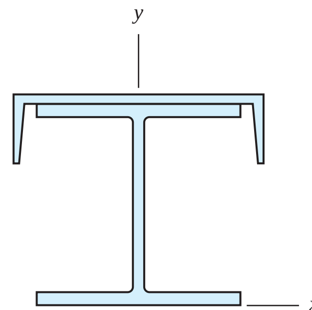


Fig. P9.17

9.18 Calcule I_x e I_y para la región ilustrada.

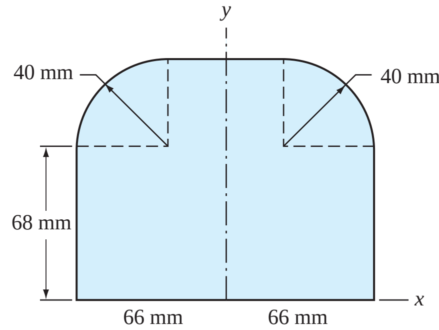


Fig. P9.18

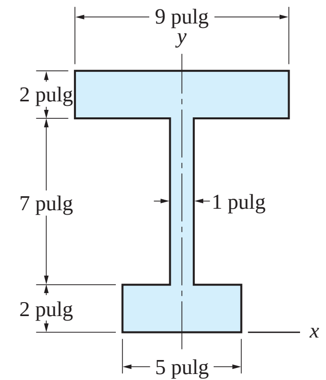


Fig. P9.19

9.19 Encuentre $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para la región ilustrada.

9.20 Calcule $\bar{I}_x$ para la región sombreada, si $\bar{y} = 68.54$ mm.

9.21 Calcule $\bar{I}_y$ para la región ilustrada, si $\bar{x} = 25.86$ mm.

9.22 Calcule $\bar{I}_x$ para la región ilustrada.

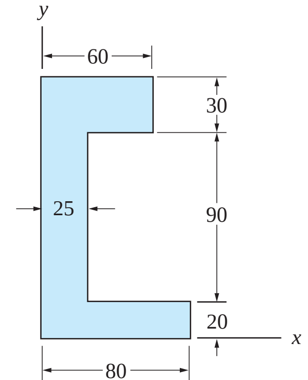


Fig. P9.20, P9.21

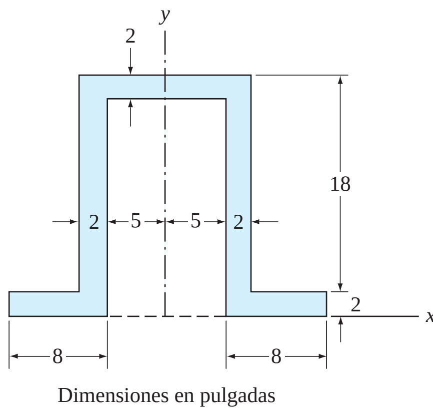


Fig. P9.22

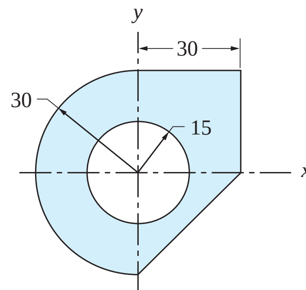


Fig. P9.23

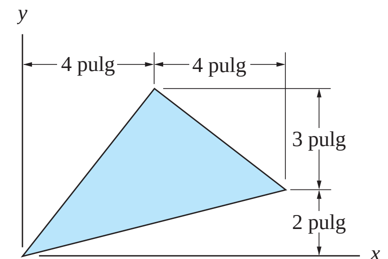


Fig. P9.24

9.23 Para la región plana con un hueco circular, (a) encuentre I_x; (b) calcule $\bar{I}_x$ utilizando el resultado de la parte (a) y el teorema de los ejes paralelos.

9.24 Determine $\bar{I}_x$ para la región triangular ilustrada.

9.25 Determine la distancia h para la cual el momento de inercia de la región que se muestra respecto al eje x será tan pequeña como sea posible.

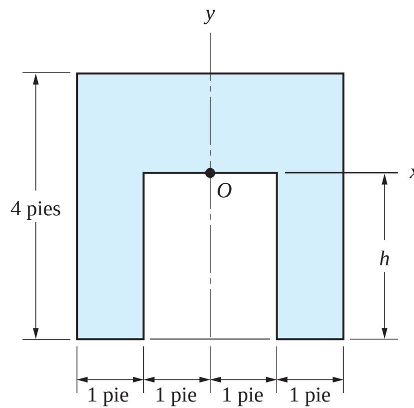


Fig. P9.25

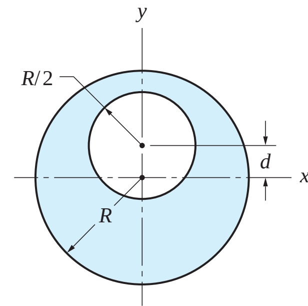


Fig. P9.26

9.26 Una región circular de radio $R/2$ se recorta de la región circular de radio R como se muestra. ¿Para qué distancia d será k_x para la nueva región igual a k_x para la región antes de que se recortara?

9.27 Determine I_x e I_y para la región indicada. Observe que la región es simétrica respecto al eje x.

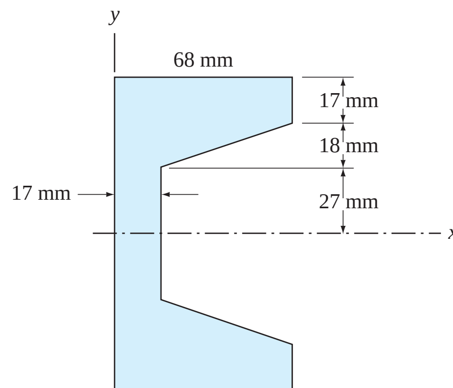


Fig. P9.27

9.28 Determine la relación a/b para la cual $\bar{I}_x = \bar{I}_y$ para el triángulo isósceles.

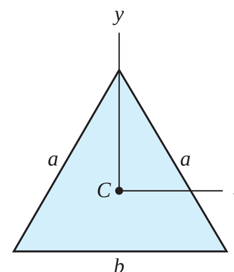


Fig. P9.28

9.29 A medida que un tronco redondo pasa por una sierra, se cortan dos tablas, resultando en la sección transversal que se muestra. Calcule I_x para la sección transversal si $h = R/2$. ¿Cuál es la reducción porcentual en I_x causada por la operación de aserrado?

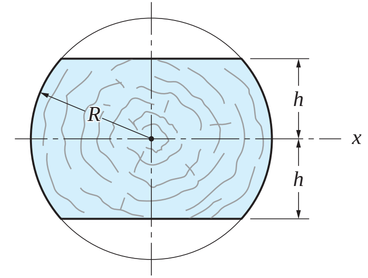


Fig. P9.29

9.30 Para el sector circular que se muestra en la figura 9.2, determine el ángulo α, que no sean $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$, para el cual $\bar{I}_x = \bar{I}_y$.

9.31 Por integración numérica, calcule los momentos de inercia respecto a los ejes x y y para la región indicada. La región es simétrica respecto a cada eje coordenado.

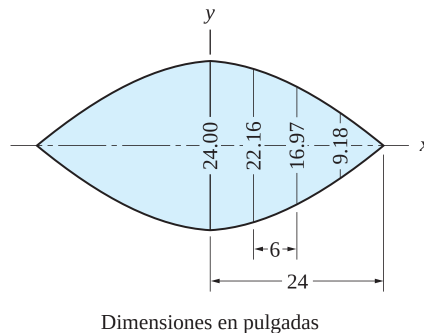


Fig. P9.31

9.32 Mediante integración numérica calcule los momentos de inercia respecto a los ejes x y y para la región ilustrada.

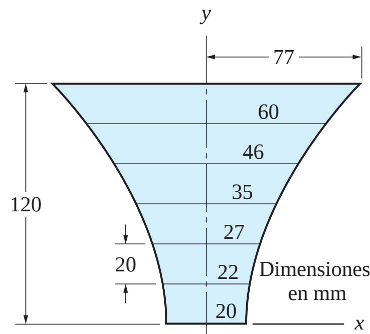


Fig. P9.32

9.33 La región plana $\mathscr{A}$ está sumergida en un fluido con peso específico γ. La fuerza resultante de la presión del fluido sobre la región R actúa en el punto C (denominado centro de presión) ubicado a la distancia h debajo de la superficie del fluido. Demuestre que $R = \gamma Q_a$ y $h = I_a/Q_a$, donde Q_a e I_a son el primer y segundo momentos de $\mathscr{A}$ respecto al eje a-a.

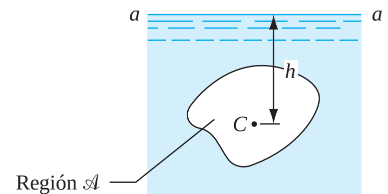


Fig. P9.33

9.3 Productos de inercia de áreas

a. Definición

El *producto de inercia de un área plana* (también denominado *producto de área*) respecto a los ejes coordenados *x* y *y* se define por

$$I_{xy} = \int_{\mathscr{A}} xy\, dA \tag{9.11}$$

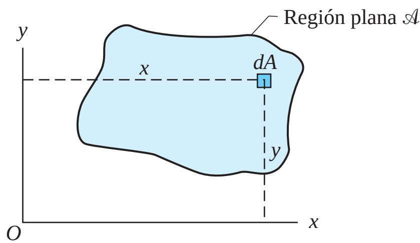


Fig. 9.3

donde *A* es el área de la región plana $\mathscr{A}$ que se muestra en la figura 9.3 y *x* y *y* son las coordenadas de *dA*.

La dimensión del producto de inercia es $[L^4]$, la misma que para el momento de inercia y el momento polar de inercia. En tanto que el momento de inercia siempre es positivo, el producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de la manera en que esté distribuida el área en el plano *xy*.

Para explorar aún más los signos para el producto de inercia, considere la región plana $\mathscr{A}$ que se muestra en la figura 9.4. La región se encuentra en el primer cuadrante del sistema coordenado *xy*. Como *x* y *y* son positivas para cada elemento de área diferencial *dA*, $I_{xy} = \int_{\mathscr{A}} xy\, dA$ es obvio que es positivo. Sin embargo, relativa al sistema coordenado *uv*, la región $\mathscr{A}$ se encuentra en el cuarto cuadrante, de manera que la coordenada *u* de cada *dA* es positiva y la coordenada *v* es negativa. Por tanto, $I_{uv} = \int_{\mathscr{A}} uv\, dA$ es negativo.

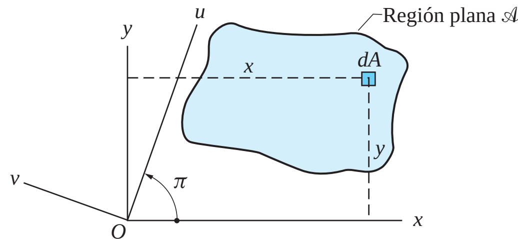


Fig. 9.4

Observe que los ejes *uv* en la figura 9.4 se giran en sentido contrario de las manecillas del reloj un ángulo θ relativo a los ejes *xy*. Como I_{xy} es positivo e I_{uv} es negativo, debe existir una orientación de los ejes para la cual el producto de inercia sea cero. Como se verá en la sección siguiente, los ejes de producto de inercia cero tienen un efecto fundamental en el cálculo de los momentos de inercia mínimo y máximo.

A continuación, considere una región que tiene un eje de simetría, como la que se muestra en la figura 9.5. Como el eje *y* es el eje de simetría, por cada *dA* con coordenadas (x, y), existe una *dA* con coordenadas $(-x, y)$. Por tanto, $\int_{\mathscr{A}} xy\, dA = 0$ cuando la integración se efectúa sobre toda la región. En consecuencia, se tiene la propiedad siguiente:

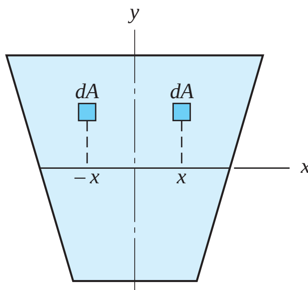


Fig. 9.5

Si un área tiene un eje de simetría, ese eje y el eje perpendicular a él constituyen un conjunto de ejes para los cuales el producto de inercia es cero.

b. Teorema de los ejes paralelos

El teorema de los ejes paralelos para productos de inercia se puede deducir considerando la región plana que se muestra en la figura 9.6. Sean x' y y' los ejes que pasan por el centroide C y paralelos a los ejes x y y. Las coordenadas de C relativas a los ejes xy son $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Utilizando $x = x' + \bar{x}$ y $y = y' + \bar{y}$ pulg en la ecuación (9.11), se obtiene

$$I_{xy} = \int_{\mathscr{A}} xy \, dA = \int_{\mathscr{A}} (x' + \bar{x})(y' + \bar{y}) \, dA$$
$$= \int_{\mathscr{A}} x'y' \, dA + \bar{x} \int_{\mathscr{A}} y' \, dA + \bar{y} \int_{\mathscr{A}} x' \, dA + \bar{x}\bar{y} \int_{\mathscr{A}} dA$$

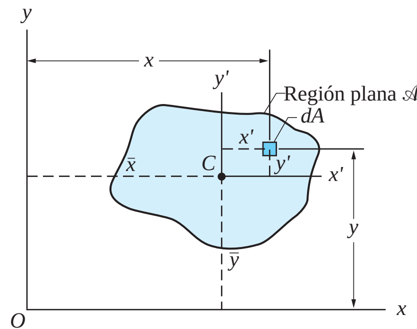


Fig. 9.6

El primer término en el lado derecho es el producto de inercia respecto a los ejes centroidales, que se denota por $\bar{I}_{xy}$. Los dos términos intermedios son cero, ya que cada integral representa el primer momento de área respecto a un eje centroidal. La integral en el último término es simplemente el área A. Por tanto, el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia se puede escribir como

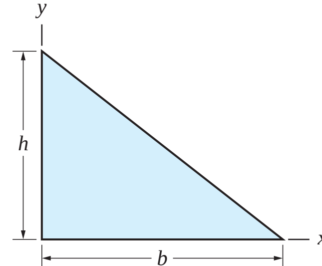
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\bar{x}\bar{y} \tag{9.12}$$

Para reiterar, el símbolo $\bar{I}_{xy}$ se debe leer como "el producto de inercia relativo a los ejes centroidales x y y" (ejes que pasan por el centroide y son paralelos a los ejes x y y).

Debe ser evidente que el método de las áreas compuestas también es válido para productos de inercia. En las tablas 9.1 y 9.2 se indican los productos de inercia para formas comunes, que se pueden utilizar en el método de las áreas compuestas.

Problema de ejemplo 9.6

Calcule el producto de inercia del triángulo ilustrado en la figura (a) respecto a los ejes x y y utilizando: 1. integración simple y 2. integración doble.



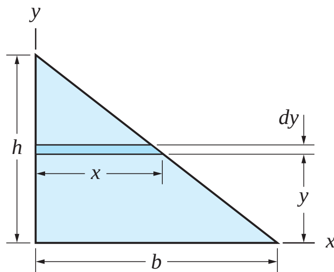
(a)

Solución

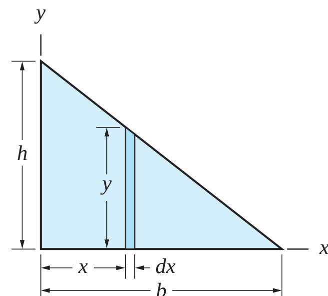
Parte 1

Por definición, $I_{xy} = \int_{\mathscr{A}} xy\, dA$, donde x y y son las coordenadas del elemento diferencial de área $dA = dy\, dx$. Sin embargo, esta fórmula no se aplica a integración simple, donde se debe integrar dI_{xy}, el producto de inercia del elemento diferencial de área. Para encontrar dI_{xy}, el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia, $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\bar{x}\bar{y}$, se debe interpretar como $dI_{xy} = d\bar{I}_{xy} + dA\, \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}$, donde $d\bar{I}_{xy}$ es el producto de inercia de dA respecto a sus ejes centroidales, y $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ son las coordenadas centroidales del elemento de área.

El análisis entonces procede como sigue:



(b)



(c)

Elemento horizontal ilustrado en la figura (b)

$$dA = x\, dy$$

$$\bar{x}_{el} = \frac{x}{2}$$

$$\bar{y}_{el} = y$$

$$d\bar{I}_{xy} = 0 \text{ (por simetría)}$$

$$dI_{xy} = dA\, \bar{x}_{el}\bar{y}_{el} = (x\, dy)\left(\frac{x}{2}\right)(y) = \frac{x^2 y}{2}\, dy$$

Sustituya $x = \dfrac{b}{h}(h - y)$ e integre

$$I_{xy} = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h-y)^2 y\, dy$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24} \qquad \textit{Respuesta}$$

Elemento vertical ilustrado en la figura (c)

$$dA = y\, dx$$

$$\bar{x}_{el} = x$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{y}{2}$$

$$d\bar{I}_{xy} = 0 \text{ (por simetría)}$$

$$dI_{xy} = dA\, \bar{x}_{el}\bar{y}_{el} = (y\, dx)(x)\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{xy^2}{2}\, dx$$

Sustituya $y = \dfrac{h}{b}(b - x)$ e integre

$$I_{xy} = \frac{h^2}{2b^2}\int_0^b x(b-x)^2\, dx$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24} \qquad \textit{Respuesta}$$

Estos resultados concuerdan con la información indicada para el triángulo en la tabla 9.1.

Parte 2

Utilizando integración doble con $dA = dx\,dy$, se utiliza $I_{xy} = \int_{\mathcal{A}} xy\,dA$. Eligiendo integrar primero sobre y, se obtiene

$$I_{xy} = \int_0^b \left(\int_0^{(h/b)(b-x)} xy \; dy \right) dx$$

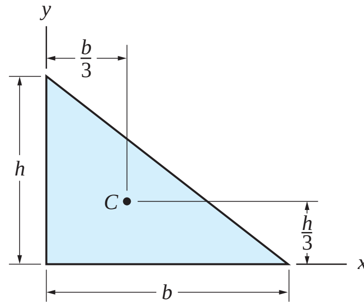
Integrando sobre x primero se obtendría

$$I_{xy} = \int_0^h \left(\int_0^{(b/h)(h-y)} xy \; dx \right) dy$$

Evaluando cualquiera de las integrales anteriores da $I_{xy} = b^2h^2/24$, igual que en la parte 1.

Problema de ejemplo 9.7

Utilizando los resultados del problema de ejemplo 9.6, calcule $\bar{I}_{xy}$, el producto de inercia del triángulo ilustrado respecto a los ejes centroidales paralelos a los ejes x y y.



Solución

De la solución del problema de ejemplo 9.6, se tiene $I_{xy} = b^2h^2/24$. El teorema de los ejes paralelos da

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - A\bar{x}\bar{y} = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{bh}{2}\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h}{3}\right)$$

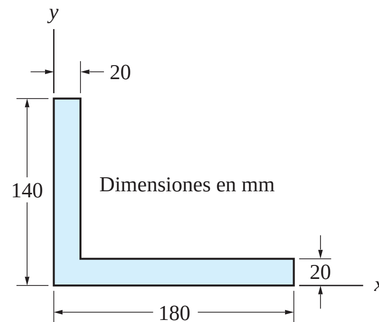
lo que se simplifica en

$$\bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$ *Respuesta*

Los resultados anteriores concuerdan con los datos de la tabla 9.1 para el triángulo rectángulo.

Problema de ejemplo 9.8

Calcule el producto de inercia I_{xy} para el triángulo ilustrado en la figura (a) mediante el método de las áreas compuestas.



(a)

Solución

Se puede considerar el ángulo como formado por los dos rectángulos ilustrados en la figura (b). Para cada rectángulo, I_{xy} se puede calcular utilizando el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia: $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\bar{x}\bar{y}$. Observe que $\bar{I}_{xy} = 0$ para cada rectángulo, por simetría.

Para el rectángulo de 20 mm × 140 mm,

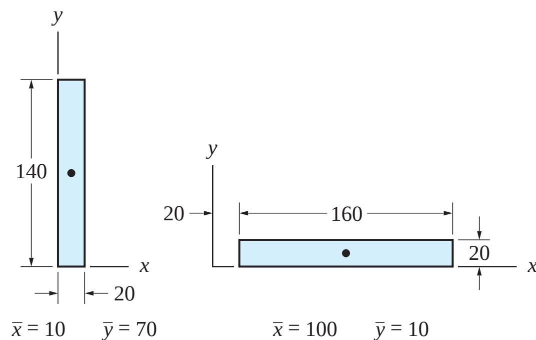
$$I_{xy} = 0 + (140 \times 20)(10)(70) = 1.96 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Para el rectángulo de 160 mm × 20 mm,

$$I_{xy} = 0 + (160 \times 20)(100)(10) = 3.20 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Por tanto, el producto de inercia para el ángulo es

$$I_{xy} = \Sigma I_{xy} = (1.96 + 3.20) \times 10^6 = 5.16 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad \textit{Respuesta}$$



(b)

Problemas

9.34 Mediante integración compruebe la fórmula indicada en la tabla 9.2 para el I_{xy} de un medio complemento parabólico.

9.35 Para el cuarto de círculo en la tabla 9.2, verifique las fórmulas siguientes: (a) I_{xy} por integración y (b) $\bar{I}_{xy}$ utilizando la fórmula para I_{xy} y el teorema de los ejes paralelos.

9.36 Determine el producto de inercia respecto a los ejes x y y para el anillo delgado de un cuarto de círculo ($t \ll R$) por integración.

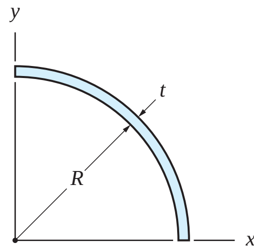


Fig. P9.36

9.37 El producto de inercia del triángulo (a) respecto a su centroide es $\bar{I}_{xy} = -b^2h^2/72$. ¿Cuál es $\bar{I}_{xy}$ para los triángulos (b) a (d)? (*Sugerencia:* investigue los signos en la expresión $\bar{I}_{xy} = I_{xy} - A\bar{x}\bar{y}$.)

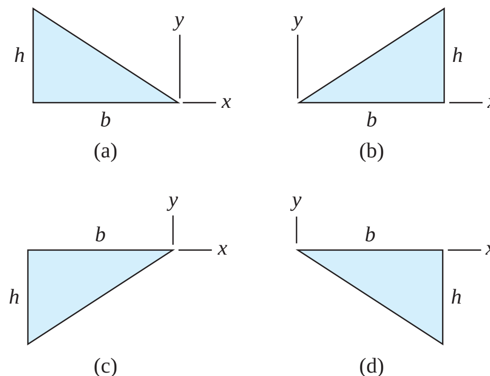


Fig. P9.37

9.38 Calcule I_{uv} para la región ilustrada, si $\bar{x} = 30$ mm, $d = 40$ mm e $I_{xy} = 520 \times 10^3$ mm^4.

9.39 Para la región ilustrada, $I_{xy} = 320 \times 10^3$ mm^4 e $I_{uv} = 0$. Calcule la distancia d entre los ejes x y v. (*Nota:* el resultado es independiente de $\bar{x}$.)

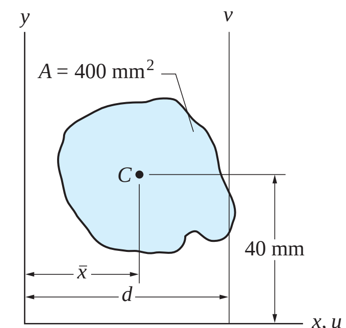


Fig. P9.38, P9.39

Los problemas 9.40 a 9.47 se deben resolver utilizando el método de las áreas compuestas.

9.40 Calcule el producto de inercia respecto a los ejes x y y.

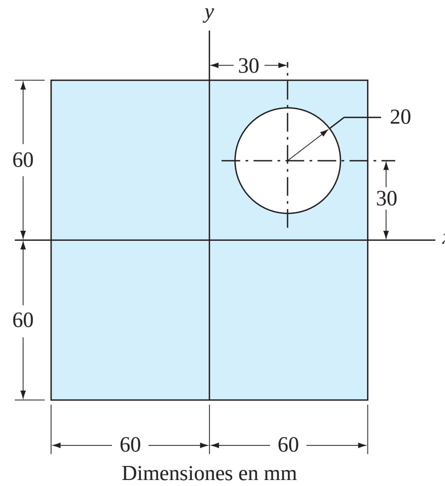


Fig. P9.40

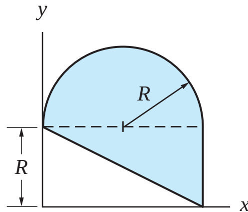


Fig. P9.41

9.41 Calcule el producto de inercia respecto a los ejes x y y.

9.42 Encuentre $\bar{I}_{xy}$ para la región ilustrada.

9.43 Determine $\bar{I}_{xy}$ para la placa con recortes parabólicos.

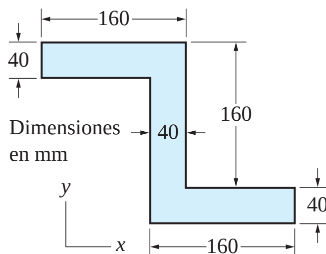


Fig. P9.42

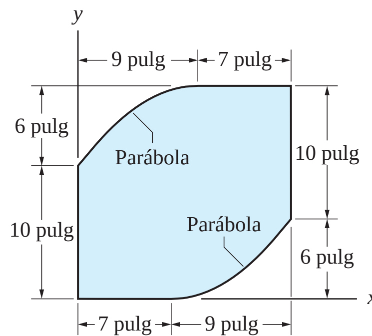


Fig. P9. 43

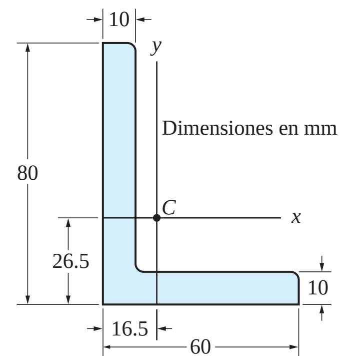


Fig. P9.44

9.44 En la figura se muestra la sección transversal de un perfil estándar L80 × 60 × 10 mm de acero estructural de lados desiguales. Ignorando los efectos de los chaflanes pequeños redondeados en las esquinas, calcule I_{xy} del área de la sección transversal.

9.45 Calcule $\bar{I}_{xy}$ para la región ilustrada, si $\bar{x} = 25.86$ mm y $\bar{y} = 68.54$ mm.

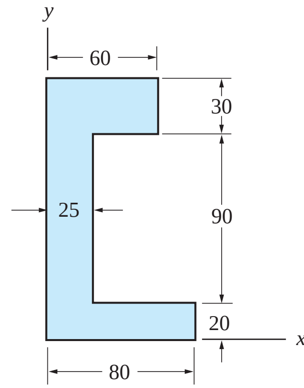


Fig. P9.45

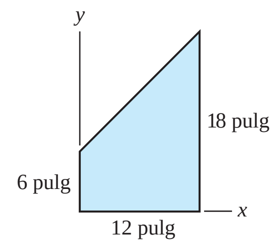


Fig. P9. 46

9.46 Calcule $\bar{I}_{xy}$ para la región ilustrada.

9.47 Determine $\bar{I}_{xy}$ para la región ilustrada.

9.48 Utilice integración numérica para calcular el producto de inercia de la región ilustrada respecto a los ejes x y y.

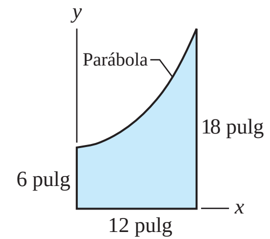


Fig. P9.47

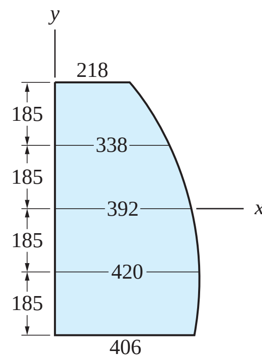


Fig. P9.48

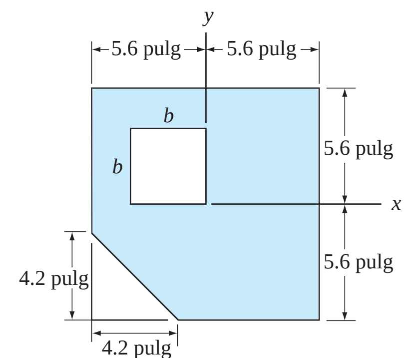


Fig. P9.49

9.49 Determine la dimensión b del recorte de manera que $I_{xy} = 0$ para la región ilustrada.

9.4 *Ecuaciones de transformación y momentos principales de inercia de áreas*

En general, los valores de I_x, I_y e I_{xy} para un área plana dada dependen de la ubicación de O (el origen del sistema coordenado) y de la orientación de los ejes xy. El efecto de reubicar O, lo que es equivalente a trasladar los ejes coordenados, se ha estudiado y ha resultado en el teorema de los ejes paralelos. Aquí se investigan los cambios en los momentos y en el producto de inercia causados al variar la orientación de los ejes coordenados. Esto a su vez permite determinar los momentos de inercia máximo y mínimo asociados con el punto O y encontrar la orientación de los ejes correspondientes.

a. *Ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia*

Considere la región plana $\mathscr{A}$ con área A que se muestra en la figura 9.7, donde los ejes uv en el punto O se obtienen girando los ejes xy en sentido contrario a las manecillas del reloj un ángulo θ. Ahora se deducen fórmulas para I_u, I_v e I_{uv} en términos de I_x, I_y, I_{xy} y θ. Estas fórmulas se conocen como *ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia*.* Se inicia con las ecuaciones de transformación de las coordenadas de posición, que se pueden deducir de la figura 9.7:

$$\begin{aligned} u &= y \operatorname{sen}\theta + x\cos\theta \\ v &= y\cos\theta - x \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{9.13}$$

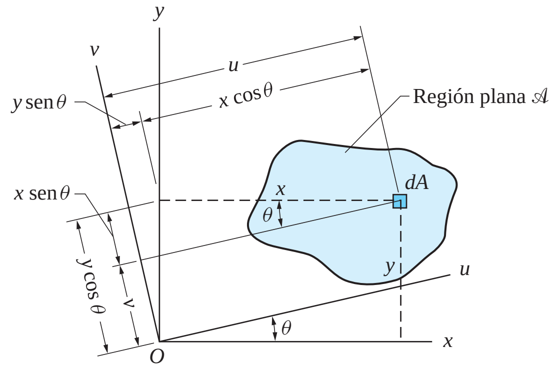


Fig. 9.7

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación que define I_u, se obtiene

$$\begin{aligned} I_u &= \int_{\mathscr{A}} v^2\, dA = \int_{\mathscr{A}} (y\cos\theta - x \operatorname{sen}\theta)^2\, dA \\ &= \cos^2\theta \int_{\mathscr{A}} y^2\, dA - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \int_{\mathscr{A}} xy\, dA + \operatorname{sen}^2\theta \int_{\mathscr{A}} x^2\, dA \end{aligned}$$

*Varias otras cantidades físicas, por ejemplo, esfuerzo y deformación unitaria, siguen ecuaciones de transformación idénticas a las correspondientes para el momento de inercia.

Identificando los momentos y productos de inercia, esta ecuación se convierte en

$$I_u = I_x \cos^2\theta - 2I_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_y \operatorname{sen}^2\theta \tag{9.14}$$

Las ecuaciones para I_v e I_{uv} se pueden deducir de una manera similar y los resultados son

$$I_v = I_x \operatorname{sen}^2\theta + 2I_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_y \cos^2\theta \tag{9.15}$$

$$I_{uv} = (I_x - I_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \tag{9.16}$$

La ecuación para I_v también se podría deducir remplazando θ por $(\theta + 90°)$ en la ecuación (9.14).

Utilizando las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Las ecuaciones (9.14) a (9.16) también se pueden escribir en la forma

$$I_u = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y) + \tfrac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{9.17}$$

$$I_v = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y) - \tfrac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{9.18}$$

$$I_{uv} = \tfrac{1}{2}(I_x - I_y) \operatorname{sen} 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \tag{9.19}$$

De las ecuaciones (9.17) y (9.18) se observa que $I_u + I_v = I_x + I_y$, un resultado que se esperaba, ya que los dos lados de la ecuación son iguales a J_O, el momento polar del área respecto a O.

b. Momentos principales de inercia

Los momentos de inercia máximo y mínimo en un punto se denominan *momentos principales de inercia* en ese punto. Los ejes respecto a los cuales los momentos de inercia son máximo o mínimo se denominan *ejes principales* y a las direcciones correspondientes se les refiere como *direcciones principales*. Para encontrar los momentos de inercia máximo y mínimo, se iguala a cero la derivada de I_u en la ecuación (9.17):

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -(I_x - I_y) \operatorname{sen} 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Despejando 2θ, se obtiene

$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \tag{9.20}$$

Observe que hay dos soluciones para el ángulo 2θ que difieren en 180° o, equivalentemente, dos soluciones para θ que difieren en 90°. Estas soluciones las denotamos por θ_1 y θ_2. De las representaciones gráficas que se muestran en la figura 9.8 se tiene que

$$\operatorname{sen} 2\theta_{1,2} = \mp\frac{I_{xy}}{R} \qquad \cos 2\theta_{1,2} = \pm\frac{I_x - I_y}{2R} \tag{9.21}$$

donde

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{9.22}$$

Los ángulos θ_1 y θ_2 medidos *en sentido contrario a* las manecillas del reloj desde el eje x, definen las direcciones principales. Sustituyendo la ecuación (9.22) en la ecuación (9.17) y simplificando, se obtienen los momentos principales de inercia

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm R \tag{9.23}$$

donde I_1 e I_2 corresponden a los ejes definidos por θ_1 y θ_2, respectivamente.* En las ecuaciones (9.21) y (9.23), el signo superior de $\pm$ o $\mp$ se debe utilizar con θ_1 y el signo inferior con θ_2 (consulte la figura 9.8).

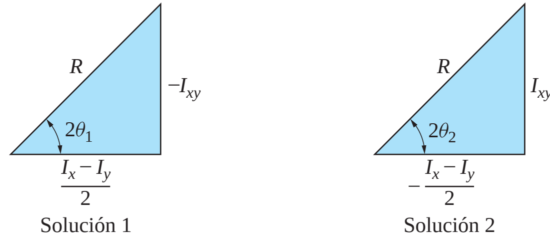


Fig. 9.8

Para determinar el producto de inercia respecto a los ejes principales, se sustituyen las ecuaciones (9.21) en la ecuación (9.19), lo que da

$$I_{uv}\Big|_{\theta=\theta_{1,2}} = \frac{I_x - I_y}{2}\left(\mp\frac{I_{xy}}{R}\right) + I_{xy}\left(\pm\frac{I_x - I_y}{2R}\right) = 0$$

Por tanto, *el producto de inercia respecto a los ejes principales es cero*.

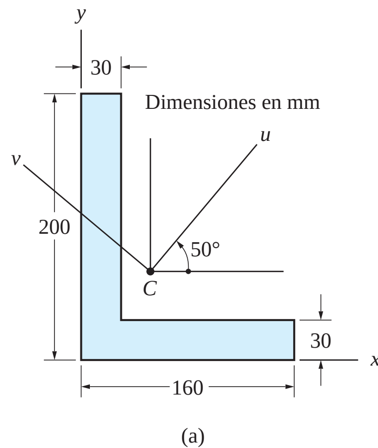
Las propiedades de un área, en general, dependen de la ubicación del origen O del sistema coordenado xy. Por tanto, los momentos principales de inercia y las direcciones principales varían con la ubicación del punto O. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, como en la ingeniería estructural, se tiene interés en los momentos de inercia respecto a los ejes centroidales.

*Se puede demostrar que I_1 e I_2 son los dos valores de I que son las raíces de la ecuación cuadrática siguiente.

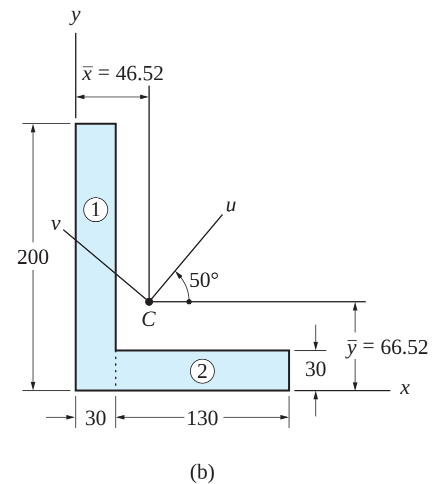
$$\begin{vmatrix} I_x - I & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I \end{vmatrix} = 0$$

Problema de ejemplo 9.9

Para la región que se muestra en la figura (a), calcule: 1. los momentos principales centroidales de inercia y las direcciones principales, y 2. los momentos y el producto de inercia respecto a los ejes *uv* que pasan por el centroide *C*.



(a)



(b)

Solución

Propiedades centroidales

En la tabla siguiente se indican los cálculos que se utilizaron para determinar las coordenadas centroidales y las propiedades inerciales respecto a los ejes *x* y *y*. La región se considera compuesta de los dos rectángulos ilustrados en la figura (b). Sus momentos de inercia se calcularon consultando la tabla 9.1.

Las coordenadas centroidales, indicadas en la figura (b), se calculan a partir de los resultados en la tabla 9.1, como sigue:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A} = \frac{460.5 \times 10^3}{9900} = 46.52 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = \frac{685.5 \times 10^3}{9900} = 66.52 \text{ mm}$$

Parte	A (mm^2)	$\bar{x}$ (mm)	$A\bar{x}$ (mm^3)	$\bar{y}$ (mm)	$A\bar{y}$ (mm^3)	I_x (mm^4)	I_y (mm^4)	$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\bar{x}\bar{y}$ (mm^4)
1	200(30) = 6000	15	90×10^3	100	600×10^3	$\frac{30(200)^3}{3} = 80.00 \times 10^6$	$\frac{200(30)^3}{3} = 1.800 \times 10^6$	$0 + 6000(15)(100) = 9.00 \times 10^6$
2	130(30) = 3900	95	370.5×10^3	15	58.5×10^3	$\frac{130(30)^3}{3} = 1.17 \times 10^6$	$\frac{30(130)^3}{12} + 3900(95)^2 = 40.69 \times 10^6$	$0 + 3900(95)(15) = 5.56 \times 10^6$
Σ	9900	···	460.5×10^3	···	658.5×10^3	81.17×10^6	42.49×10^6	14.56×10^6

Luego se aplica el teorema de los ejes paralelos para calcular las propiedades inerciales respecto a los ejes centroidales.

$$\bar{I}_x = I_x - A\bar{y}^2 = (81.17 \times 10^6) - (9900)(66.52)^2$$
$$= 37.36 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$\bar{I}_y = I_y - A\bar{x}^2 = (42.49 \times 10^6) - (9900)(46.52)^2$$
$$= 21.07 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - A\bar{x}\bar{y} = (14.56 \times 10^6) - (9900)(46.52)(66.52)$$
$$= -16.08 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Parte 1

Sustituyendo los valores para $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ e $\bar{I}_{xy}$ en la ecuación (9.22) se obtiene

$$R = 10^6\sqrt{\left(\frac{37.36 - 21.07}{2}\right)^2 + (-16.08)^2} = 18.03 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Por tanto, la ecuación (9.23) se convierte en

$$I_{1,2} = \left(\frac{37.36 + 21.07}{2} \pm 18.03\right) \times 10^6 = (29.22 \pm 18.03) \times 10^6 \text{ mm}^4$$

de donde se obtienen los momentos principales de inercia

$$I_1 = 47.3 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_2 = 11.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$ *Respuesta*

Para las direcciones principales, la ecuación (9.21) da

$$\operatorname{sen} 2\theta_{1,2} = \mp\frac{\bar{I}_{xy}}{R} = \mp\frac{(-16.08)}{18.03} = \pm 0.8919$$

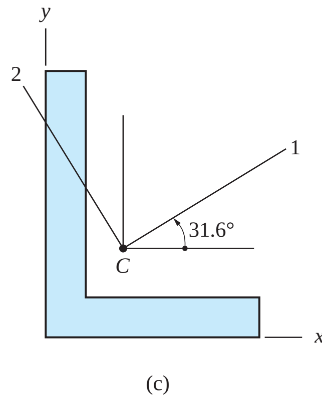
Como el signo superior corresponde a θ_1, se tiene que $2\theta_1 = 63.11°$ o $116.9°$ y $2\theta_2 = 243.11°$ o $-63.11°$. Para determinar las elecciones correctas, se investiga el signo de $\cos 2\theta_1$. De las ecuaciones (9.21) se obtiene

$$\cos 2\theta_1 = (\bar{I}_x - \bar{I}_y)/(2R) = (37.36 - 21.07)/[2(18.03)]$$

que es positivo. Por tanto, $2\theta_1 = 63.11°$ y $2\theta_2 = 243.11°$ son las elecciones correctas, las cuales dan

$$\theta_1 = 31.6° \qquad \theta_2 = 121.6°$$ *Respuesta*

Los ejes principales, identificados 1 y 2 en la figura (c), corresponden a los ejes I_1 e I_2, respectivamente.



(c)

Parte 2

Para calcular los momentos y el producto de inercia respecto a los ejes *uv* en la figura (a), sólo es necesario sustituir $\bar{I}_x = 37.36 \times 10^6$ mm^4, $\bar{I}_y = 21.07 \times 10^6$ mm^4, $\bar{I}_{xy} = -16.08 \times 10^6$ mm^4 y $\theta = 50°$ en las ecuaciones de transformación. De la ecuación (9.17) se obtiene

$$I_u \times 10^{-6} = \frac{37.36 + 21.07}{2} + \frac{37.36 - 21.07}{2} \cos 100° - (-16.08) \operatorname{sen} 100°$$

$I_u = 43.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$ *Respuesta*

La ecuación (9.18) da

$$I_v \times 10^{-6} = \frac{37.36 + 21.07}{2} - \frac{37.36 - 21.07}{2} \cos 100° + (-16.08) \operatorname{sen} 100°$$

$I_v = 14.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$ *Respuesta*

De la ecuación (9.19) se obtiene

$$I_{uv} \times 10^{-6} = \frac{37.36 - 21.07}{2} \operatorname{sen} 100° + (-16.08) \cos 100°$$

$I_{uv} = 10.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$ *Respuesta*

Problemas

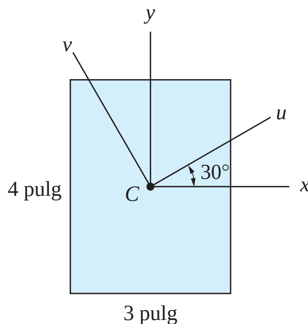


Fig. P9.50

9.50 Para la región rectangular, determine: (a) los momentos principales de inercia y las direcciones principales en el centroide C y (b) los momentos y productos de inercia respecto a los ejes u-v.

9.51 Para la región semicircular, calcule: (a) los momentos principales de inercia y las direcciones principales en el centroide C y (b) los momentos y productos de inercia respecto a los ejes u-v.

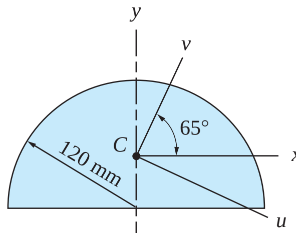


Fig. P9.51

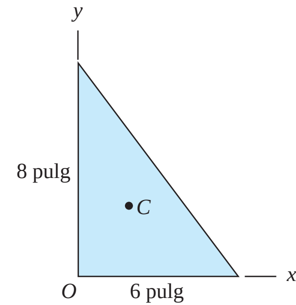


Fig. P9.52

9.52 Encuentre los momentos principales de inercia y las direcciones principales en el centroide C del triángulo.

9.53 Utilizando I_x, I_y e I_{xy} en la tabla 9.2, calcule I_u, I_v e I_{uv} para la parábola ilustrada.

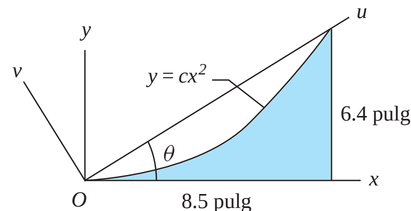


Fig. P9.53

9.54 Si las propiedades de la región ilustrada son $I_x = 3000$ pulg^4, $I_y = 2000$ pulg^4 e $I_{xy} = -500$ pulg^4, determine I_u, I_v e I_{uv} para $\theta = 120°$.

9.55 Las propiedades de la región ilustrada son $I_x = 10 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 20 \times 10^6$ mm^4 e $I_{xy} = 12 \times 10^6$ mm^4. Calcule I_u, I_v e I_{uv} si $\theta = 33.7°$

9.56 Los ejes u y v son los ejes principales de la región ilustrada. Dado que $I_u = 7600$ pulg^4, $I_v = 5000$ pulg^4 y $\theta = 33.7°$, determine I_x, I_y e I_{xy}.

9.57 Los ejes x y y son los ejes principales para la región ilustrada con $I_x = 6 \times 10^6$ mm^4 e $I_y = 2 \times 10^6$ mm^4. (a) Calcule el ángulo θ para el cual I_{uv} es máximo. (b) Determine I_u, I_v e I_{uv} para el ángulo θ determinado en la parte (a).

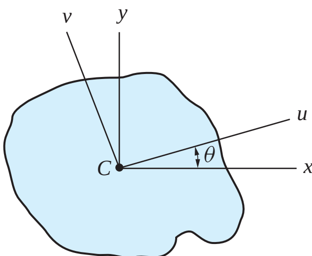


Fig. P9.54-P9.58

9.58 Calcule I_v para la región ilustrada, dado que $I_u = 160 \times 10^6$ mm^4, $I_{xy} = -30 \times 10^6$ mm^4 y $\theta = 18.44°$. Los ejes u y v son ejes principales para la región.

9.59 Las propiedades inerciales de la región ilustrada respecto a los ejes x y y son $I_x = I_y = 16.023 \times 10^6$ mm^4 e $I_{xy} = -1.1310 \times 10^6$ mm^4. Determine los momentos principales de inercia en el punto O. (*Sugerencia:* la orientación de los ejes principales se puede determinar mediante una inspección.)

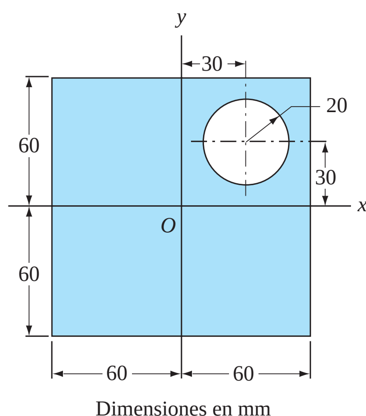


Fig. P9.59

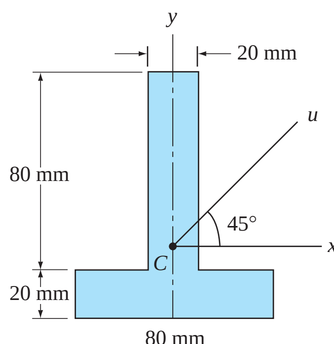


Fig. P9.60

9.60 Determine $\bar{I}_u$ para el perfil en forma de T invertida. Observe que la sección es simétrica respecto al eje y.

9.61 Utilizando I_x e I_y de la tabla 9.2, determine el momento de inercia del sector circular respecto al eje OB. Verifique su resultado para $\alpha = 45°$ con el indicado en la tabla 9.2 para un cuarto de círculo.

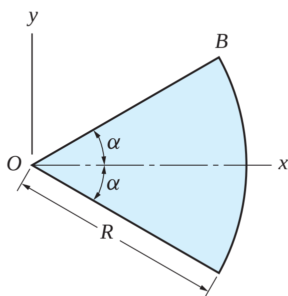


Fig. P9.61

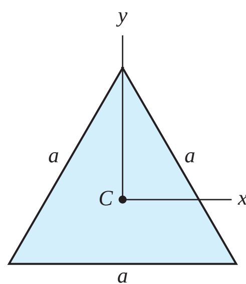


Fig. P9.62

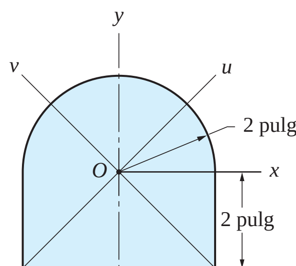


Fig. P9.63

9.62 Demuestre que cada eje que pasa por el centroide del triángulo equilátero es un eje principal.

9.63 Calcule I_u, I_v e I_{uv} para la región ilustrada.

9.64 El ángulo estructural L80 × 60 × 10 mm tiene las propiedades de las secciones transversales siguientes: $I_x = 0.808 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 0.388 \times 10^6$ mm^4 e $I_2 =$

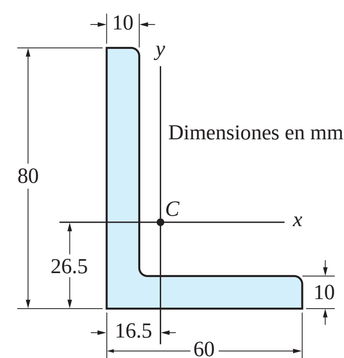


Fig. P9.64

0.213×10^6 mm^4, donde I_2 es un momento principal centroidal de inercia. Suponiendo que I_{xy} es negativo, calcule: (a) I_1 (el otro momento principal centroidal de inercia) y (b) las direcciones principales.

9.65 Calcule los momentos centroidales principales de inercia para el área ilustrada.

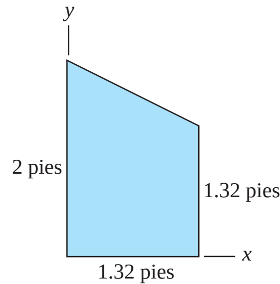


Fig. P9.65

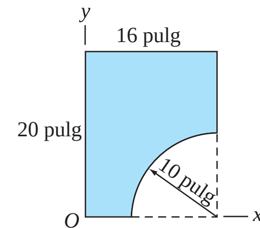


Fig. P9.66

9.66 Determine las direcciones de los ejes principales de inercia en el punto O para el área ilustrada.

9.67 Determine los momentos de inercia centroidales principales y las direcciones principales correspondientes para la región ilustrada.

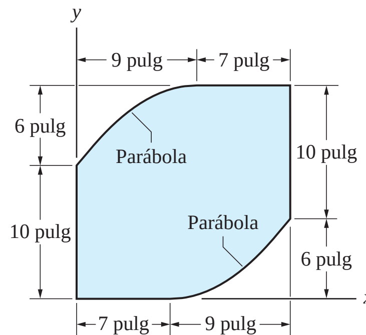


Fig. P9.67

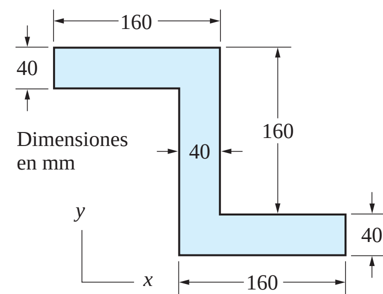


Fig. P9.68

9.68 Calcule los momentos centroidales principales de inercia y las direcciones principales correspondientes para la región mostrada.

*9.5 Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia

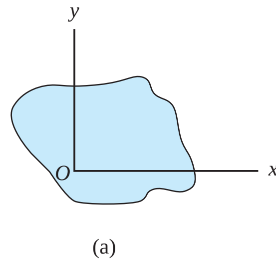
El círculo de Mohr es una representación gráfica de las ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia. Desarrollada en 1882 por Otto Mohr, un ingeniero alemán, es una alternativa popular para las ecuaciones de transformación. Hay dos ventajas al utilizar el círculo de Mohr. Primero, el círculo proporciona una representación visual clara de cómo varían las propiedades inerciales con la orien-

tación de los ejes. Segundo, con referencia al círculo, se pueden obtener valores sin tener que memorizar las ecuaciones de transformación.

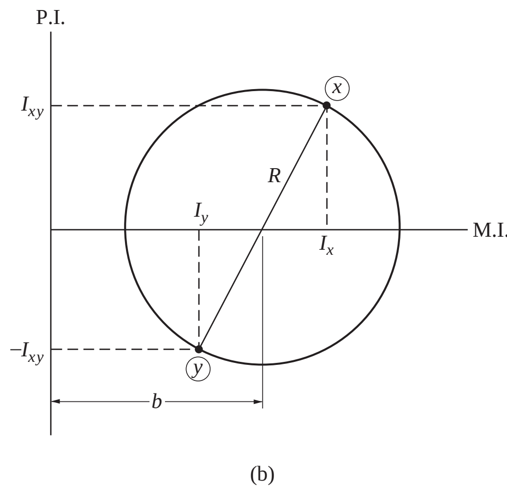
a. Trazo del círculo de Mohr

Considere la región plana que se muestra en la figura 9.9(a). Sean I_x, I_y e I_{xy} los momentos y el producto de inercia de la región respecto a los ejes x-y que se intersecan en el punto O. El círculo de Mohr asociado con el punto O se muestra en la figura 9.9(b). El círculo se traza como sigue:

1. Trace un conjunto de ejes en donde el eje horizontal represente el momento de inercia (M.I.) y el eje vertical represente el producto de inercia (P.I.).
2. Trace el punto x con coordenadas (I_x, I_{xy}) y el punto y con coordenadas (I_y, $-I_{xy}$).
3. Una x y y con una línea y trace un círculo con esta línea como su diámetro.



(a)



(b)

Fig. 9.9

Ahora el círculo de Mohr está completo. Observe que el radio del círculo es

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

y su centro está ubicado en

$$b = \frac{1}{2}(I_x + I_y)$$

b. Propiedades del círculo de Mohr

Las propiedades del círculo de Mohr son:

- Los puntos extremos de cada diámetro del círculo representan los momentos y el producto de inercia asociados con un conjunto de ejes perpendiculares que pasan por el punto O.
- Los ángulos entre los diámetros sobre el círculo son *el doble* de los ángulos entre los ejes en el punto O y estos ángulos se miden en el *mismo sentido* (de las manecillas del reloj o contrario de las manecillas).

El procedimiento para determinar las propiedades inerciales respecto a ejes particulares, como los ejes u-v que se muestran en la figura 9.10(a), es el siguiente:

1. Observe la magnitud y el sentido del ángulo θ entre los ejes coordenados x-y y u-v. (El sentido de θ es la dirección en la cual los ejes x-y se deben girar de manera que coincidan con los ejes u-v.)
2. Gire el diámetro x-y del círculo de Mohr en un ángulo 2θ en el mismo sentido que θ. Identifique los puntos extremos de este diámetro u y v, como se muestra en la figura 9.10(b). Las coordenadas de u son (I_u, I_{uv}) y las coordenadas de v son $(I_v, -I_{uv})$.

El círculo de Mohr también se puede utilizar para encontrar los momentos de inercia principales y las direcciones principales. Con referencia a la figura 9.10(b), se observa que los momentos de inercia máximo y mínimo son $I_1 = b + R$ e $I_2 =$

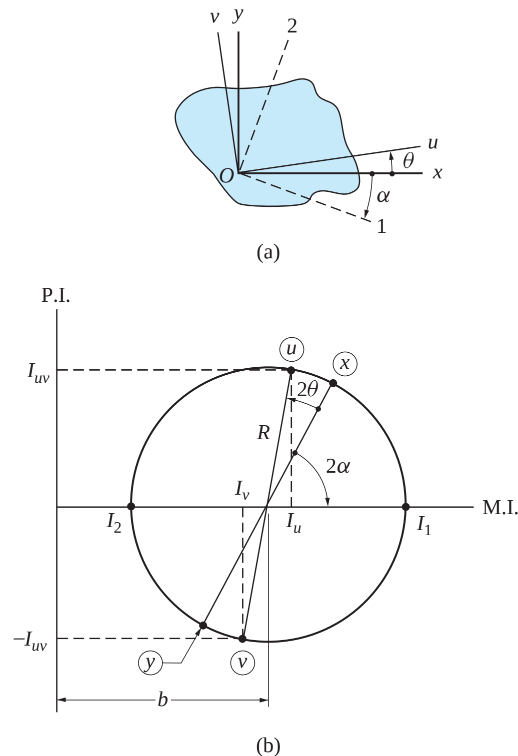


Fig. 9.10

$b - R$, respectivamente. La orientación de los ejes principales, identificados “1” y “2” en la figura 9.10(a), se obtiene girando los ejes x-y un ángulo α. La magnitud y el sentido de α se determinan a partir del círculo de Mohr. En particular, observe que α en la figura 9.10(a) y 2α en la figura 9.10(b) deben tener el mismo sentido.

c. *Verificación del círculo de Mohr*

En la figura 9.11 se muestra el círculo que se trazó siguiendo los pasos delineados en la sección anterior. Como x y u son puntos ubicados arriba de la abscisa, se supuso que tanto I_{xy} como I_{uv} son positivos.

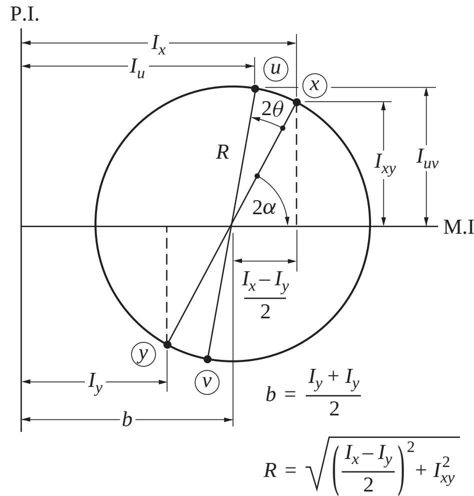


Fig. 9.11

A fin de demostrar que el círculo de Mohr es una representación válida de las ecuaciones de transformación, se debe demostrar que las coordenadas de u concuerdan con las ecuaciones (9.17) y (9.19).

De la figura 9.11, se tiene

$$I_u = b + R\cos(2\theta + 2\alpha)$$

Utilizando la identidad

$$\cos(2\theta + 2\alpha) = \cos 2\theta \cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 2\alpha$$

y sustituyendo $b = (I_x + I_y)/2$, se obtiene

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + R(\cos 2\theta \cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 2\alpha)$$

De la figura 9.11, se observa que sen $2\alpha = I_{xy}/R$ y cos $2\alpha = (I_x - I_y)/(2R)$. Sustituyendo estas relaciones en la última ecuación da

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + R\left(\frac{I_x - I_y}{2R}\cos 2\theta - \frac{I_{xy}}{R}\operatorname{sen} 2\theta\right)$$

o

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \tag{9.24}$$

De la figura 9.11, también se obtiene

$$I_{uv} = R\operatorname{sen}(2\theta + 2\alpha)$$

Utilizando la identidad

$$\operatorname{sen}(2\theta + 2\alpha) = \operatorname{sen} 2\theta\cos 2\alpha + \cos 2\theta\operatorname{sen} 2\alpha$$

y de las expresiones deducidas antes para sen 2α y cos 2α, se obtiene

$$I_{uv} = R\left(\frac{I_x - I_y}{2R}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{I_{xy}}{R}\cos 2\theta\right)$$

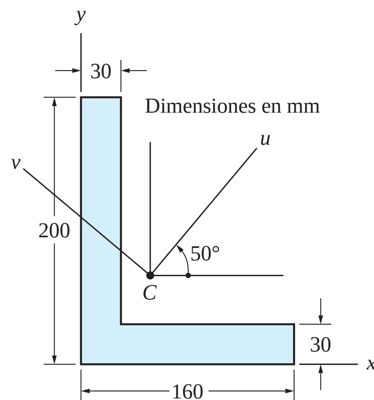
que se transforma en

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \tag{9.25}$$

Como las ecuaciones (9.24) y (9.25) son idénticas a las ecuaciones de transformación, ecuaciones (9.17) y (9.19), se concluye que el círculo de Mohr es una representación válida de las ecuaciones de transformación.

Problema de ejemplo 9.10

Para la región que se muestra en la figura (a), calcule: 1. los momentos de inercia centroidales principales y las direcciones principales y 2. los momentos y el producto de inercia respecto a los ejes *u*-*v* que pasan por el centroide *C*. Observe que esta es la misma región que en el problema de ejemplo 9.9.

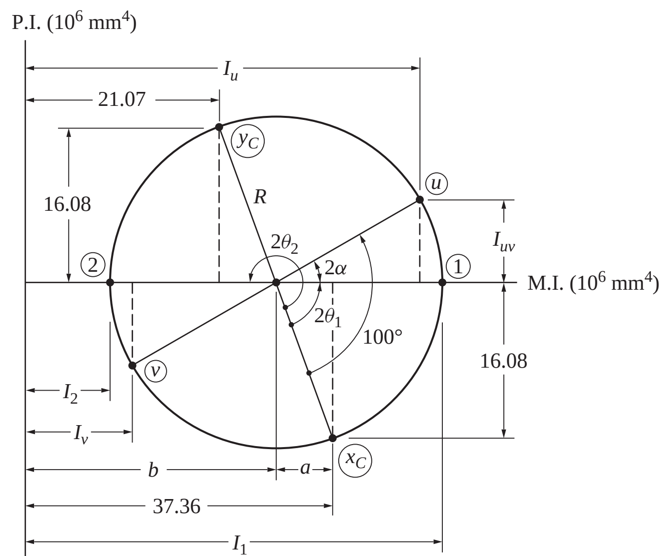


(a)

Solución

Trazo del círculo de Mohr

De la solución del problema de ejemplo 9.9, se tiene que $\bar{I}_x = 37.36 \times 10^6\ \text{mm}^4$, $\bar{I}_y = 21.07 \times 10^6\ \text{mm}^4$ e $\bar{I}_{xy} = -16.08 \times 10^6\ \text{mm}^4$. Utilizando estos valores, el círculo de Mohr se traza como se muestra en la figura (b), siguiendo el procedimiento delineado en la sección 9.5.



(b)

Observe que:

1. Los puntos sobre el círculo que corresponden a los ejes centroidales que son paralelos a los ejes x y y están identificados x_C y y_C, respectivamente.
2. Como $\bar{I}_{xy}$ es negativo, x_C está trazada debajo de la abscisa y y_C está trazada arriba.

Si el círculo se trazara a escala, todos los valores desconocidos se podrían determinar mediante mediciones directas. Sin embargo, se calcularán los valores pedidos por trigonometría. Por supuesto, todos los resultados en los análisis deben concordar con los determinados antes en la solución del problema de ejemplo 9.9.

Los valores siguientes, calculados directamente del círculo, se muestran en la figura.

$$b = \frac{37.36 + 21.07}{2} \times 10^6 = 29.22 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$a = \frac{37.36 - 21.07}{2} \times 10^6 = 8.145 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$R = \sqrt{(8.145)^2 + (16.08)^2} \times 10^6 = 18.03 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

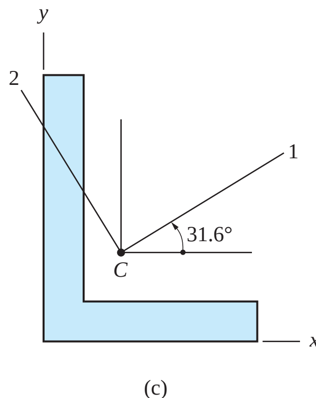
Parte 1

En la figura (b), 1 y 2 corresponden a los momentos de inercia máximo y mínimo, respectivamente. Por tanto, se tiene $I_{1,2} = b \pm R = (29.22 \pm 18.03) \times 10^4 \text{ mm}^4$, de donde se obtiene

$$I_1 = 47.3 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_2 = 11.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$ *Respuesta*

Las direcciones principales se determinan calculando los ángulos θ_1 y θ_2. Del círculo se encuentra que $2\theta_1 = \text{sen}^{-1}(16.08/18.03) = 63.11°$ y $2\theta_2 = 180 + 2\theta_1 = 243.11°$, lo que da

$$\theta_1 = 31.6° \qquad \theta_2 = 121.6°$$ *Respuesta*



(c)

Observe que sobre el círculo el ángulo central de x_C a 1 es $2\theta_1$, en sentido contrario de las manecillas del reloj. Por tanto, la dirección principal correspondiente a I_1 es $\theta_1 = 31.6°$, medido en sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje x centroidal. (Recuerde que los ángulos sobre el círculo son del doble de los ángulos entre ejes, medidos en la misma dirección.) Por tanto, los ejes principales centroidales están orientados como se muestra en la figura (c).

Parte 2

Para determinar I_u, I_v e I_{uv}, los puntos u y v, correspondientes a los ejes u y v, respectivamente, se deben identificar sobre el círculo de Mohr. Como el eje u está ubicado a 50° en sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje x centroidal, u en el círculo está a 100° en sentido contrario de las manecillas del reloj desde x_C. Por

supuesto, v está ubicada en el extremo opuesto del diámetro desde u. Para facilitar los cálculos, se introdujo el ángulo central 2α entre los puntos 1 y u, dado por $2\alpha = 100° - 2\theta_1 = 100° - 63.11° = 36.89°$. Con referencia al círculo, se encuentra que

$$\begin{aligned} I_{u,v} &= b \pm R \cos 2\alpha \\ &= (29.22 \pm 18.03 \cos 36.89°) \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

o

$$I_u = 43.6 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_v = 14.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$$ *Respuesta*

Además, el círculo produce $|I_{uv}| = R \text{ sen } 2\alpha = (18.03 \text{ sen } 36.89°) \times 10^6 = 10.8 \times 10^6$ mm^4. Como u está arriba de la abscisa, I_{uv} es positivo. Por tanto, se tiene

$$I_{uv} = +10.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$$ *Respuesta*

Recuerde que en las ecuaciones de transformación, ecuaciones (9.17) a (9.19), 2θ representa el ángulo medido en sentido contrario de las manecillas del reloj del eje x al eje u. Sin embargo, después de trazar el círculo de Mohr, cualquier ángulo conveniente, en sentido de las manecillas del reloj o contrario de las manecillas del reloj y medido desde cualquier punto en el círculo, se puede utilizar para ubicar u. Por ejemplo, en el círculo en la figura (b) se observa que u está ubicada a 80° en la dirección de las manecillas del reloj desde y_C. Esto es consistente con la figura (a), donde el eje u se alcanza desde el eje y centroidal por una rotación de las manecillas del reloj de 40°.

Problemas

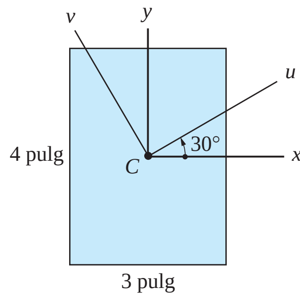


Fig. P9.69

Los problemas siguientes se deben resolver utilizando el círculo de Mohr.

9.69 Encuentre los momentos y el producto de inercia del rectángulo respecto a los ejes u-v en el centroide C.

9.70 Determine los momentos y el producto de inercia del semicírculo respecto a los ejes u-v que pasan por el centroide C.

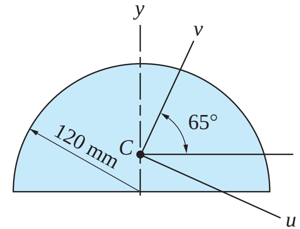


Fig. P9.70

9.71 Encuentre los momentos de inercia principales y las direcciones principales en el centroide C del triángulo.

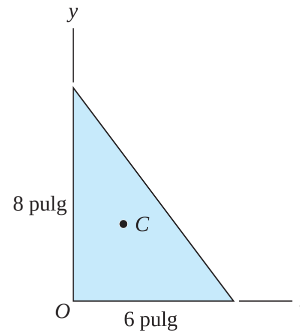


Fig. P9.71

9.72 Determine los momentos y el producto de inercia de la parábola respecto a los ejes u-v.

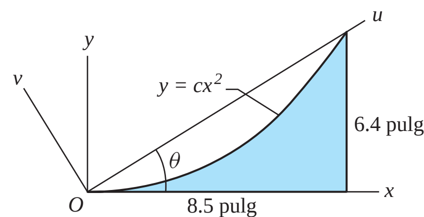


Fig. P9.72

9.73 Si las propiedades de la región ilustrada son $I_x = 3000$ pulg^4, $I_y = 2000$ pulg^4 e $I_{xy} = -500$ pulg^4, determine I_u, I_v e I_{uv} para $\theta = 120°$.

9.74 Las propiedades de la región ilustrada son $I_x = 10 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 20 \times 10^6$ mm^4 e $I_{xy} = 12 \times 10^6$ mm^4. Determine I_u, I_v e I_{uv} si $\theta = 33.7°$.

9.75 Los ejes u y v son los ejes principales de la región que se muestra. Si $I_u = 8400$ pulg^4, $I_v = 5000$ pulg^4 y $\theta = 25°$, calcule I_x, I_y e I_{xy}.

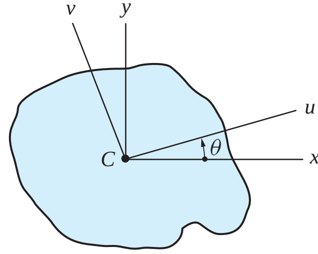


Fig. P9.73-P9.77

9.76 Los ejes x y y son los ejes principales para la región que se muestra, con $I_x = 8 \times 10^6$ mm^4 e $I_y = 2 \times 10^6$ mm^4. (a) Calcule el ángulo θ para el cual I_{uv} es máximo. (b) Determine I_u, I_v e I_{uv} para el ángulo θ determinado en la parte (a).

9.77 Calcule I_v para la región que se muestra, dado que $I_u = 140 \times 10^6$ mm^4, $I_{xy} = -30 \times 10^6$ mm^4 y $\theta = 18°$. Los ejes u y v son los ejes principales para la región.

9.78 El ángulo estructural L80 × 60 × 10 mm tiene las propiedades de sección transversal siguientes: $I_x = 0.808 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 0.388 \times 10^6$ mm^4 e $I_2 = 0.213 \times 10^6$ mm^4, donde I_2 es un momento de inercia centroidal principal. Suponiendo que I_{xy} es negativo, calcule: (a) I_1 (el otro momento de inercia centroidal principal) y (b) las direcciones principales en el centroide.

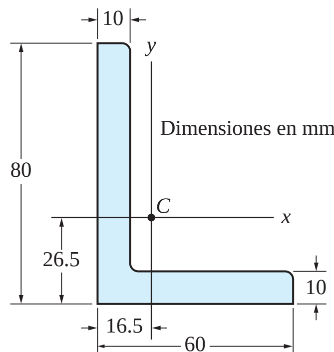


Fig. P9.78

Repaso de ecuaciones

Momentos de inercia de áreas planas

$$I_x = \int_{\mathscr{A}} y^2\, dA \qquad I_y = \int_{\mathscr{A}} x^2 dA \qquad I_{xy} = \int_{\mathscr{A}} xy\, dA$$

$$J_O = \int_{\mathscr{A}} r^2\, dA = I_x + I_y \text{ (momento polar de inercia)}$$

Teoremas de los ejes paralelos

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 \qquad I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 \qquad I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\bar{x}\bar{y}$$

$$J_O = \bar{J}_C + A\bar{r}^2$$

Radio de giro

$$k_x = \sqrt{I_x/A} \qquad k_y = \sqrt{I_y/A} \qquad k_O = \sqrt{J_O/A}$$

Áreas compuestas

$$I_x = \Sigma_i(I_x)_i \qquad I_y = \Sigma_i(I_y)_i \qquad I_{xy} = \Sigma_i(I_{xy})_i \qquad J_O = \Sigma_i(J_O)_i$$

Ecuaciones de transformación

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}\, 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

θ = ángulo medido desde el eje x hasta el eje u en dirección contraria de las manecillas del reloj.

Valores principales y direcciones principales

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm R \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\text{sen}\, 2\theta_{1,2} = \mp\frac{I_{xy}}{R} \qquad \cos 2\theta_{1,2} = \pm\frac{I_x - I_y}{2R}$$

Problemas de repaso

9.79 Determine I_u, I_v e I_{uv} para el rectángulo, donde C es el centroide del área.

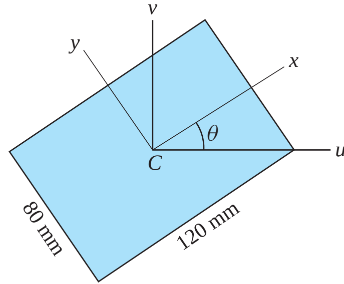


Fig. P9.79

9.80 Los momentos de inercia principales en el punto O para la región sombreada son 60×10^6 mm^4 y 30×10^6 mm^4. Además, el producto de inercia respecto a los ejes x y y es 10×10^6 mm^4. Encuentre: (a) I_x e I_y y (b) I_u e I_v.

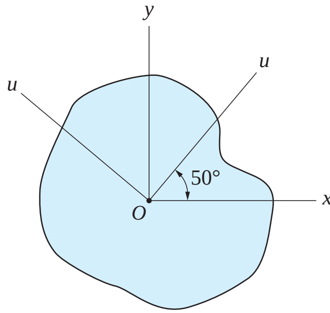


Fig. P9.80

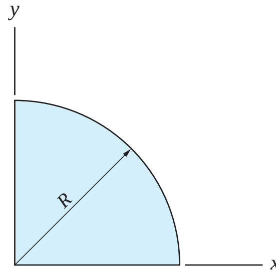


Fig. P9.81

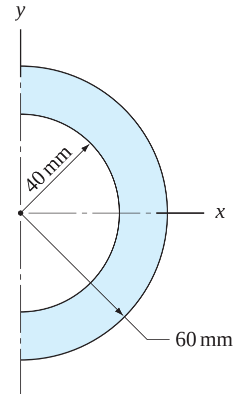


Fig. P9.82

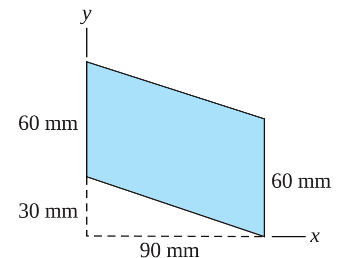


Fig. P9.83

9.81 Mediante integración, demuestre que el producto de inercia respecto a los ejes x y y para la región de un cuarto de círculo es $R^4/8$.

9.82 Calcule $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para la región anular.

9.83 Mediante integración, evalúe los momentos de inercia respecto a los ejes x y y para el paralelogramo.

9.84 Las propiedades inerciales en el punto O para la región plana son $I_x = 200 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 300 \times 10^6$ mm^4 e $I_{xy} = -120 \times 10^6$ mm^4. Determine los momentos de inercia principales y las direcciones principales en el punto O.

9.85 Calcule $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para la región sombreada.

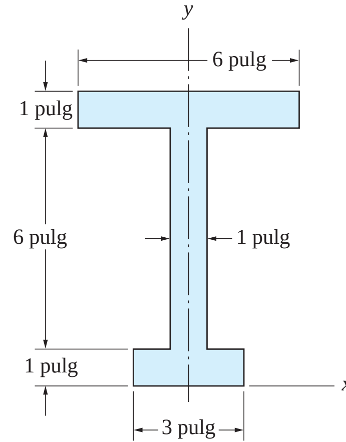


Fig. P9.85

9.86 El acoplamiento bridado se fabrica taladrando 10 agujeros para pernos de 0.5 pulg de diámetro espaciados uniformemente en una placa de acero. Los radios de la placa y del círculo de pernos son 5 y 4 pulg, respectivamente. Determine la reducción porcentual en el momento polar del área respecto al punto *O* debida a la operación de taladrado.

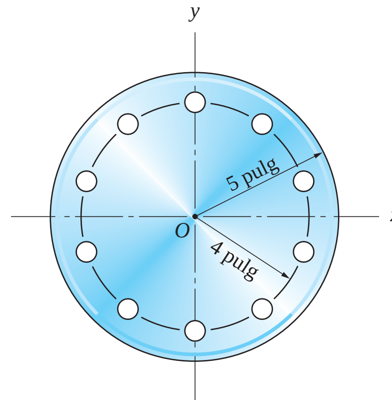


Fig. P9.86

9.87 En la figura se muestra un perfil estructural conocido como ángulo desigual (L). De una tabla de perfiles estructurales, las propiedades inerciales de un L150 × 100 × 10 mm son $\bar{x} = 23.8$ mm, $\bar{y} = 48.8$ mm, $A = 2400$ mm^2, $\bar{I}_x = 5.58 \times 10^6$ mm^4, $\bar{I}_y = 2.03 \times 10^6$ mm^4. Además, el ángulo α que ubica el eje de momento de inercia centroidal mínimo (identificado como el eje 2 en la figura) es de 24.0°, con el radio

de giro correspondiente $\bar{k}_2 = 21.9$ mm. Calcule: (a) el otro momento de inercia centroidal principal y (b) $\bar{I}_{xy}$.

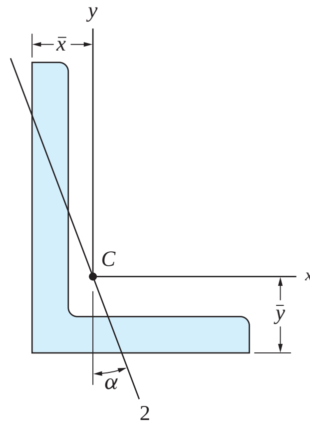


Fig. P9.87

9.88 Calcule $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ e $\bar{I}_{xy}$ para la región ilustrada.

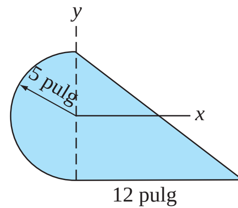


Fig. P9.88

9.89 Determine I_x e I_{xy} para la región ilustrada.

9.90 Calcule $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ e $\bar{I}_{xy}$ para la región ilustrada.

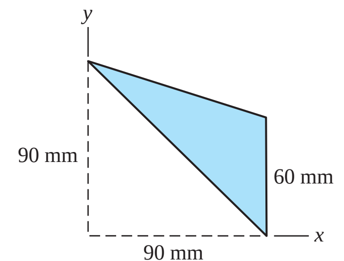


Fig. P9.89

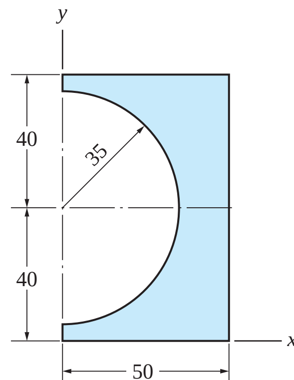


Fig. P9.90

9.91 Para la región plana ilustrada, determine: (a) I_x e I_y y (b) $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ utilizando el teorema de los ejes paralelos y los resultados de la parte (a).

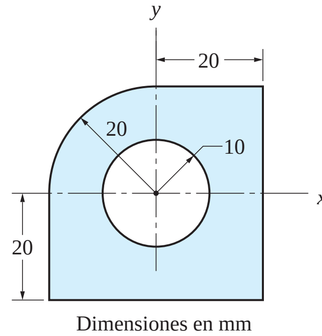


Fig. P9.91

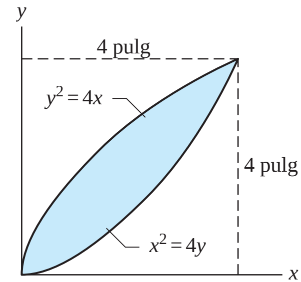


Fig. P9.92

9.92 Mediante integración encuentre I_x, I_y e I_{xy} para la región que se muestra.

9.93 Determine los momentos de inercia principales y las direcciones principales en el centroide de la región ilustrada.

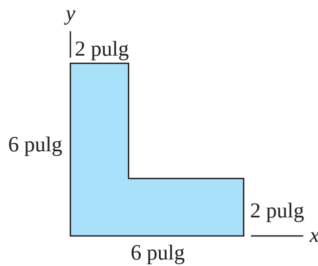


Fig. P9.93

9.94 Las propiedades inerciales de la región que se muestra son $I_x = 140$ pulg^4, $I_y = 264$ pulg^4 e $I_{xy} = -116$ pulg^4. Determine I_u, I_v e I_{uv}. Observe que el eje u pasa por el punto B.

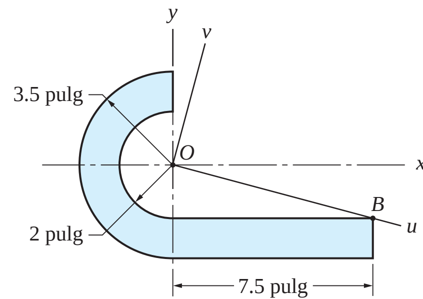


Fig. P9.94

10

Trabajo virtual y energía potencial





Los métodos basados en conceptos de trabajo y energía son adecuados para el análisis de estructuras compuestas de miembros interconectados. El elevador de tijera que se muestra en la fotografía es un ejemplo común de una estructura de miembros múltiples. En este capítulo se abordan dos métodos de análisis de trabajo-energía: el método del trabajo virtual y el principio de la energía potencial estacionaria. Richard Thornton/Shutterstock

*10.1 Introducción

Los métodos basados en conceptos de trabajo virtual y energía potencial se pueden utilizar como alternativas para las leyes de Newton en el análisis de equilibrio. Estos métodos son ideales para el análisis de sistemas compuestos de varios cuerpos rígidos interconectados. La ventaja principal de los métodos de trabajo y energía es que las reacciones en ciertas conexiones, como pasadores o cables inextensibles, no entran en el análisis. Por tanto, el número de incógnitas (y ecuaciones) con frecuencia se reduce en gran medida.

La desventaja de los métodos de trabajo y energía es que requieren que se utilice la cinemática (geometría del movimiento), que es una rama de la dinámica. Para mantener la cinemática relativamente simple, limitaremos nuestro análisis a

problemas bidimensionales. Además de la cinemática, también se debe introducir el concepto de trabajo.

*10.2 Desplazamientos virtuales

a. Definición y notación

Un *desplazamiento virtual* se define como un desplazamiento ficticio de magnitud infinitesimal. Por "ficticio" se quiere dar a entender que el desplazamiento es imaginario; puede que en realidad no ocurra.

La práctica usual es anteceder una cantidad infinitesimal por la letra d. Así pues, el vector desplazamiento infinitesimal del punto A se denotaría por $d\mathbf{r}_A$. Para atraer la atención a su naturaleza ficticia, un desplazamiento virtual se antecede por δ (delta minúscula). De aquí, el desplazamiento virtual del punto A se escribiría $\delta\mathbf{r}_A$.

Matemáticamente, $d\mathbf{r}_A$ y $\delta\mathbf{r}_A$ son idénticos. Por ejemplo, si $\mathbf{r}_A$ es una función de un parámetro θ, se puede escribir $\delta\mathbf{r}_A = (d\mathbf{r}_A/d\theta)\delta\theta$, donde $\delta\theta$ es el cambio virtual en θ.

b. Movimiento virtual de un cuerpo rígido

Traslación virtual La traslación virtual de un cuerpo rígido se ilustra en la figura 10.1. Dos características de la traslación son:

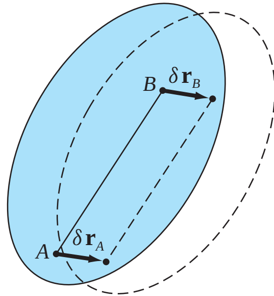


Fig. 10.1

- Cualquier línea recta contenida en el cuerpo, como la línea AB, permanece paralela a su posición original. Es decir, las líneas contenidas no giran.
- Todos los puntos del cuerpo tienen el mismo desplazamiento. Por tanto,

$$\delta\mathbf{r}_B = \delta\mathbf{r}_A \tag{10.1}$$

donde A y B son cualesquiera dos puntos del cuerpo.

Rotación virtual respecto a un punto fijo En la figura 10.2 se ilustra la rotación virtual $\delta\theta$ de un cuerpo rígido respecto al punto A. Las características de este movimiento son:

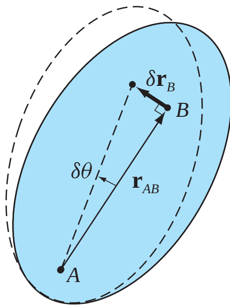


Fig. 10.2

- Cada línea contenida en el cuerpo experimenta la misma rotación virtual $\delta\theta$.
- Cualquier punto del cuerpo, como el B, se mueve a lo largo de un arco circular centrado en A. La magnitud del desplazamiento virtual de B es

$$\delta r_B = r_{AB}\,\delta\theta \tag{10.2}$$

donde r_{AB} es la magnitud de $\mathbf{r}_{AB}$ (el vector trazado de A a B).

En ocasiones es conveniente utilizar la forma vectorial de la ecuación (10.2), que es

$$\delta\mathbf{r}_B = \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{AB} \tag{10.3}$$

donde $\delta\boldsymbol{\theta}$ es el vector rotación virtual que se muestra en la figura 10.3. Es muy fácil verificar que la ecuación (10.3) produce la magnitud y dirección correctas de $\delta\mathbf{r}_B$.

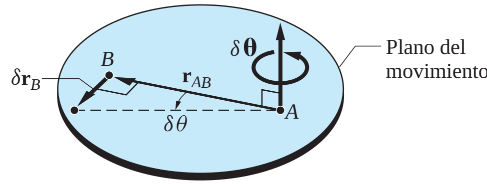


Fig. 10.3

Movimiento virtual plano general Cualquier movimiento virtual de un cuerpo rígido se puede obtener por una superposición de traslación y rotación respecto a un punto, como se ilustra en la figura 10.4. Primero aplicamos la traslación $\delta\mathbf{r}_A$, que mueve el punto A a su posición final sin cambiar la orientación del cuerpo. Esto se sigue por la rotación $\delta\theta$ respecto a A para dar al cuerpo su orientación final. El desplazamiento virtual resultante del punto B es

$$\delta\mathbf{r}_B = \delta\mathbf{r}_A + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{AB} \tag{10.4}$$

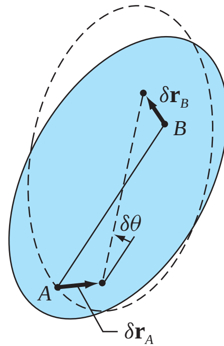


Fig. 10.4

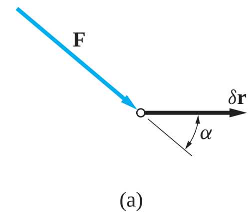
El punto de referencia A se puede elegir de manera arbitraria. El orden en el que los dos movimientos (traslación y rotación) se efectúan es irrelevante.

*10.3 Trabajo virtual

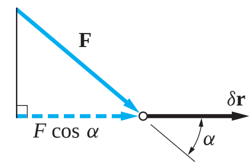
a. Trabajo virtual de una fuerza

Si el punto de aplicación de una fuerza $\mathbf{F}$ experimenta un desplazamiento virtual $\delta\mathbf{r}$, como se muestra en la figura 10.5(a), el trabajo virtual δU realizado por la fuerza se define como:

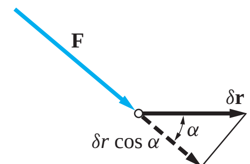
$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = F \cos\alpha \, \delta r \tag{10.5}$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 10.5

donde α es el ángulo entre **F** y $\delta\mathbf{r}$. Observe que el trabajo virtual es un escalar que puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo α. La dimensión del trabajo virtual es $[FL]$; de aquí que sus unidades sean lb · pie, N · m, etcétera.

Con referencia a las figuras 10.5(b) y 10.5(c), se observa que el trabajo virtual se puede considerar de dos maneras:

- $\delta U = (F \cos \alpha)\, dr$, donde $F \cos \alpha$ (la componente de **F** en la dirección de $\delta\mathbf{r}$) se denomina *componente de trabajo* de la fuerza.
- $\delta U = F(\delta r \cos \alpha)$, donde $\delta r \cos \alpha$ (la componente de $\delta\mathbf{r}$ en la dirección de **F**) se conoce como *componente absorbente de trabajo* del desplazamiento virtual.

b. *Trabajo virtual de un par*

En la figura 10.6(a) se muestra un par formado por las fuerzas –**F** y **F** que actúan en los puntos A y B de un cuerpo rígido. El par-vector correspondiente $\mathbf{C} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}$ es perpendicular al plano del par, como se indica en la figura 10.6(b). Si el cuerpo experimenta un movimiento virtual en el plano del par, el trabajo virtual del par es

$$\delta U = -\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}_A + \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}_B$$

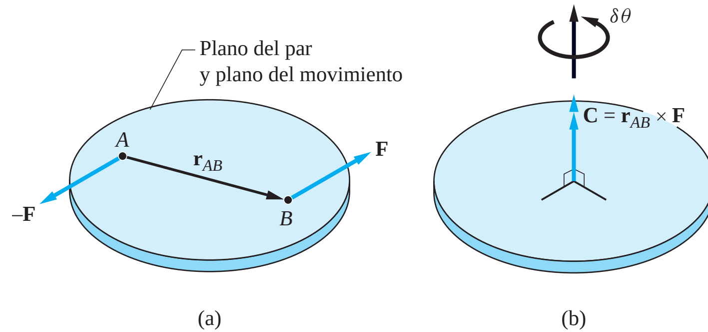


Fig. 10.6

Sustituyendo el valor de $\delta\mathbf{r}_B$ de la ecuación (10.4), se obtiene

$$\delta U = -\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}_A + \mathbf{F} \cdot (\delta\mathbf{r}_A + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{AB}) = \mathbf{F} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} \cdot \delta\boldsymbol{\theta}$$

o

$$\delta U = \mathbf{C} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \tag{10.6}$$

Como **C** y $\delta\boldsymbol{\theta}$ son colineales (recuerde que sólo estamos considerando problemas bidimensionales), el trabajo virtual del par también se puede escribir como

$$\delta U = C\, \delta\theta \tag{10.7}$$

Observe que δU es positivo si **C** y $\delta\boldsymbol{\theta}$ tienen el mismo sentido y negativo si tienen sentidos opuestos.

c. Trabajo virtual realizado sobre un cuerpo rígido

El teorema siguiente en ocasiones es útil en el cálculo del trabajo virtual (este teorema también se necesita para deducir el principio del trabajo virtual):

El trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido es igual al trabajo virtual de su resultante.

Demostración

Considere un cuerpo rígido que está sometido a las fuerzas coplanares $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . , $\mathbf{F}_i$. . . , como se muestra en la figura 10.7(a). En la figura 10.7(b) se muestra la resultante de este sistema de fuerzas que consiste de la fuerza $\mathbf{R} = \Sigma_i \mathbf{F}_i$ actuando en A y del par $\mathbf{C}^R = \Sigma_i \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i$, donde $\mathbf{r}_{Ai}$ es el vector trazado desde A hasta el punto de aplicación de $\mathbf{F}_i$. Si el cuerpo experimenta un desplazamiento virtual, el trabajo virtual de todas las fuerzas es

$$\delta U = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

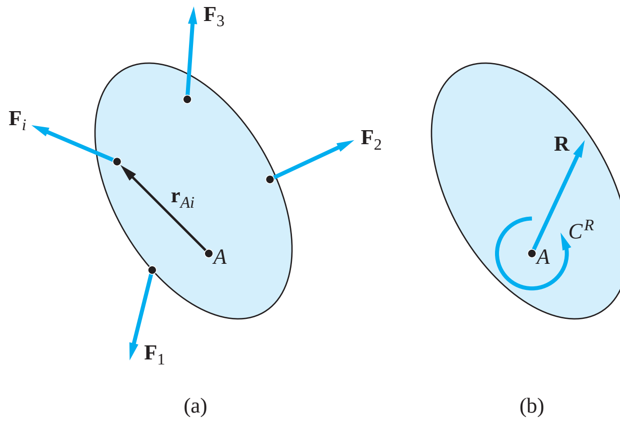


Fig. 10.7

Utilizando la ecuación (10.4), se sustituye $\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_A + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{Ai}$, lo que resulta en

$$\delta U = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_A + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{Ai}$$

El primer término en esta expresión es

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_A = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_A = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}_A$$

El segundo término se puede escribir como

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{Ai} = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = \left(\sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{C}^R \cdot \delta \boldsymbol{\theta}$$

Por tanto, el trabajo virtual realizado sobre el cuerpo es

$$\delta U = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}_A + \mathbf{C}^R \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \tag{10.8}$$

lo que completa la demostración.

d. Trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos

Considere un sistema de cuerpos rígidos interconectados, donde las fuerzas de fricción en las conexiones y en los soportes son despreciables. El trabajo virtual de fuerzas de fricción introduciría complicaciones que a este nivel deseamos evitar. Las conexiones que consideramos están por tanto limitadas a pasadores, rodillos, cables inextensibles y extensibles, resortes ideales, etcétera.

Si a un sistema de cuerpos rígidos interconectados se le da un desplazamiento virtual, el trabajo virtual realizado sobre el sistema es igual al trabajo virtual de las fuerzas externas, más el trabajo virtual de las fuerzas internas. En conexiones que no se deforman, el trabajo realizado neto por las fuerzas internas es cero. Por ejemplo, si un pasador une dos cuerpos rígidos, el trabajo positivo de la reacción en el pasador actuando sobre un cuerpo cancela el trabajo negativo de la reacción en el pasador actuando sobre el otro cuerpo. La razón de esta cancelación es que las reacciones en el pasador actuando sobre los dos cuerpos son iguales en magnitud, opuestas en dirección y experimentan desplazamientos iguales. Las fuerzas proporcionadas por un conector deformable también pueden ser iguales y opuestas; sin embargo, debido a la deformación, no necesariamente experimentan el mismo desplazamiento. En consecuencia, una conexión deformable puede realizar trabajo virtual sobre un sistema. Los resortes son las únicas conexiones deformables que se consideran en este libro.

*10.4 Método del trabajo virtual

a. Principio del trabajo virtual

El principio del trabajo virtual para un cuerpo rígido establece lo siguiente:

Si un cuerpo está en equilibrio, entonces el trabajo virtual de todas las fuerzas actuando sobre el cuerpo es cero para todos los desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles del cuerpo desde la posición de equilibrio.

El término *cinemáticamente admisible* significa que los desplazamientos virtuales deben ser cinemáticamente posibles; es decir, no deben violar las restricciones impuestas por los soportes.

La demostración del principio se deduce directamente de la ecuación (10.8). Si un cuerpo está en equilibrio, la resultante de las fuerzas que actúa sobre él desaparecen; es decir, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{C}^R = \mathbf{0}$ y la ecuación (10.8) se convierte en

$$\delta U = 0 \tag{10.9}$$

El principio del trabajo virtual también se aplica a sistemas de cuerpos rígidos conectados. Dado que un sistema puede estar en equilibrio sólo si cada uno de sus

miembros (cuerpos constituyentes) está en equilibrio, se concluye que $\delta U = 0$ para cada miembro. Se deduce que el trabajo virtual realizado sobre el sistema también desaparece. En otras palabras:

Si un sistema de cuerpos rígidos está en equilibrio, entonces el trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema es cero para todos los desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles del sistema desde la posición de equilibrio.

b. Restricciones cinemáticas y coordenadas independientes

Los términos siguientes se utilizan con frecuencia en la cinemática (geometría del movimiento):

- Las *restricciones cinemáticas* son restricciones geométricas impuestas sobre la configuración de un sistema.
- Las *coordenadas cinemáticamente independientes* de un sistema son parámetros que definen la configuración del sistema y se pueden variar independientemente sin violar las restricciones cinemáticas.
- El *número de grados de libertad* (número de GDL) de un sistema es el número de coordenadas cinemáticamente independientes necesarias para definir completamente la configuración del sistema.
- Las *ecuaciones de restricción* son relaciones matemáticas entre las coordenadas de posición que describen las restricciones cinemáticas.

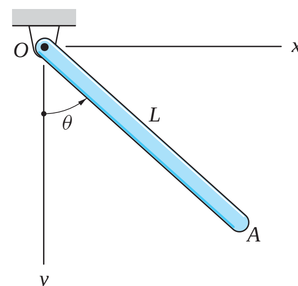


Fig. 10.8

Para ilustrar estos términos, considere la barra que se muestra en la figura 10.8. Esta barra tiene un solo GDL, ya que sólo se requiere una coordenada, como el ángulo θ para definir la posición de cada punto en la barra. Como no hay restricciones cinemáticas sobre θ, es una coordenada cinemáticamente independiente.

El sistema de dos barras en la figura 10.9 también tiene un GDL. Para la coordenada cinemáticamente independiente se puede elegir θ_1 y θ_2. Al seleccionar cualquiera de los dos ángulos, el otro queda determinado por la ecuación de restricción $L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 = d$. Cualquier configuración de las barras que viole esta ecuación de restricción es cinemáticamente inadmisible.

En la figura 10.10 se muestra un sistema con dos GDL. Este sistema requiere dos coordenadas cinemáticamente independientes, como θ_1 y θ_2, para describir completamente su configuración.

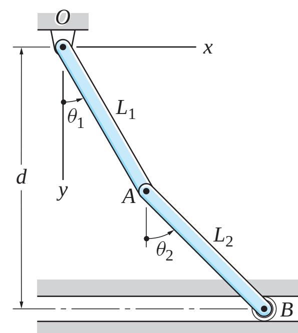


Fig. 10.9

c. Implementación del método del trabajo virtual

Al aplicar el método del trabajo virtual, se debe estar seguro de que los desplazamientos virtuales de los puntos donde se aplican las cargas (los desplazamientos que contribuyen al trabajo virtual) sean cinemáticamente admisibles. Esto se puede lograr mediante los dos pasos siguientes:

- Primero, utilice geometría para relacionar las coordenadas de los puntos donde actúan las cargas con las coordenadas cinemáticamente independientes.
- Luego obtenga las relaciones entre los cambios virtuales de estas coordenadas (los desplazamientos virtuales) mediante diferenciación.

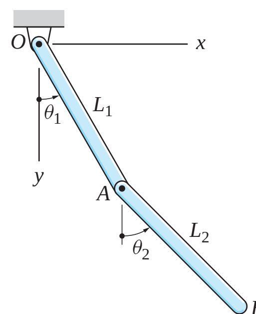


Fig. 10.10

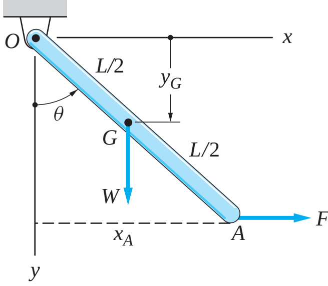


Fig. 10.11

Como ejemplo, considere la barra que se muestra en la figura 10.11. El peso de la barra es W y su centro de gravedad está denotado por G. El trabajo virtual realizado sobre la barra es

$$\delta U = W\,\delta y_G + F\,\delta x_A$$

Eligiendo θ como la coordenada cinemáticamente independiente, se obtiene por geometría

$$y_G = \frac{L}{2}\cos\theta \qquad x_A = L\,\text{sen}\,\theta$$

Tomando las diferenciales de las coordenadas (recuerde que los cambios virtuales son idénticos a los diferenciales), se obtiene

$$\delta y_G = -\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta \qquad \delta x_A = L\cos\theta\,\delta\theta$$

Por tanto, el trabajo virtual realizado sobre la barra es

$$\delta U = \left(-\frac{W}{2}\,\text{sen}\,\theta + F\cos\theta\right) L\,\delta\theta$$

Si θ es una posición de equilibrio, entonces $\delta U = 0$ para cualquier $\delta\theta$ que no sea cero. En consecuencia, la condición para el equilibrio es

$$-\frac{W}{2}\,\text{sen}\,\theta + F\cos\theta = 0$$

Considere ahora un sistema de cuerpos con n grados de libertad donde $q_1, q_2, \ldots,$ q_n son las coordenadas cinemáticamente independientes. Si se sigue el procedimiento delineado antes, el trabajo virtual realizado sobre el sistema tomará la forma

$$\delta U = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \cdots + Q_n\,\delta q_n \tag{10.10}$$

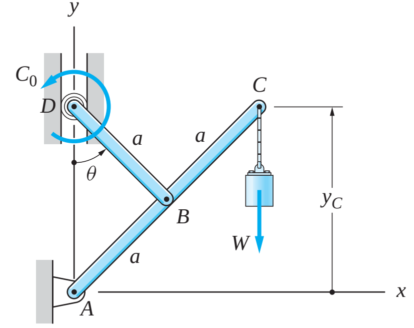
donde cada Q_i es en general una función de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Si el sistema está en equilibrio, entonces $\delta U = 0$ para cualquier combinación que no sea cero de δq. Esta condición se puede satisfacer sólo si

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = 0$$

Las Q se conocen como *fuerzas generalizadas*. Si q_i tiene unidades de distancia, entonces Q_i tiene unidades de fuerza; si q_i es un ángulo, entonces Q_i tiene unidades de momento de una fuerza.

Al aplicar el método del trabajo virtual, se recomienda que se inicie trazando un *diagrama de fuerzas activas*, que es un bosquejo del cuerpo que muestra sólo las fuerzas que realizan trabajo. La figura 10.11 es un ejemplo de un diagrama de fuerzas activas. Sólo presenta las fuerzas que producen trabajo W y F. Las reacciones en el pasador en O se omitieron, ya que no realizan trabajo (el punto O no se mueve).

Problema de ejemplo **10.1**



Calcule el par C_0 que soportará la carga W. Ignore los pesos de las barras.

Solución

Observe que el sistema posee un GDL debido a que su configuración se puede especificar mediante una sola coordenada, como el ángulo θ.

La figura es un diagrama de fuerzas activas dado que W y C_0 realizan trabajo virtual cuando al sistema se le da un desplazamiento virtual consistente con las restricciones. La reacción en el pasador en A no realiza trabajo ya que su punto de aplicación no se mueve. La reacción en el rodillo en D no realiza trabajo debido a que es horizontal, en tanto que el desplazamiento virtual en el extremo D sólo puede ser vertical. Las fuerzas internas, incluyendo la reacción en el pasador en B, tampoco realizan trabajo.

La figura también se puede emplear para el análisis cinemático. Introducimos el sistema coordenado xy con origen en el punto fijo A y se elige el ángulo θ como la coordenada cinemáticamente independiente. La coordenada vertical del extremo C se denota y_C.

Aplicando el principio del trabajo virtual al sistema en consideración, se tiene

$$\delta U = C_0\,\delta\theta - W\,\delta y_C = 0 \tag{a}$$

donde $\delta\theta$ es la rotación virtual de la barra BD y δy_C es el desplazamiento virtual vertical de C. Las direcciones positivas para $\delta\theta$ y δy_C son, por supuesto, las mismas que para θ y y_C, respectivamente. El signo del primer término en la ecuación (a) es positivo debido a que $\delta\theta$ positivo tiene el mismo sentido que C_0 positivo. El segundo término tiene un signo negativo ya que el sentido positivo de W es opuesto al sentido positivo de δy_C.

Ahora se relaciona y_C con θ utilizando geometría y luego se obtiene δy_C en términos de $\delta\theta$ por diferenciación. Con referencia a la figura, este procedimiento da

$$y_C = 2a\cos\theta$$

$$\delta y_C = \frac{dy_C}{d\theta}\,\delta\theta = -2a\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta \tag{b}$$

Sustituyendo la ecuación (b) en la ecuación (a), se obtiene

$$\delta U = C_0\,\delta\theta - W(-2a\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta) = 0$$

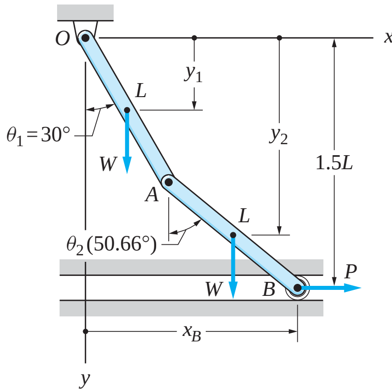
o

$$(C_0 + 2Wa\,\text{sen}\,\theta)\,\delta\theta = 0 \tag{c}$$

La ecuación (c) se puede satisfacer para $\delta\theta$ que no sea cero sólo si el término entre paréntesis (que representa la fuerza generalizada correspondiente a $\delta\theta$) desaparece, lo que da

$$C_0 = -2Wa\,\text{sen}\,\theta \qquad \textit{Respuesta}$$

como la condición para el equilibrio. El signo negativo indica que el sentido correcto de C_0 es opuesto al que se muestra en la figura.



Problema de ejemplo **10.2**

El mecanismo que se muestra en la figura consiste de dos barras homogéneas de peso W y longitud L cada una, conectadas con pasadores. El rodillo en B se mueve en una ranura horizontal, ubicada a la distancia $1.5L$ debajo del pasador en O. Determine la fuerza P que mantendrá en equilibrio el sistema para $\theta_1 = 30°$.

Solución

El sistema tiene un GDL ya que sólo se requiere una coordenada de posición, por ejemplo, θ_1 o θ_2, para especificar su configuración. La figura también es un diagrama de fuerzas activas, dado que sólo muestra las fuerzas que pueden realizar trabajo virtual sobre el sistema. Las reacciones en O y A, y la reacción en el rodillo en B, se omiten debido a que su trabajo virtual es cero.

Es conveniente utilizar la misma figura para el análisis cinemático. Se introduce el sistema coordenado xy que se muestra, del cual el origen está ubicado en el punto fijo O. Las coordenadas y_1 y y_2 ubican los centros de gravedad de las barras y x_B es la coordenada horizontal del extremo B.

Si al sistema se le da un desplazamiento virtual consistente con las restricciones, el principio del trabajo virtual toma la forma

$$\delta U = W\,\delta y_1 + W\,\delta y_2 + P\,\delta x_B = 0 \tag{a}$$

Todos los signos en la ecuación (a) son positivos ya que la dirección de cada fuerza es la misma que la dirección de la coordenada positiva de su punto de aplicación.

El paso siguiente es expresar δy_1, δy_2 y δx_B como funciones del cambio virtual en la coordenada cinemáticamente independiente. Se elige θ_1 como la coordenada independiente. Como el rodillo en B está restringido a moverse en la ranura horizontal, la ecuación de restricción es $L \cos\theta_1 + L\cos\theta_2 = 1.5L$, o

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 1.5 \tag{b}$$

lo que da $\theta_2 = 50.66°$ cuando $\theta_1 = 30°$. La evaluación de δy_1, δy_2 y δx_B en términos de la rotación virtual $\delta\theta_1$ ahora procede como sigue.

Evaluación de δy_1

De la figura, se observa que $y_1 = (L/2)\cos\theta_1$. Formando la diferencial de los dos lados evaluando en $\theta_1 = 30°$, se tiene que

$$\delta y_1 = \frac{dy_1}{d\theta_1}\,\delta\theta_1 = -\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta_1\,\delta\theta_1 = -0.2500L\,\delta\theta_1 \tag{c}$$

Evaluación de δy_2

De la figura, $y_2 = L\cos\theta_1 + (L/2)\cos\theta_2$. Sustituyendo θ_2 de la ecuación (b) y simplificando, da $y_2 = (L/2)\cos\theta_1 + 0.75\,L$. Tomando la diferencial de cada lado y sustituyendo $\theta_1 = 30°$, se obtiene

$$\delta y_2 = \frac{dy_2}{d\theta_1}\,\delta\theta_1 = -\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta_1\,\delta\theta_1 = -0.2500L\,\delta\theta_1 \tag{d}$$

Evaluación de δx_B

De la figura, $x_B = L \operatorname{sen} \theta_1 + L \operatorname{sen} \theta_2$. En principio, θ_2 se podría eliminar utilizando la ecuación (b), pero esto resultaría en una expresión muy incómoda. Es mucho más fácil primero formar las diferenciales y luego efectuar la sustitución. De la regla de la cadena para diferenciación, se obtiene

$$\delta x_B = \frac{\partial x_B}{\partial \theta_1} \delta\theta_1 + \frac{\partial x_B}{\partial \theta_2} \delta\theta_2$$

lo que da

$$\delta x_B = L \cos\theta_1 \, \delta\theta_1 + L \cos\theta_2 \, \delta\theta_2 \tag{e}$$

De la ecuación (b) se obtiene la ecuación de restricción siguiente en términos de $\delta\theta_1$ y $\delta\theta_2$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\,\delta\theta_1 + \frac{\partial}{\partial\theta_2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\,\delta\theta_2 = 0$$

o

$$-\operatorname{sen}\theta_1 \, \delta\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2 \, \delta\theta_2 = 0$$

lo que da

$$\delta\theta_2 = -(\operatorname{sen}\theta_1 / \operatorname{sen}\theta_2)\,\delta\theta_1 \tag{f}$$

Sustituyendo la ecuación (f) en la ecuación (e), se tiene que

$$\delta x_B = L \cos\theta_1 \, \delta\theta_1 + L \cos\theta_2 \left(-\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2}\right) \delta\theta_1$$

lo que, cuando se evalúa en $\theta_1 = 30°$ y $\theta_2 = 50.66°$, da

$$\delta x_B = 0.4562L \, \delta\theta_1 \tag{g}$$

Ecuación del trabajo virtual

Sustituyendo las ecuaciones (c), (d) y (g) en la ecuación (a) da

$$\delta U = W(-0.2500L \, \delta\theta_1) + W(-0.2500L \, \delta\theta_1) + P(0.4562L \, \delta\theta_1) = 0$$

lo que simplifica a

$$(-0.5W + 0.4562P)\delta\theta_1 = 0 \tag{h}$$

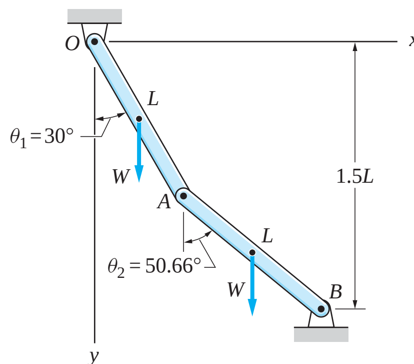
Esta ecuación se puede satisfacer para una $\delta\theta_1$ que no sea cero sólo si el término entre paréntesis desaparece, lo que da

$$P = 1.096W \qquad \text{Respuesta}$$

Como P es positiva, su dirección es como se muestra en la figura.

Problema de ejemplo 10.3

La estructura que se muestra en la figura (a) se obtiene fijando el punto B del mecanismo en el problema de ejemplo 10.2. Para $\theta_1 = 30°$, determine las reacciones en el pasador B_x y B_y.



(a)

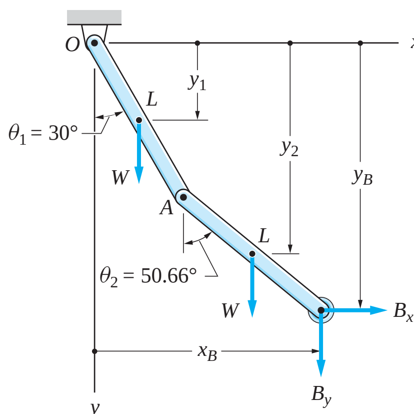
Solución

Utilizando $\theta_1 = 30°$, se determinó por geometría en el problema de ejemplo 10.2 que $\theta_2 = 50.66°$.

Como el sistema en la figura (a) es una estructura y no un mecanismo, no tiene GDL. Para determinar las reacciones en B mediante el método del trabajo virtual, se deben convertir B_x y B_y en fuerzas activas removiendo el soporte en B.

En la figura (b) se muestra el sistema con B_x y B_y como fuerzas activas. En este caso, los ángulos θ_1 y θ_2 son coordenadas de posición independientes; en consecuencia, el sistema posee dos GDL. El principio del trabajo virtual establece que en equilibrio

$$\delta U = W\,\delta y_1 + W\,\delta y_2 + B_x\,\delta x_B + B_y\,\delta y_B = 0 \qquad \text{(a)}$$



(b)

Los desplazamientos virtuales en la ecuación (a) se pueden relacionar con $\delta\theta_1$ y $\delta\theta_2$ como se muestra:

$$y_1 = \frac{L}{2}\cos\theta_1$$

$$\delta y_1 = \frac{dy_1}{d\theta_1}\,\delta\theta_1 = -\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta_1\,\delta\theta_1 \qquad \text{(b)}$$

$$y_2 = L\cos\theta_1 + \frac{L}{2}\cos\theta_2$$

$$\delta y_2 = \frac{\partial y_2}{\partial\theta_1}\,\delta\theta_1 + \frac{\partial y_2}{\partial\theta_2}\,\delta\theta_2$$

$$\delta y_2 = -L\,\text{sen}\,\theta_1\,\delta\theta_1 - \frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta_2\,\delta\theta_2 \qquad \text{(c)}$$

$$x_B = L\,\text{sen}\,\theta_1 + L\,\text{sen}\,\theta_2$$

$$\delta x_B = \frac{\partial x_B}{\partial\theta_1}\,\delta\theta_1 + \frac{\partial x_B}{\partial\theta_2}\,\delta\theta_2$$

$$\delta x_B = L\cos\theta_1\,\delta\theta_1 + L\cos\theta_2\,\delta\theta_2 \qquad \text{(d)}$$

$$y_B = L\cos\theta_1 + L\cos\theta_2$$

$$\delta y_B = \frac{\partial y_B}{\partial\theta_1}\,\delta\theta_1 + \frac{\partial y_B}{\partial\theta_2}\,\delta\theta_2$$

$$\delta y_B = -L\,\text{sen}\,\theta_1\,\delta\theta_1 - L\,\text{sen}\,\theta_2\,\delta\theta_2 \qquad \text{(e)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (b) a (e) en la ecuación (a) y reagrupando términos, se obtiene

$$\begin{aligned}\delta U = &\left(-\frac{W}{2}\,\text{sen}\,\theta_1 - W\,\text{sen}\,\theta_1 + B_x\cos\theta_1 - B_y\,\text{sen}\,\theta_1\right)L\,\delta\theta_1\\ &+\left(-\frac{W}{2}\,\text{sen}\,\theta_2 + B_x\cos\theta_2 - B_y\,\text{sen}\,\theta_2\right)L\,\delta\theta_2 = 0\end{aligned} \qquad \text{(f)}$$

Como $\delta\theta_1$ y $\delta\theta_2$ son independientes, la ecuación (f) estará satisfecha si cada uno de los términos entre paréntesis es cero; es decir,

$$-\frac{3W}{2}\,\text{sen}\,\theta_1 + B_x\cos\theta_1 - B_y\,\text{sen}\,\theta_1 = 0 \qquad \text{(g)}$$

y

$$-\frac{W}{2}\,\text{sen}\,\theta_2 + B_x\cos\theta_2 - B_y\,\text{sen}\,\theta_2 = 0 \qquad \text{(h)}$$

Sustituyendo $\theta_1 = 30°$ y $\theta_2 = 50.66°$, y resolviendo las ecuaciones (g) y (h) simultáneamente, se obtiene

$$B_x = 1.096W \qquad \text{y} \qquad B_y = 0.398W$$ *Respuesta*

Problemas

10.1 Determine el número de GDL para cada uno de los mecanismos ilustrados.

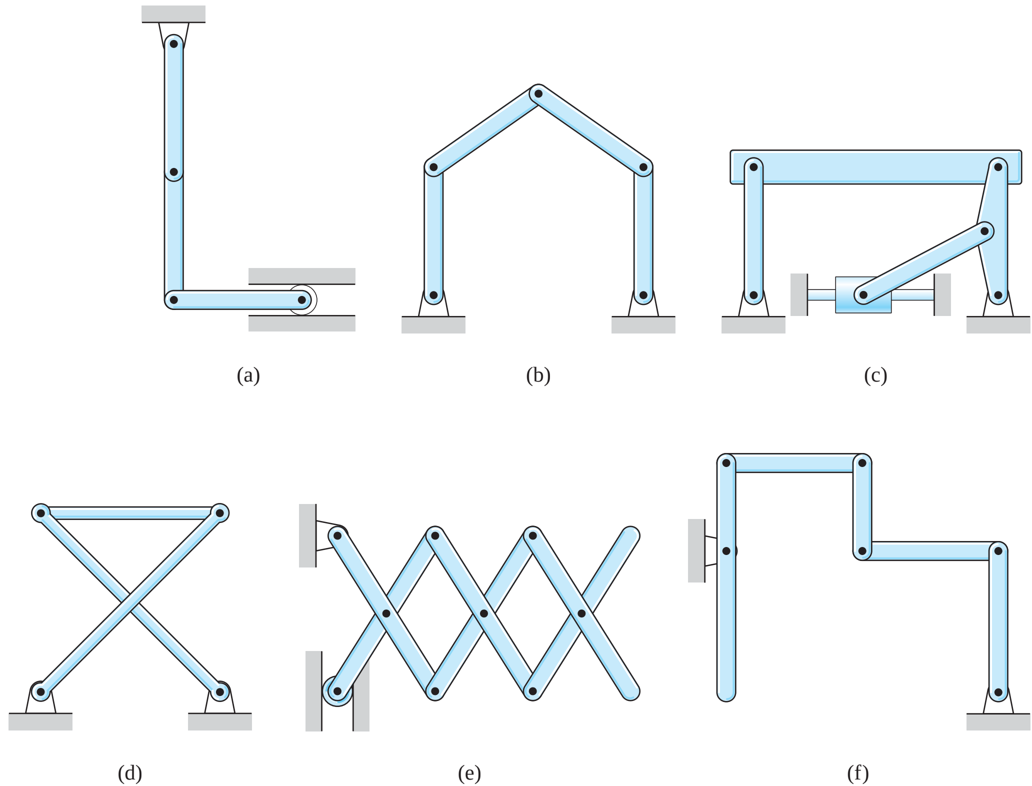


Fig. P10.1

En los problemas siguientes ignore la fricción.

10.2 La barra uniforme de peso W se mantiene en equilibrio por el par C_0. Encuentre C_0 en términos de W, L y θ.

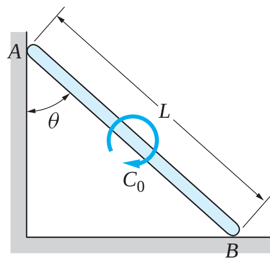


Fig. P10.2

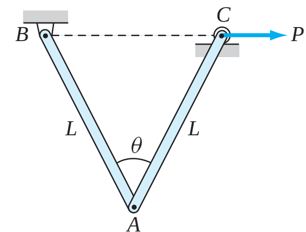


Fig. P10.3

10.3 Las barras AB y AC del mecanismo son homogéneas y cada una pesa W. Determine la fuerza P necesaria para mantener el mecanismo en la posición indicada.

10.4 Un bloque uniforme de 240 kg está soportado por dos barras de masa despreciable. Determine el par C_0 que mantendrá el sistema en la posición $\theta = 30°$.

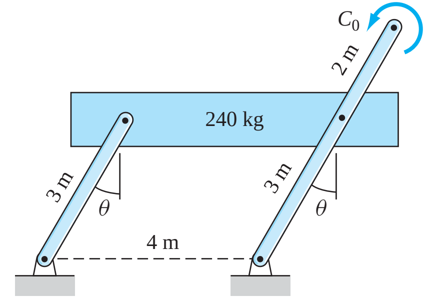


Fig. P10.4

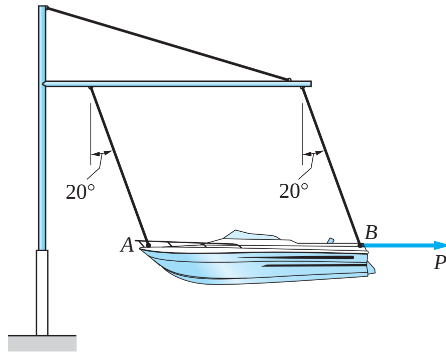


Fig. P10.5

10.5 Un barco de 1800 kg está suspendido de dos cables paralelos de igual longitud. La ubicación del centro de gravedad del barco no se conoce. Calcule la fuerza P necesaria para mantenerlo en la posición indicada.

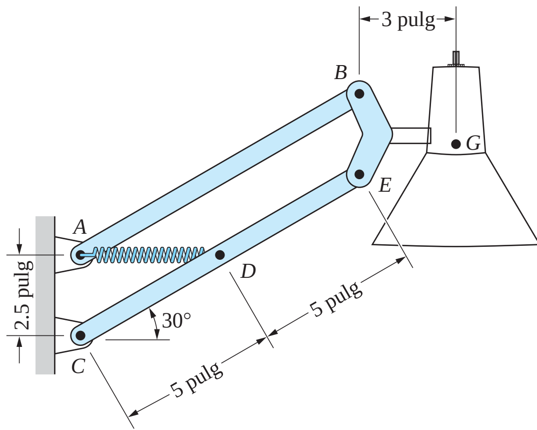


Fig. P10.6

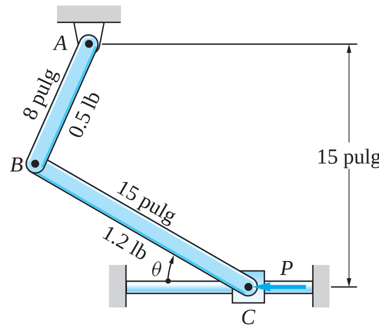


Fig. P10.7

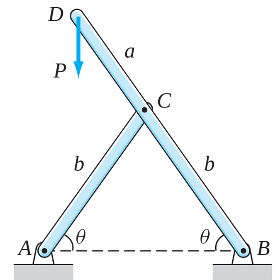


Fig. P10.8

10.6 Una lámpara de 5 lb, con centro de gravedad ubicado en G, está soportada por el sistema articulado tipo paralelogramo de peso despreciable. Encuentre la tensión en el resorte AD cuando la lámpara está en equilibrio en la posición indicada.

10.7 Determine la fuerza P que mantendrá el mecanismo en equilibrio en la posición $\theta = 40°$.

10.8 Para el marco que se muestra, encuentre la componente horizontal de la reacción en el soporte en B. Ignore los pesos de los elementos.

10.9 El sistema articulado de cuatro barras soporta la caja homogénea de peso W. Ignorando el peso del sistema, determine las reacciones horizontales en el pasador en A y B.

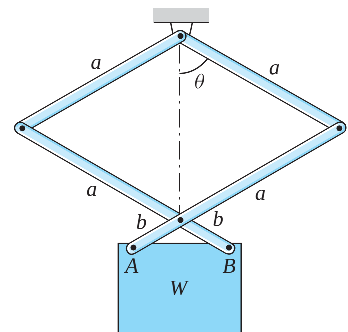


Fig. P10.9

10.10 La barra uniforme *AB* de 320 lb se mantiene en la posición que se indica por el cable *AC*. Calcule la tensión en este cable.

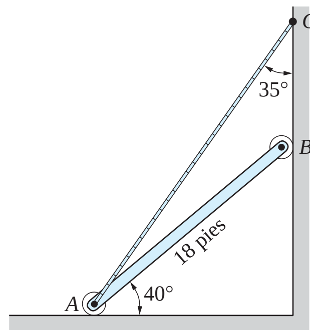


Fig. P10.10

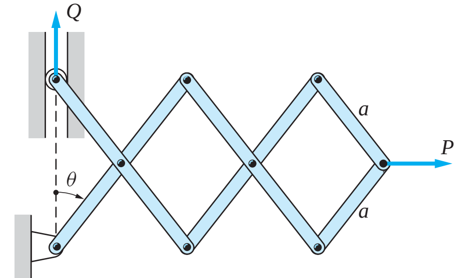


Fig. P10.11

10.11 Determine la relación *P*/*Q* de las fuerzas que se necesitan para mantener en equilibrio el mecanismo para un ángulo arbitrario θ. Ignore el peso del mecanismo.

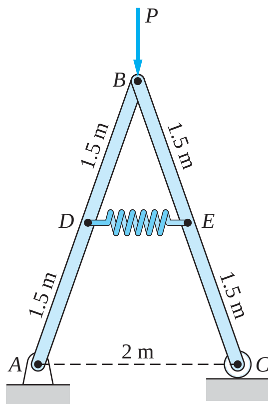


Fig. P10.12

10.12 Ignorando los pesos de los miembros, determine la fuerza *P* que mantendrá el mecanismo en la posición indicada. El resorte *DE* tiene una longitud libre de 0.5 m y una rigidez de 1.2 kN/m.

10.13 El sistema articulado del sistema de frenado consiste del brazo del pedal *DAB*, de la barra de conexión *BC* y del cilindro hidráulico *C*. ¿A qué ángulo θ será la fuerza *Q* cuatro veces mayor que la fuerza *P* que se aplica al pedal? Ignore el peso del mecanismo.

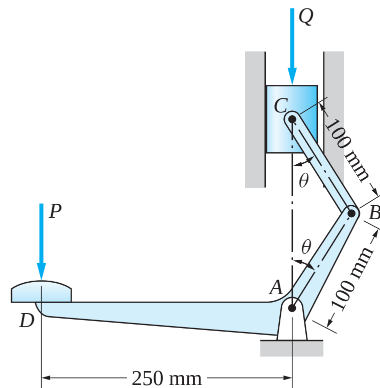


Fig. P10.13

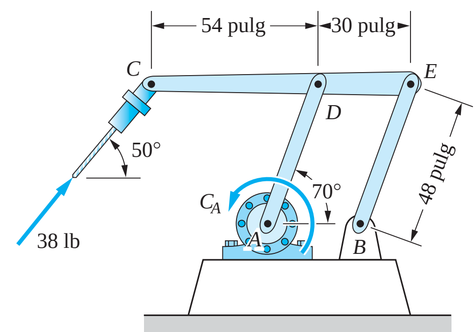


Fig. P10.14

10.14 El robot de perforación automática debe mantener un empuje de 38 lb en la punta de la broca. Determine el par C_A que debe desarrollar el motor eléctrico en *A* para resistir este empuje. Ignore los pesos de los miembros.

10.15 Determine el par *C* para el cual el mecanismo estará en equilibrio en la posición $\theta = 25°$. Ignore los pesos de los miembros.

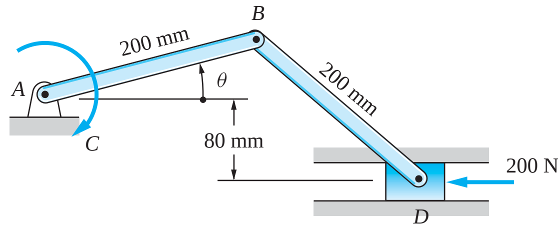


Fig. P10.15

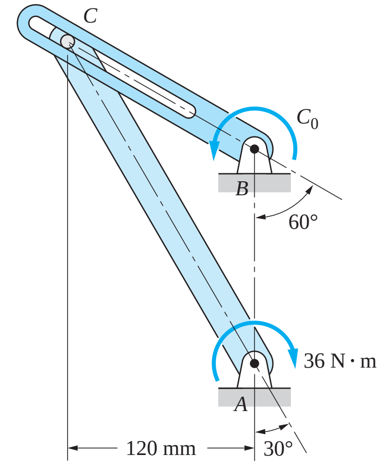


Fig. P10.16

10.16 En el amplificador de movimiento angular, el movimiento oscilatorio de *AC* se magnifica por el movimiento oscilatorio de *BC*. Ignorando los pesos de los miembros, determine el par de torsión de salida C_0, si el de entrada es 36 N · m.

10.17 El extremo *B* de la barra homogénea de 60 lb se jala por la fuerza de 80 lb inclinada a 45° respecto a la horizontal. Encuentre θ, el ángulo de inclinación de la barra.

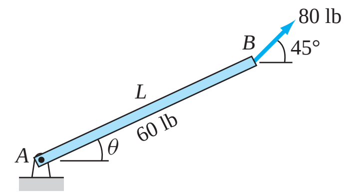


Fig. P10.17

10.18 Calcule el par de torsión C_0 que se debe aplicar a la manija del gato de tornillo a fin de levantar la carga $P = 3$ kN cuando $\theta = 30°$. El tornillo tiene un paso de 2.5 mm. Ignore el peso del sistema articulado.

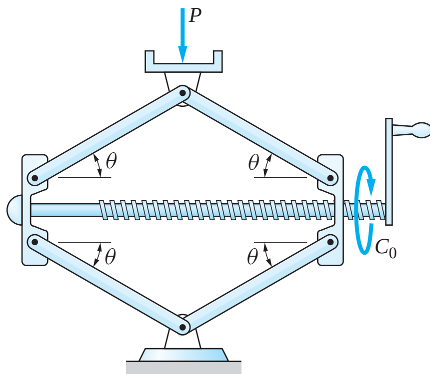


Fig. P10.18

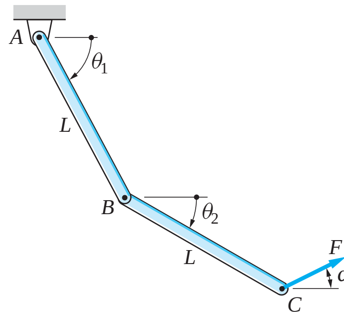


Fig. P10.19

10.19 Determine la fuerza *F* y el ángulo α que se necesitan para mantener el sistema articulado en la posición $\theta_1 = 60°$, $\theta_2 = 15°$. Cada barra del sistema es homogénea y de peso *W*.

*10.5 Centro instantáneo de rotación

En el apartado anterior se determinaron los desplazamientos virtuales de puntos de interés (puntos de aplicación de fuerzas) tomando las diferenciales de sus coordenadas de posición. Aquí se introduce un método que no requiere diferenciación. Este enfoque se basa en el concepto del *centro instantáneo de rotación*, que se define a continuación:

> *El centro instantáneo de rotación de un cuerpo rígido es el punto en el cuerpo que tiene un desplazamiento virtual cero durante el movimiento virtual del cuerpo.*

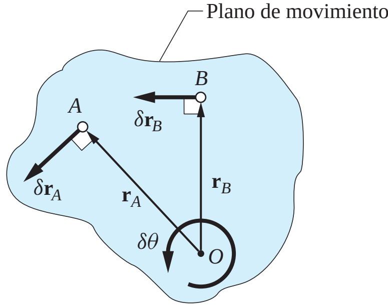


Fig. 10.12

Para encontrar la ubicación del centro instantáneo, considere el movimiento virtual del cuerpo rígido que se muestra en la figura 10.12. Sean $\delta\mathbf{r}_A$ y $\delta\mathbf{r}_B$ los desplazamientos virtuales de los puntos A y B en el cuerpo. Suponga por ahora que sus direcciones no son paralelas. Ahora trace una línea a través del punto A que sea perpendicular a $\delta\mathbf{r}_A$ y otra línea a través de B que sea perpendicular a $\delta\mathbf{r}_B$. La intersección de estas dos líneas, identificada O en la figura, es el centro instantáneo de rotación del cuerpo. En ocasiones O se encuentra fuera del cuerpo, caso en el cual se considera que el cuerpo se alarga para incluirlo. El cuerpo expandido se denomina *cuerpo extendido*.

Aún se debe demostrar que el desplazamiento de O es cero. Como A, B y O son puntos en el mismo cuerpo (o cuerpo extendido), sus desplazamientos virtuales satisfacen la ecuación (10.4):

$$\delta\mathbf{r}_A = \delta\mathbf{r}_O + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_A \quad \text{(a)}$$

$$\delta\mathbf{r}_B = \delta\mathbf{r}_O + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_B \quad \text{(b)}$$

donde $\delta\boldsymbol{\theta}$ es la rotación virtual del cuerpo, y $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ son los vectores posición de A y B relativos a O. Recordando que $\delta\boldsymbol{\theta}$ es perpendicular al plano de movimiento, se deduce de las propiedades del producto vectorial que $\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_A$ es paralelo a $\delta\mathbf{r}_A$. Por tanto, la ecuación (a) sólo es válida si $\delta\mathbf{r}_O$ también es paralelo a $\delta\mathbf{r}_B$. Como un vector diferente de cero no pueden tener dos direcciones diferentes, se concluye que $\delta\mathbf{r}_O = \mathbf{0}$.

El término *centro instantáneo de* rotación implica que el cuerpo parece estar girando respecto a O durante su desplazamiento virtual. Por tanto, una vez que se ha ubicado el centro instantáneo de rotación, la magnitud del desplazamiento virtual de cualquier punto en el cuerpo, como el A, se puede obtener con la ecuación (10.2):

$$\delta r_A = r_A \delta\theta \quad \text{(10.11)}$$

donde r_A es la distancia de A desde el centro instantáneo de rotación.

En resumen, las reglas para determinar el desplazamiento virtual de un punto A en un cuerpo rígido son las siguientes:

- La magnitud del desplazamiento virtual es proporcional a la distancia de A desde el centro instantáneo de rotación O.
- La dirección del desplazamiento virtual es perpendicular a la línea que conecta A y O.
- El sentido del desplazamiento virtual debe ser consistente con el sentido de la rotación virtual.

El trazo para ubicar el centro instantáneo de rotación que se muestra en la figura 10.12 para un cuerpo rígido es válido sólo si las direcciones de $\delta\mathbf{r}_A$ y $\delta\mathbf{r}_B$ no son paralelas. Si las direcciones son paralelas, el centro instantáneo aún se puede localizar sin dificultad, como se muestra en la figura 10.13. En la figura 10.13(a) se muestra la traslación, en la cual los desplazamientos virtuales de todos los puntos son iguales y el centro instantáneo ubicado en el infinito. En la figura 10.13(b) se representa el caso donde $\delta\mathbf{r}_A$ y $\delta\mathbf{r}_B$ tienen la misma dirección pero magnitudes desiguales, $\delta\mathbf{r}_A > \delta\mathbf{r}_B$. En la figura 10.13(c), $\delta\mathbf{r}_A$ y $\delta\mathbf{r}_B$ tienen direcciones paralelas pero opuestas. (Si sus magnitudes son iguales o no es irrelevante.)

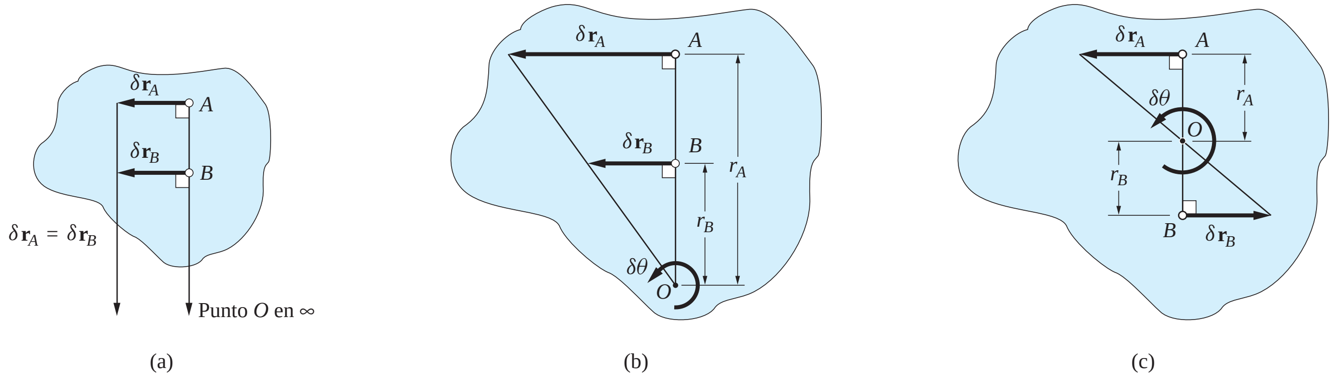


Fig. 10.13

Ahora se pueden deducir las fórmulas para las componentes del desplazamiento virtual de un punto. Estas fórmulas se utilizan con frecuencia en el cálculo del trabajo virtual de una fuerza. Sea $\delta\mathbf{r}_A$ el desplazamiento virtual de un punto A que se ubica a la distancia r_A del punto O (el centro instantáneo del cuerpo que contiene a A). De la figura 10.14 se observa que $\delta x_A = -\delta r_A \operatorname{sen} \theta$ y $\delta y_A = \delta r_A \cos \theta$. Sustituyendo $\delta r_A = r_A\, \delta\theta$ y observando que $r_A \cos \theta = x_A$ y $r_A \operatorname{sen} \theta = y_A$, se obtiene

$$\delta x_A = -y_A\, \delta\theta \quad \text{y} \quad \delta y_A = x_A\, \delta\theta \tag{10.12}$$

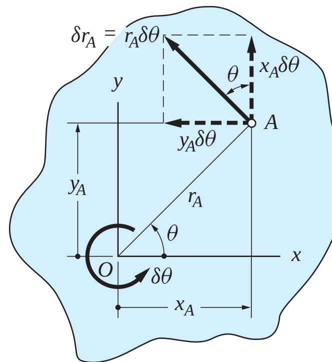
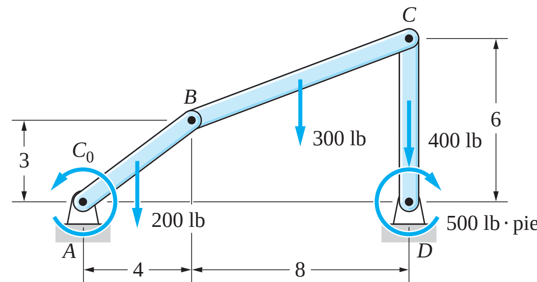


Fig. 10.14

Los signos en esta ecuación son consistentes con las direcciones positivas de x, y y $\delta\theta$ que se indican en la figura 10.14. Sin embargo, al resolver problemas, es más fácil determinar las direcciones de δx_A y δx_B mediante una inspección en vez de apegarse a una convención de signos rigurosa.

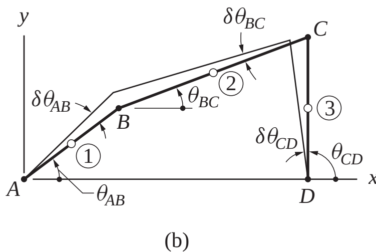
Problema de ejemplo 10.4

El mecanismo en la figura (a) consiste de tres barras homogéneas con los pesos indicados. Un par de 500 lb · pie en sentido de las manecillas del reloj se aplica a la barra *CD*. Utilizando centros instantáneos de rotación, determine el par C_0 que se debe aplicar a la barra *AB* a fin de mantener el equilibrio.

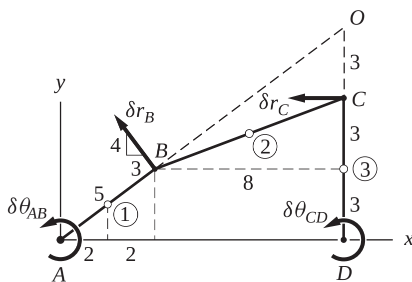


Dimensiones en pies

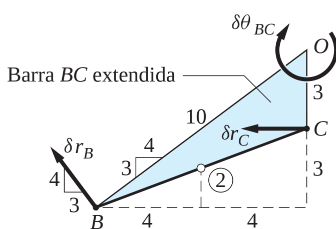
(a)



(b)



(c)



(d)

Solución

El sistema posee un grado de libertad, ya que sólo una coordenada de posición, por ejemplo, la posición angular de una de las barras, es suficiente para especificar su configuración.

En la figura (b) se muestra un desplazamiento virtual del sistema que es consistente con las restricciones, donde $\delta\theta_{AB}$, $\delta\theta_{BC}$ y $\delta\theta_{CD}$ representan las rotaciones virtuales de las barras. Los puntos 1, 2 y 3 indican las ubicaciones de los centros de gravedad de las barras. Observe que la figura (a) es el diagrama de fuerzas activas para el sistema dado que sólo los pesos y los dos pares pueden realizar trabajo sobre el sistema. Aplicando el principio del trabajo virtual, se obtiene

$$\delta U = C_0\ \delta\theta_{AB} - 500\ \delta\theta_{CD} - 200\ \delta y_1 - 300\ \delta y_2 - 400\ \delta y_3 = 0 \qquad \text{(a)}$$

donde δy_1 es la componente *y* positiva del desplazamiento virtual del punto 1, etc. Observe los signos en la ecuación (a), que siguen la regla que el trabajo virtual es positivo si la fuerza (par) tiene la misma dirección que el desplazamiento (rotación). Si estas direcciones son opuestas entre sí, el trabajo virtual es negativo.

El paso siguiente en el análisis es expresar todos los cambios virtuales en la ecuación (a) en términos de una coordenada de posición independiente, para lo cual se elige θ_{AB}. Para utilizar centros instantáneos, primero se debe ubicar el centro instantáneo para cada una de las tres barras. Con referencia a la figura (b), se observa que *A* y *D*, al ser puntos fijos, es obvio que son los centros instantáneos para las barras *AB* y *CD*, respectivamente. Por tanto, $\delta\mathbf{r}_B$ es perpendicular a *AB* y $\delta\mathbf{r}_C$ es perpendicular a *CD*, cada una dirigida como se indica en la figura (c). Como *B* y *C* también pertenecen a la barra *BC*, el centro instantáneo de *BC* es el punto *O*, donde las líneas que son perpendiculares a $\delta\mathbf{r}_B$ y $\delta\mathbf{r}_C$ se intersecan. Dado que el punto *O* no se encuentra sobre la barra *BC*, es conveniente considerar *BC* como extendida hasta el triángulo *BCO*, como se muestra en la figura (d). De las direcciones de $\delta\mathbf{r}_B$ y $\delta\mathbf{r}_C$, se observa que $\delta\theta_{BC}$ es en sentido de las manecillas del reloj.

En las figuras (c) y (d) se muestran todas las dimensiones necesarias para el análisis cinemático. Ahora se relacionan las rotaciones virtuales de BC y CD con $\delta\theta_{AB}$ como sigue:

B gira respecto a A: $\delta r_B = 5\ \delta\theta_{AB}$ pies, consulte la figura (c)
B gira respecto a O: $\delta r_B = 10\ \delta\theta_{BC}$ pies, consulte la figura (d)

Igualando los lados derechos de estas dos ecuaciones da

$$\delta\theta_{BC} = \frac{1}{2}\delta\theta_{AB} \qquad \text{(b)}$$

C gira respecto a D: $\delta r_C = 6\ \delta\theta_{CD}$ pies, consulte la figura (c)
C gira respecto a O: $\delta r_C = 3\ \delta\theta_{BC}$ pies, consulte la figura (d)

Igualando los lados derechos de estas dos ecuaciones y utilizando la ecuación (b), se obtiene

$$\delta\theta_{CD} = \frac{1}{4}\delta\theta_{AB} \qquad \text{(c)}$$

Después, se utiliza la ecuación (10.12) para calcular δy_1, δy_2 y δy_3:

El punto 1 gira respecto a A: de la figura (c) se tiene que

$$\delta y_1 = 2\ \delta\theta_{AB} \qquad \text{(d)}$$

El punto 2 gira respecto a O: de la figura (d), $\delta y_2 = 4\ \delta\theta_{BC}$. Sustituyendo δ_{BC} de la ecuación (b), se obtiene

$$\delta y_2 = 2\ \delta\theta_{AB} \qquad \text{(e)}$$

Por último, de la figura (c) se observa que

$$\delta y_3 = 0 \qquad \text{(f)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (b) a (f) en la ecuación (a), se obtiene

$$\delta U = C_0\ \delta\theta_{AB} - 500\left(\frac{1}{4}\delta\theta_{AB}\right) - 200(2\ \delta\theta_{AB}) - 300(2\ \delta\theta_{AB}) - 400(0) = 0$$

que se reduce a

$$(C_0 - 1125)\ \delta\theta_{AB} = 0$$

Esta ecuación se puede satisfacer para $\delta\theta_{AB}$ que no sea cero sólo si

$$C_0 = 1125 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$ *Respuesta*

Como C_0 es positivo, está dirigido como se muestra en la figura (a); es decir, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Problemas

10.20 Ubique el centro instantáneo de rotación de la barra AB para cada caso ilustrado.

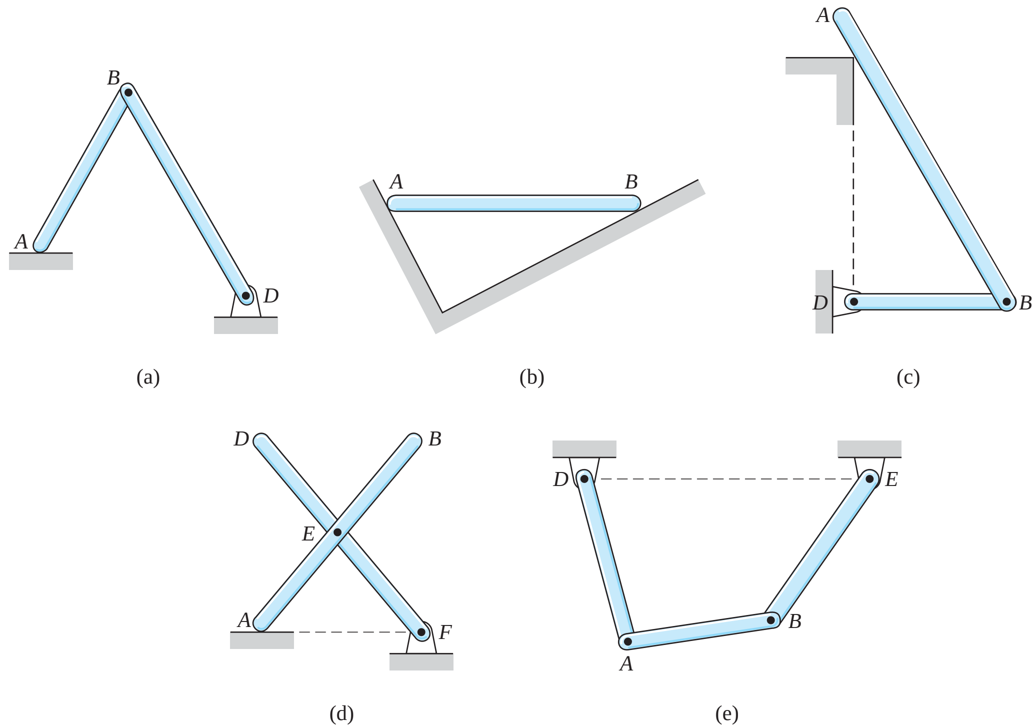


Fig. P10.20

Los problemas siguientes se deben resolver utilizando centros instantáneos de rotación. Ignore los pesos de los miembros a menos que se especifique lo contrario.

10.21 Cada una de las tres barras uniformes del mecanismo pesa 12 lb/pie. Determine el par C_0 que mantenga el mecanismo en equilibrio en la posición indicada.

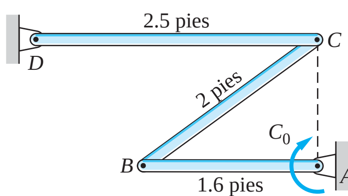


Fig. P10.21

10.22 Determine la fuerza P que mantenga el mecanismo en equilibrio en la posición indicada.

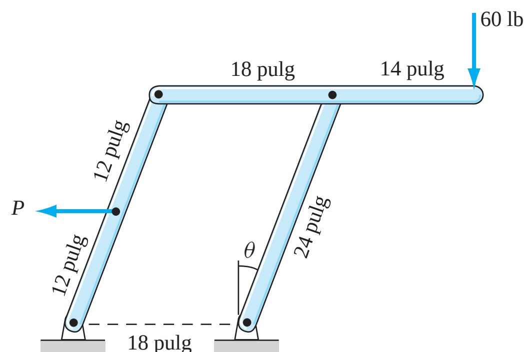


Fig. P10.22

10.23 Determine la tensión en el cable unido a la conexión articulada en *B*.

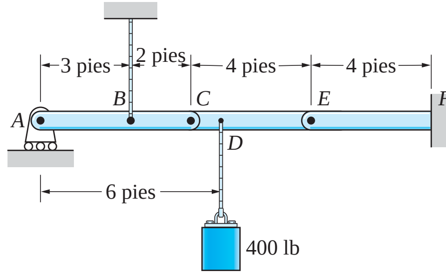


Fig. P10.23, P10.24

10.24 Encuentre el par aplicado por el soporte de empotramiento en *F* a la conexión articulada.

10.25 Encuentre la coordenada de posición *x* del peso deslizante *B* para la cual los brazos de la balanza estarán en equilibrio.

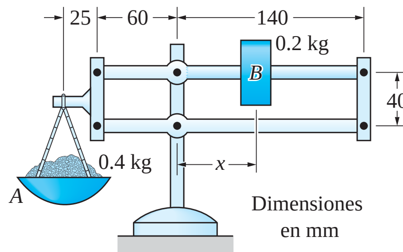


Fig. P10.25

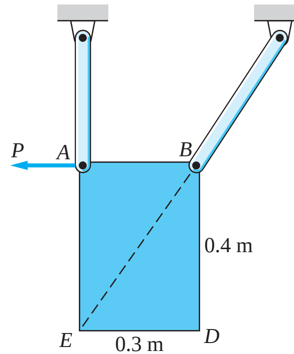


Fig. P10.26

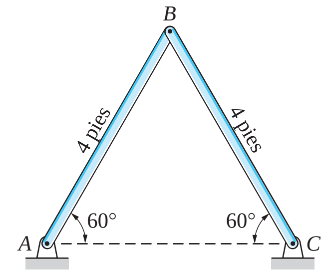


Fig. P10.27

10.26 Calcule la fuerza *P* que mantenga la placa uniforme *ABDE* de 15 kg en equilibrio en la posición indicada.

10.27 Cada barra de la estructura es uniforme y pesa 50 lb. Encuentre la reacción horizontal en el pasador en *C*.

10.28 Determine la fuerza *P* necesaria para mantener el mecanismo en la posición indicada.

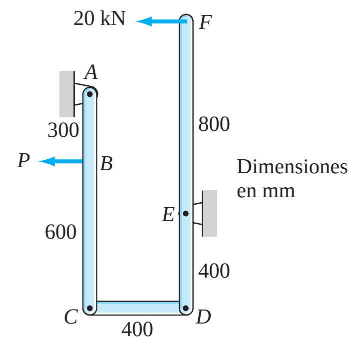


Fig. P10.28

10.29 Si la fuerza de entrada para la palanca compuesta es $P = 30$ lb, calcule la fuerza de salida *Q*.

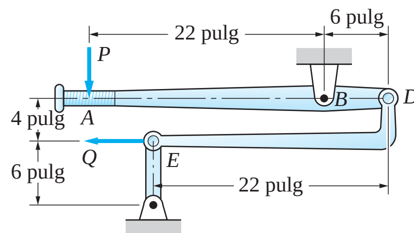


Fig. P10.29

10.30 Determine la fuerza P necesaria para el equilibrio de la palanca compuesta si $Q = 4200$ N.

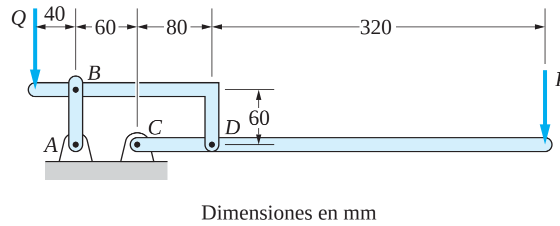


Fig. P10.30

10.31 Si $Q = 200$ N, determine el par C_0 necesario para mantener el mecanismo en equilibrio en la posición $\theta = 25°$. Ignore la fricción.

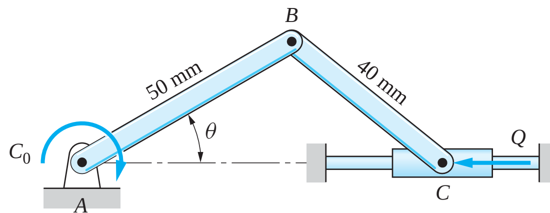


Fig. P10.31

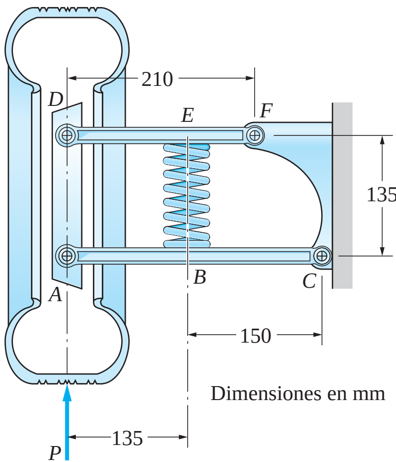


Fig. P10.32

10.32 Para la suspensión del automóvil que se muestra, encuentre la fuerza en el resorte helicoidal BE si $P = 2600$ N.

10.33 Los pares C_1 y C_2 actúan sobre la conexión articulada. Encuentre la relación C_1/C_2 para la cual la conexión estará en equilibrio en la posición indicada.

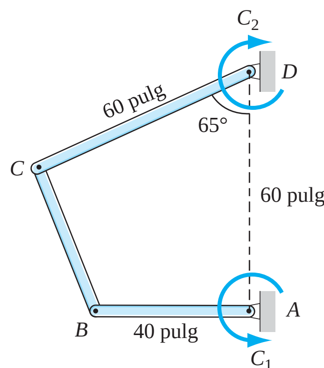


Fig. P10.33

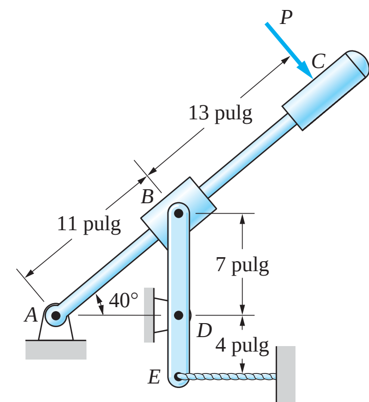


Fig. P10.34

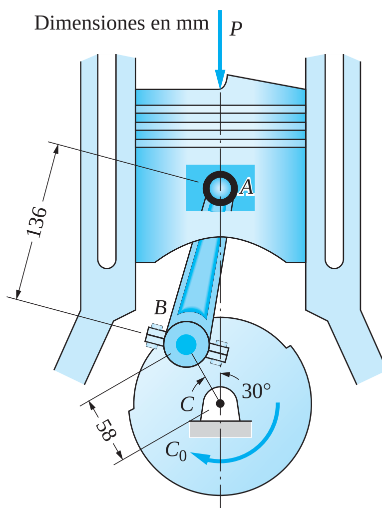


Fig. P10.35

10.34 ¿Qué fuerza P producirá una fuerza de tensión de 25 lb en el cable en E?

10.35 Si la fuerza P actuando sobre el pistón en la posición indicada es igual a 1600 N, calcule C_0, el par de torsión de salida en el cigüeñal.

10.36 Para los alicates, determine la relación entre la magnitud de las fuerzas aplicadas P y la magnitud de las fuerzas de sujeción en E. (*Sugerencia:* considere AB fija.)

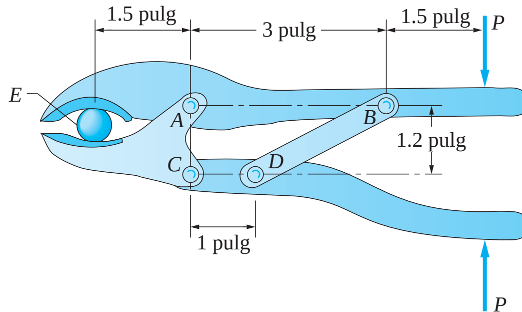


Fig. P10.36

10.37 Cuando se activa por la fuerza P, el sujetador del brazo de un robot puede sostener objetos aplicando la fuerza de sujeción F. Si $P = 120$ N, calcule F en la posición indicada.

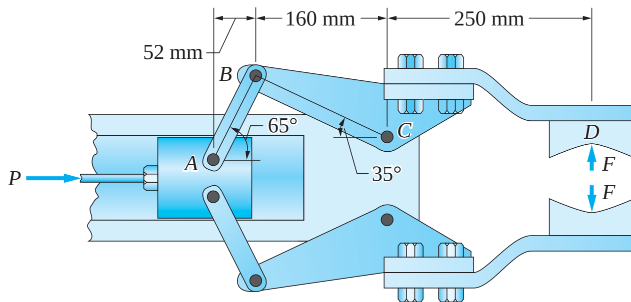


Fig. P10.37

***10.38** (a) Utilizando un dibujo a escala, ubique de manera gráfica el centro instantáneo de la biela AB en la posición indicada. (b) Utilizando los resultados del inciso (a) y suponiendo equilibrio, encuentre el par C_0 que actúa sobre el volante si la fuerza que actúa sobre el pistón es $P = 120$ lb.

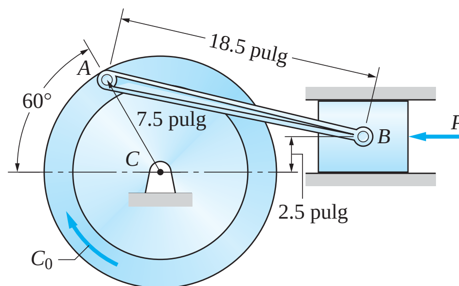


Fig. P10.38

***10.39** La bisagra es del tipo que se emplea en algunos automóviles, en donde la puerta *DE* parece girar respecto al punto *H*. Utilice una representación gráfica, a escala, para ubicar *H*. (*Sugerencia: ABED* y *BCGF* son paralelogramos articulados.)

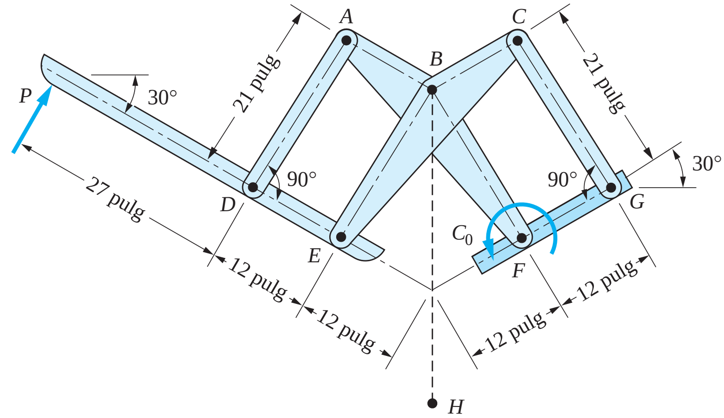


Fig. P10.39

*10.6 *Equilibrio y estabilidad de sistemas conservativos*

a. *Energía potencial*

Como se explicó en el apartado 10.4, si a un sistema sin fricción se le da un desplazamiento virtual cinemáticamente admisible, el trabajo virtual tiene la forma [consulte la ecuación (10.10)]:

$$\delta U = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \cdots + Q_n\,\delta q_n$$

donde las δq son *cambios virtuales* en las coordenadas de posición independientes y las Q se denominan *fuerzas generalizadas*. El sistema se clasifica como *conservativo* si existe una función escalar $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ tal que

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10.13}$$

La función V se denomina *función potencial* o *energía potencial*, del sistema. Por tanto, se dice que las fuerzas generalizadas son *derivables de un potencial*. El signo menos en la ecuación (10.13), que es parte de la definición, tiene su origen en la relación entre trabajo y energía potencial.* Si cada una de estas fuerzas que actúa sobre un sistema es derivable de un potencial, la energía potencial del sistema se obtiene sumando las energías potenciales de todas las fuerzas. Para nuestros fines, sólo se necesitan considerar la gravitacional y la elástica.

*Esta relación se trata en el libro *Dinámica*. Aquí sólo se analizan las propiedades de la energía potencial que se necesitan para el análisis de equilibrio de sistemas conservativos.

b. *Energía potencial gravitacional*

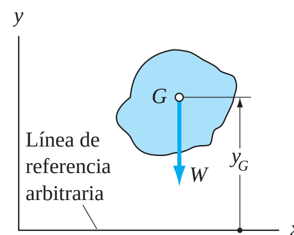


Fig. 10.15

En la figura 10.15 se muestra un cuerpo de peso W cuyo centro de gravedad G se encuentra a una distancia y_G arriba de una línea de referencia arbitraria que coincide con el eje x. La fuerza generalizada correspondiente a la coordenada y_G es $-W$ (el signo menos es necesario ya que W está dirigida opuesta a la dirección positiva de y_G). La función potencial del peso, también denominada *energía potencial gravitacional*, es $V_g = Wy_G + C$, donde C es una constante arbitraria. El resultado se verifica con facilidad observando que $-dV_g/dy_G = -W$, lo que concuerda con la ecuación (10.13). Como el peso W es derivable de un potencial, es una fuerza conservativa.* Observe que el valor de la constante aditiva C es irrelevante ya que no contribuye a la derivada de V_g. Por tanto, suele tomarse igual a cero y la energía potencial gravitacional se escribe como

$$V_g = Wy_G \tag{10.14}$$

c. *Energía potencial elástica*

Nuestro análisis de la energía potencial elástica está limitado a resortes ideales. Un resorte ideal tiene las propiedades siguientes: 1. el peso del resorte es despreciable y 2. la fuerza ejercida por el resorte es proporcional a su elongación. (El lector debe estar consciente que nuestro análisis de resortes deformables representa una salida radical del análisis de cuerpos rígidos.) La longitud libre (sin estirar) del resorte se denota por L_0 y la elongación por s, como se muestra en la figura 10.16. Si el resorte es ideal, la fuerza F aplicada al resorte está relacionada a su elongación s por

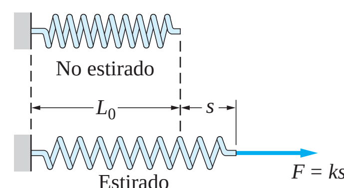


Fig. 10.16

$$F = ks \tag{10.15}$$

donde k es una constante, denominada *rigidez* del resorte, o *constante del resorte*. La rigidez k tiene la dimensión $[F/L]$; de aquí que las unidades sean lb/pie, N/m, etcétera.

Si Q_s representa la fuerza ejercida *por* el resorte, se tiene que $Q_s = -ks$ (la fuerza ejercida *por* el resorte es opuesta a la fuerza ejercida *sobre* el resorte). Observe que la expresión para Q_s es válida para s positiva (tensión en el resorte) y s negativa (compresión en el resorte).

La energía potencial de un resorte ideal es

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2 \tag{10.16}$$

Se puede observar que $-dV_e/ds = -ks$, que es en efecto la fuerza Q_s ejercida por el resorte. Como la fuerza en el resorte es derivable de un potencial, se concluye que es una fuerza conservativa. La energía potencial V_e se denomina *energía potencial elástica*. Al utilizar la ecuación (10.16), se debe recordar que s es la elongación o contracción del resorte, no su longitud.

d. *Energía potencial estacionaria y estabilidad*

En el apartado 10.5 se enfatizó que nuestro sistema está en equilibrio sólo si todas las fuerzas generalizadas desaparecen; es decir, si $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = 0$. Para

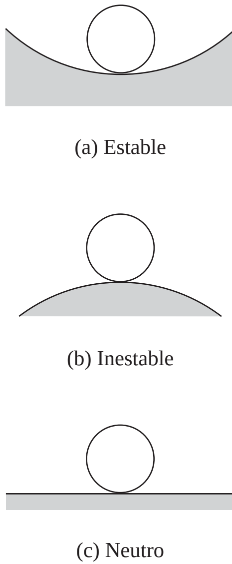
*Se puede utilizar un argumento similar para demostrar que todas las fuerzas de magnitud y dirección constantes son conservativas.

un sistema conservativo con energía potencial $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, las condiciones de equilibrio son entonces

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0 \tag{10.17}$$

La ecuación (10.17) representa el *principio de la energía potencial conservativa*:

La energía potencial de un sistema conservativo es estacionaria (mínima, máxima o constante) en una posición de equilibrio.



(a) Estable

(b) Inestable

(c) Neutro

Fig. 10.17

La energía potencial también se puede emplear para determinar si una posición de equilibrio es estable, inestable o neutra. Estas tres clasificaciones de equilibrio se ilustran en la figura 10.17. La bola en la parte inferior del tazón en (a) se dice que está en equilibrio estable; si la bola se desplaza una distancia pequeña y luego se libera, regresará a la posición de equilibrio ilustrada. En (b), la bola está en equilibrio en la parte superior de un tazón invertido. Aquí el equilibrio es inestable; si la bola se desplaza una distancia pequeña y después se libera, se alejará de la posición de equilibrio original. El equilibrio neutro se muestra en (c); si la bola sobre la superficie plana se desplaza una distancia pequeña a la izquierda o a la derecha y luego se libera, la bola simplemente permanecerá en reposo en la nueva posición.

De los ejemplos anteriores, se puede deducir el *principio de la energía potencial mínima*:

La energía potencial de un sistema conservativo está en su mínimo en una posición de equilibrio estable.

Como ilustración de este principio, observe que cuando la bola en la figura 10.17(a) se desplaza, su energía potencial se incrementa. Cuando se libera, la bola regresa a su posición original de energía potencial menor. Sin embargo, cuando la bola en la figura 10.17(b) se desplaza, su energía potencial disminuye. Cuando se libera, la bola no regresa a su posición original de energía potencial mayor. En cambio, la bola busca una posición de energía potencial menor; rueda fuera del tazón.

Nuestro análisis de estabilidad lo restringimos a sistemas que poseen un grado de libertad; es decir, sistemas para los cuales la energía potencial $V(q)$ es una función de una sola coordenada q. De acuerdo con el principio de la energía potencial estacionaria, las posiciones de equilibrio del sistema corresponden a las raíces de la ecuación $dV/dq = 0$. Para determinar si las posiciones de equilibrio son estables o inestables, se debe investigar el signo de la segunda derivada, d^2V/dq^2. Si la segunda derivada es positiva en una posición de equilibrio, la energía potencial es un mínimo (equilibrio estable); si la segunda derivada es negativa, la energía potencial es un máximo (equilibrio inestable).

En resumen, si $q = q_0$ es una posición de equilibrio *estable*, entonces

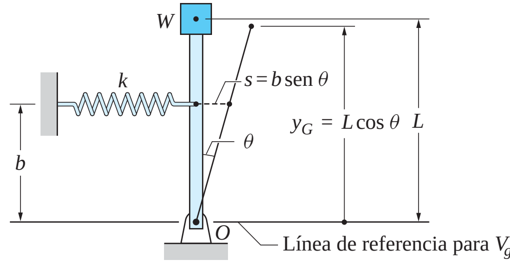
$$\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q_0} = 0 \qquad \left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0} > 0 \tag{10.18}$$

y si $q = q_0$ es una posición de equilibrio *inestable*, entonces

$$\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q_0} = 0 \qquad \left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0} < 0 \tag{10.19}$$

Problema de ejemplo **10.5**

Una barra ligera está articulada en un extremo y soporta un peso W en el otro, como se muestra en la figura. El resorte ideal unido a la barra puede resistir tensión, compresión y se encuentra sin estirar cuando la barra está vertical. Encuentre el valor mayor de W para el cual la posición de equilibrio vertical de la barra sería estable.



Solución

La energía potencial del sistema consiste de V_g, la energía potencial gravitacional del peso y V_e, la energía potencial elástica del resorte. De la ecuación (10.14), $V_g = W y_G$, donde y_G es la distancia vertical hasta W medida desde una línea de referencia arbitraria. Eligiendo la línea horizontal que pasa por O como la referencia, se tiene que $V_g = WL \cos \theta$.

Para determinar si una función evaluada en un punto es un mínimo o un máximo, es suficiente investigar la función sólo en un vecindario pequeño de ese punto. Por tanto, se puede confinar la atención a valores pequeños de θ. Aproximando $\cos \theta$ con $(1 - \theta^2/2)$, lo que es válido para ángulos pequeños, la energía potencial gravitacional se convierte en

$$V_g = WL\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \qquad \text{(a)}$$

De la ecuación (10.16), $V_e = (1/2)ks^2$, donde s es la elongación (o contracción) del resorte medida desde su posición sin estirar. De la figura, se observa que para una θ lo suficientemente pequeña, $s = b \operatorname{sen} \theta$. Utilizando la aproximación $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$, la energía potencial elástica del resorte se transforma en

$$V_e = \frac{1}{2}kb^2\theta^2 \qquad \text{(b)}$$

Combinando las ecuaciones (a) y (b), la energía potencial del sistema es

$$V = V_g + V_e = WL\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) + \frac{1}{2}kb^2\theta^2$$

que es válida para valores pequeños de θ.

Para que el sistema esté en equilibrio estable, $d^2V/d\theta^2$ debe ser positiva. Después de derivar, se obtiene

$$\frac{dV}{d\theta} = (-WL + kb^2)\theta$$

Observe que $dV/d\theta = 0$ cuando $\theta = 0$, lo que confirma que la barra está en equilibrio en la posición vertical. Derivando de nuevo, se obtiene

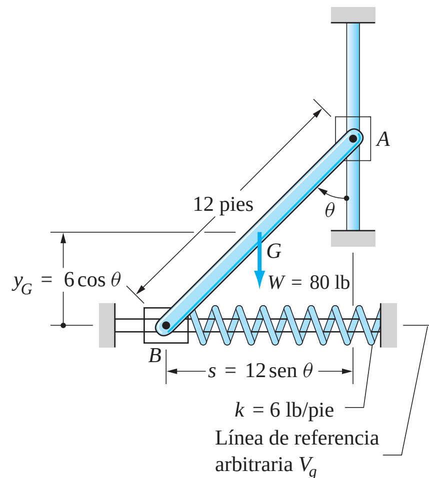
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -WL + kb^2$$

Se observa que $d^2V/d\theta^2$ será positiva; es decir, el sistema estará en equilibrio estable, sólo si $kb^2 > WL$. Por tanto, el valor máximo de W para el cual el sistema estará en equilibrio estable para $\theta = 0$ es

$$W_{max} = kb^2/L \qquad \text{Respuesta}$$

Problema de ejemplo **10.6**

Para el sistema ilustrado, determine: 1. todos los valores de θ en equilibrio y 2. la estabilidad de cada posición de equilibrio. La barra homogénea AB pesa 80 lb y el resorte ideal no está estirado cuando $\theta = 0$. Ignore la fricción y los pesos de las correderas en A y B.



Solución

La energía potencial V del sistema consiste de la energía potencial del peso V_g y de la energía potencial del resorte V_e. De las ecuaciones (10.14) y (10.16), se tiene

$$V = V_g + V_e = Wy_G + \frac{1}{2}ks^2 \qquad \text{(a)}$$

donde y_G es la distancia vertical del centro de gravedad G de la barra AB arriba de la línea de referencia elegida y s es la elongación del resorte. Como se muestra en la figura, se tiene $y_G = 6 \cos \theta$ pies y $s = 12 \text{ sen } \theta$ pies (recuerde que el resorte está sin

estirar cuando la barra está vertical). Por tanto, la energía potencial en la ecuación (a) es

$$\begin{aligned} V &= 80(6\cos\theta) + \frac{1}{2}(6)(12\,\text{sen}\,\theta)^2 \\ &= 480\cos\theta + 432\,\text{sen}^2\theta \text{ lb}\cdot\text{pie} \end{aligned} \tag{b}$$

La primera derivada de la energía potencial es

$$\frac{dV}{d\theta} = -480\,\text{sen}\,\theta + 864\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \text{ lb}\cdot\text{pie} \tag{c}$$

Utilizando $d(\text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta)/d\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$, la segunda derivada de la energía potencial es

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -480\cos\theta + 864(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \text{ lb}\cdot\text{pie} \tag{d}$$

Parte 1

De acuerdo con el principio de la energía potencial mínima, los valores de θ en equilibrio son las raíces de la ecuación $dV/d\theta = 0$. Utilizando la ecuación (c), se tiene que la condición de equilibrio es

$$-480\,\text{sen}\,\theta + 864\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 0$$

o

$$\text{sen}\,\theta(-480 + 864\cos\theta) = 0$$

Las raíces de esta ecuación son $\text{sen}\ \theta = 0$ y $\cos\ \theta = 480/864$. En consecuencia, las posiciones de equilibrio son

$$\theta = 0 \qquad \theta = \cos^{-1}\frac{480}{864} = 56.25°$$ *Respuesta*

Parte 2

Evaluando la segunda derivada de la energía potencial, ecuación (d), en la posición de equilibrio $\theta = 0$, se tiene

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -480 + 864 = 384 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

Como $d^2V/d\theta^2 > 0$, se concluye que $\theta = 0$ es una posición de equilibrio estable.

Para $\theta = 56.25°$, la ecuación (d) da

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\theta^2} &= -480\cos 56.25° + 864(\cos^2 56.25° - \text{sen}^2 56.25°) \\ &= -597 \text{ lb}\cdot\text{pie} \end{aligned}$$

Como $d^2V/d\theta^2 < 0$, se deduce que $\theta = 56.25°$ es una posición de equilibrio inestable.

Problemas

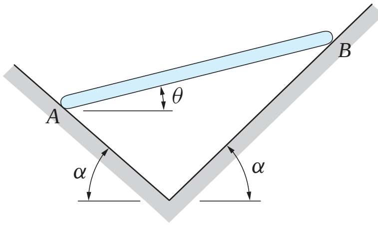


Fig. P10.40

Ignore la fricción en los problemas siguientes, a menos que se indique lo contrario.

10.40 Demuestre que $\theta = 0$ representa la única posición de equilibrio de la barra uniforme *AB*. ¿Es estable o inestable esta posición?

10.41 El peso *W* pende del extremo *B* de la barra sin peso que está soportada por los muros en *A* y *C*. Determine el valor de equilibrio del ángulo θ e investigue la estabilidad del equilibrio.

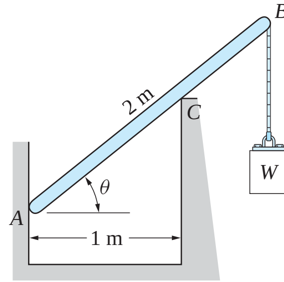


Fig. P10.41

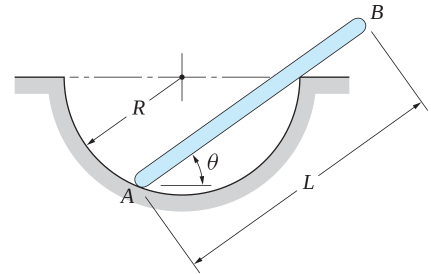


Fig. P10.42

10.42 La barra uniforme de peso *W* y longitud $L = 2R$ reposa en una cavidad hemisférica de radio *R*. Calcule el ángulo θ para el equilibrio e investigue la estabilidad del equilibrio.

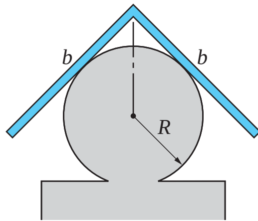


Fig. P10.43

10.43 Una barra homogénea esbelta se dobla a ángulo recto y se coloca sobre una superficie cilíndrica. Determine el intervalo de b/R para el cual la posición de equilibrio indicada es estable.

10.44 El cuerpo que se muestra se compone de un hemisferio y de un cilindro, los dos de peso específico uniforme γ. Determine el intervalo de h/R para el cual la posición de equilibrio indicada es estable.

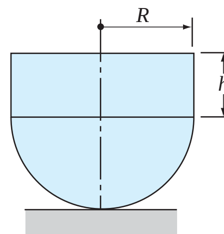


Fig. P10.44

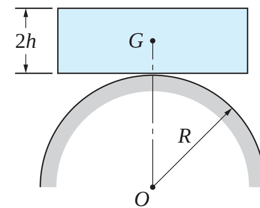


Fig. P10.45

10.45 El bloque uniforme de altura $2h$ está equilibrado sobre la superficie cilíndrica rugosa de radio *R*. Demuestre que esta posición de equilibrio es estable sólo si $R > h$. Suponga que la fricción impide que el bloque se deslice.

10.46 La barra uniforme *AB* de peso *W* y longitud *L* está conectada por un pasador a un collarín deslizante en *A* y a la barra deslizante *BD* en *B*. El resorte enrollado

alrededor de la barra BD tiene una rigidez k y está sin deformar cuando la barra AB está en la posición $\theta = 0$. Determine la expresión para el ángulo θ (que no sea $\theta = 90°$) en equilibrio e investigue la estabilidad del equilibrio para esta posición.

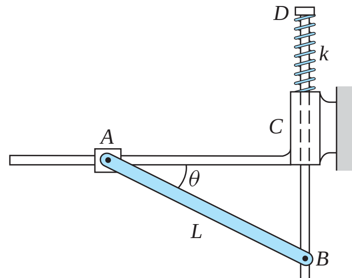


Fig. P10.46

10.47 Barras uniformes de pesos W_1 y W_2 se sueldan a las dos poleas que están conectadas por una banda. Determine el intervalo de W_1/W_2 para el cual la posición de equilibrio ilustrada es estable.

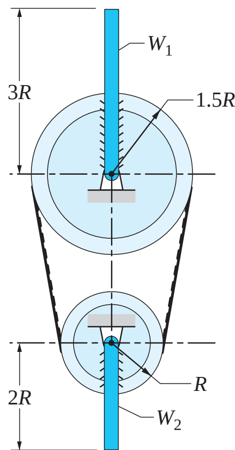


Fig. P10.47

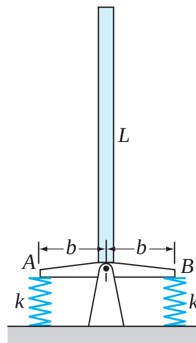


Fig. P10.48

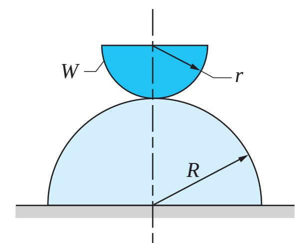


Fig. P10.49

10.48 El peso de la barra uniforme de longitud L es W. La base de la barra está soportada por un pasador y dos resortes. Los resortes (cada uno de rigidez k) están sin deformar cuando la base está horizontal. Determine la dimensión menor b de la base para la cual la barra estará estable en la posición indicada.

10.49 El semicilindro de radio r se coloca sobre una superficie cilíndrica de radio R. Suponiendo que no hay deslizamiento, determine el intervalo de R/r para el cual la posición de equilibrio indicada es estable.

10.50 Encuentre las posiciones de equilibrio del mecanismo ilustrado e investigue su estabilidad. El resorte está sin deformar en la posición $\theta = 0$. Ignore el peso del mecanismo.

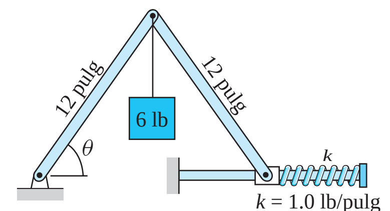


Fig. P10.50

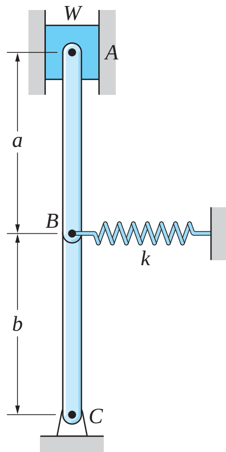


Fig. P10.51

10.51 Determine el peso máximo W para el cual la barra abisagrada ABC estará en equilibrio estable en la posición ilustrada. El resorte ideal de rigidez k puede soportar tensión, compresión y estar sin deformar en la posición indicada. (*Sugerencia:* utilice sen $\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$.)

10.52 El resorte está conectado a una cuerda que pasa sobre la superficie cilíndrica y está unida a la esquina A del balancín. El resorte tiene una rigidez k y está sin deformar cuando $\theta = 0$. Cuando el peso W se suspende de A, la posición de equilibrio del balancín es $\theta = 30°$. Determine si esta posición de equilibrio es estable. Ignore el peso del balancín.

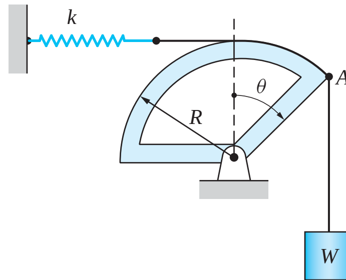


Fig. P10.52

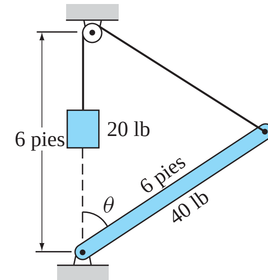


Fig. P10.53

***10.53** Encuentre las posiciones de equilibrio de la barra homogénea de 40 lb; investigue su estabilidad.

10.54 El mecanismo de peso despreciable soporta el peso W. Encuentre el valor de θ para el equilibrio. ¿Es estable o inestable la posición de equilibrio?

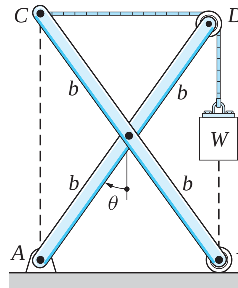


Fig. P10.54, P10.55

10.55 Resuelva el problema 10.54 suponiendo que A y B están conectados por un resorte de rigidez $k = 0.3\ W/b$ y longitud libre b.

10.56 La rigidez del resorte ideal que está comprimido por la corredera C es $k =$ 250 N/m. El resorte está sin estirar cuando $\theta = 20°$. Cuando la masa m se suspende de A, el sistema está en equilibrio en $\theta = 60°$. Determine el valor de m y si la posición de equilibrio es estable o inestable.

10.57 Encuentre la posición de equilibrio estable del sistema descrito en el problema 10.56 si $m = 2.06$ kg.

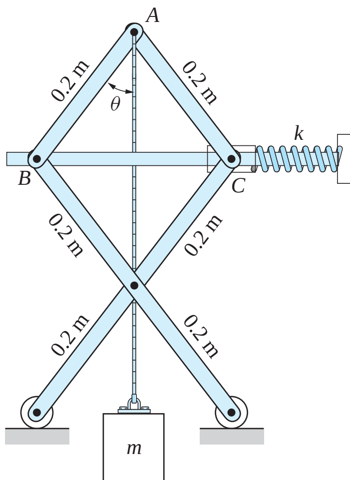


Fig. P10.56, P10.57

10.58 La barra uniforme *AB* de peso $W = kL$ está en equilibrio cuando $\theta = 65°$. Encuentre el valor de θ para el cual el resorte ideal estaría sin estirar e investigue la estabilidad de la posición de equilibrio.

10.59 El peso de la barra uniforme *AB* es *W*. La rigidez del resorte ideal unido a *B* es *k* y el resorte está sin estirar cuando $\theta = 80°$. Si $W = kL$, la barra tiene tres posiciones de equilibrio en el intervalo $0 < \theta < \pi$, de las cuales sólo una es estable. Determine el ángulo θ en la posición de equilibrio estable.

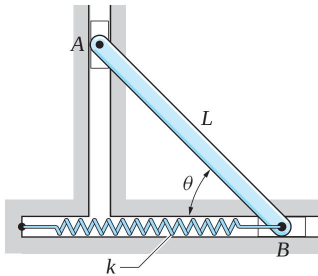


Fig. P10.58, P10.59

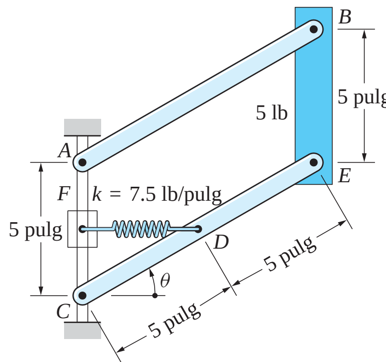


Fig. P10.60

10.60 Las barras sin peso *AB* y *CE*, junto con el peso *BE* de 5 lb, forman una conexión articulada en paralelogramo. El resorte ideal unido a *D* tiene una longitud libre de 2 pulg y una rigidez de 7.5 lb/pulg. Encuentre las dos posiciones de equilibrio que están en el intervalo $0 < \theta < \pi/2$ y determine su estabilidad. Ignore el peso de la corredera *F*.

10.61 Los tres resortes ideales que soportan las dos barras que están articulados entre sí en *C* están sin estirar cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Observe que los resortes siempre están verticales ya que los collarines a los cuales están unidos pueden deslizarse libremente sobre el riel horizontal. Calcule los ángulos θ_1 y θ_2 en equilibrio si $W = kL/10$.

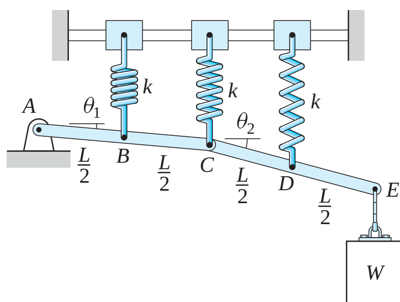


Fig. P10.61

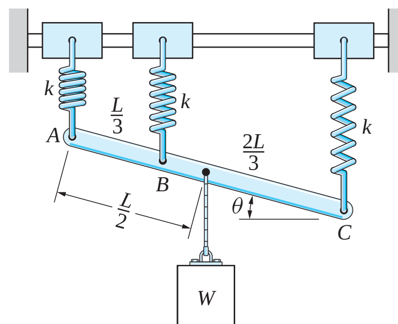


Fig. P10.62

10.62 La barra *ABC* está soportada por tres resortes ideales idénticos. Observe que los resortes siempre están verticales ya que los collarines a los cuales están unidos se pueden deslizar libremente sobre el riel horizontal. Encuentre el ángulo θ en equilibrio si $W = kL$. Ignore el peso de la barra.

Repaso de ecuaciones

Desplazamientos virtuales

$$\begin{aligned}
\text{Traslación:}\quad & \delta \mathbf{r}_A = \delta \mathbf{r}_B \\
\text{Rotación respecto a un punto fijo:}\quad & \delta \mathbf{r}_B = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{AB} \\
\text{Movimiento plano general:}\quad & \delta \mathbf{r}_B = \delta \mathbf{r}_A + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{AB} \\
\text{El punto } O \text{ es el centro instantáneo de } AB\text{:}\quad & \delta \mathbf{r}_A = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{OA} \\
& \delta \mathbf{r}_B = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{OB}
\end{aligned}$$

Trabajo virtual

$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = F \cos\alpha \; \delta r \quad \text{(trabajo de una fuerza)}$$

$$\delta U = \mathbf{C} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = C \; \delta\theta \quad \text{(trabajo de un par)}$$

α = ángulo entre **F** y $\delta \mathbf{r}$

Método del trabajo virtual

Si un cuerpo está en equilibrio, entonces el trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es cero para todos los desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles del cuerpo desde la posición de equilibrio ($\delta U = 0$).

Energía potencial

$$V_g = W y_G \quad \text{(energía potencial gravitacional)}$$

$$V_e = \frac{1}{2} k s^2 \quad \text{(energía elástica de un resorte)}$$

k = rigidez del resorte
s = elongación del resorte

Principio de la energía potencial estacionaria

La energía potencial de un sistema conservativo es mínima en una posición de equilibrio estable.



A
Integración numérica

A.1 Introducción

El objetivo de la integración numérica, también conocida como *cuadratura*, es evaluar integrales definidas del tipo

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \tag{A.1}$$

sin recurrir al cálculo. La cuadratura sólo da un valor aproximado para la integral, ya que el cálculo es el único método para efectuar la integración de manera exacta. La integración numérica es útil en las situaciones siguientes:

- La integración es difícil o tediosa si se realiza analíticamente.
- La integración no se puede expresar en términos de funciones conocidas.
- La función $f(x)$ se desconoce, pero sus valores se conocen en puntos discretos.

Hablando en general, *integral* es un término matemático para la suma de un número infinito de cantidades infinitesimales. En consecuencia, la integral definida en la ecuación (A.1) representa la sumatoria de todas las áreas diferenciales (infinitesimales) $dA = f(x)\, dx$ que se encuentran entre los límites $x = a$ y $x = b$, como se observa en la figura A.1. En la integración numérica, la integral se aproxima sumando las áreas $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, de n franjas finitas, cada una de ancho Δx, como se muestra en la figura A.2. Como el área de cada franja se debe estimar (el cálculo integral se requeriría para obtener los valores exactos), la cuadratura produce sólo un valor aproximado de la integral; es decir,

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i$$

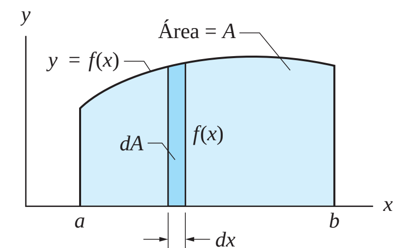


Fig. A.1

Como regla, un número grande de franjas, con sus Δx pequeñas correspondientes, produce un resultado más preciso.

Existen varios métodos para estimar las áreas de las franjas, pero sólo analizaremos la regla del trapecio y la regla de Simpson.

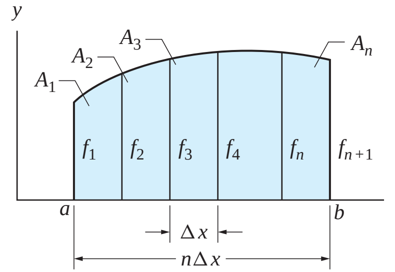


Fig. A.2

A.2 Regla del trapecio

En la regla del trapecio, cada una de las n franjas se aproxima por un trapecio. Recordando que el área de un trapecio es (base) × (altura promedio), el área de una franja común en la figura A.2 es

$$A_i = \frac{f_i + f_{i+1}}{2}\Delta x \tag{A.2}$$

Sumando las áreas de todas las franjas, se obtiene

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \cdots + 2f_n + f_{n+1})\frac{\Delta x}{2} \tag{A.3}$$

La ecuación (A.3) se conoce como *regla del trapecio*.

La regla del trapecio en ocasiones se escribe en la forma siguiente:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n+1} W_i f_i \tag{A.4}$$

donde las W_i se conocen como los *pesos* y la expresión $\Sigma_{i=1}^{n+1} W_i f_i$ se denomina *sumatoria ponderada*. Para la regla del trapecio, los pesos son

$$\begin{aligned} W_1 &= W_{n+1} = \frac{\Delta x}{2} \\ W_i &= \Delta x \quad \text{para } 2 \leq i \leq \end{aligned} \tag{A.5}$$

A.3 Regla de Simpson

En la regla del trapecio, la función $f(x)$ se aproxima por una línea recta dentro de cada franja de acho Δx; es decir, la curvatura de $f(x)$ se ignora. Esta linearización puede resultar en un error inaceptablemente grande en la cuadratura, en particular si la curvatura de $f(x)$ es grande y con el mismo signo en todo el intervalo $a \leq x \leq b$.

La regla de Simpson supera esta deficiencia remplazando las líneas rectas por parábolas. Como se requieren tres puntos, es decir, tres valores de $f(x)$ para definir una parábola, la regla de Simpson aproxima el área de un par de franjas adyacentes.

En la figura A.3 se muestran dos franjas adyacentes limitadas por una parábola que pasa por los tres puntos de las franjas. Se puede demostrar que el área bajo la parábola es

$$A_i + A_{i+1} = \frac{f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}}{3}\Delta x$$

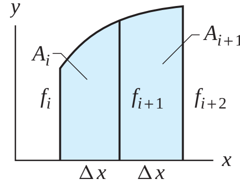


Fig. A.3

Sumando las áreas de todas las franjas se produce la *regla de Simpson*:

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} (A_i + A_{i+1}) \\ &= (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + \cdots + 2f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1})\frac{\Delta x}{3} \end{aligned} \tag{A.6}$$

Observe que el número de franjas en la regla de Simpson debe ser par.

Introduciendo el concepto de pesos W_i, la *regla de Simpson* se puede escribir como

$$A \approx \sum_{i=1}^{n+1} W_i f_i \tag{A.7}$$

donde los pesos son

$$\begin{aligned} W_1 &= W_{n+1} = \frac{\Delta x}{3} \\ W_i &= \frac{4\Delta x}{3} \quad i \text{ par} \\ W_i &= \frac{2\,\Delta x}{3} \quad i \text{ impar} \end{aligned} \Bigg\}\; 2 \le i \le n \tag{A.8}$$

Debido a su gran precisión, la regla de Simpson se debe elegir sobre la regla del trapecio. Si el número de franjas es impar, el área de una franja se debe calcular utilizando la regla del trapecio y luego la regla de Simpson se puede emplear para las franjas restantes.

Problema de ejemplo A.1

Evalúe la integral $A = \int_0^{\pi/2} \text{sen}\, x\ dx$ (x está medida en radianes) con cuatro franjas, utilizando: 1. la regla del trapecio y 2. la regla de Simpson.

Solución

Como el intervalo de integración es $0 \leq x \leq \pi/2$ rad y el número de franjas es cuatro, se obtiene $\Delta x = (\pi/2)/4 = \pi/8$ rad. La tabla siguiente es conveniente para efectuar la cuadratura.

i	***x*(rad)**	***f*(*x*) = sen *x***
1	0	0
2	$\pi/8$	0.3827
3	$\pi/4$	0.7071
4	$3\pi/8$	0.9239
5	$\pi/2$	1.0000

Parte 1: Regla del trapecio

Utilizando la ecuación (A.3) con $n = 4$ y $\Delta x = \pi/8$, se obtiene

$$\begin{aligned} A &\approx (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + f_5)\frac{\Delta x}{2} \\ &= [0 + 2(0.3827 + 0.7071 + 0.9239) + 1.0]\frac{\pi}{16} \\ &= 0.9871 \end{aligned}$$

Respuesta

Parte 2: Regla de Simpson

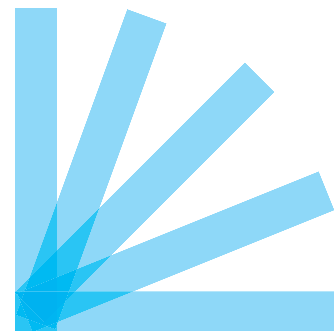
Con $n = 4$ y $\Delta x = \pi/8$, la ecuación (A.6) resulta en

$$\begin{aligned} A &\approx (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + f_5)\frac{\Delta x}{3} \\ &= [0 + 4(0.3827) + 2(0.7071) + 4(0.9239) + 1.0]\frac{\pi}{24} \\ &= 1.0002 \end{aligned}$$

Respuesta

Como el valor exacto de la integral es 1.0000, se puede observar que la regla de Simpson es considerablemente más precisa que la regla del trapecio para este problema. Una fuente importante de error en la regla del trapecio es que la curvatura de la función $f(x) = \text{sen}\, x$ tiene el mismo signo en todo el intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$ rad. Como ya se mencionó, la regla del trapecio no funciona bien en problemas de este tipo.

B



Determinación de raíces de funciones

B.1 Introducción

Las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es una función dada, se denominan *raíces de* $f(x)$. En muchas aplicaciones prácticas, $f(x)$ es no lineal en x, en cuyo caso puede ser difícil o incluso imposible determinar las raíces analíticamente. Ejemplos de funciones no lineales son $f(x) = e^x \cos x - 1$ y $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x - 5$. Aquí se introducen dos métodos numéricos populares para encontrar raíces: el método de Newton (también conocido como iteración de Newton-Raphson) y el método de la secante. Los dos métodos son iterativos y requieren un buen valor inicial (suposición inicial) de la raíz. Si el valor inicial no está lo suficientemente cerca de la raíz, los procedimientos pueden fallar. Con frecuencia los principios físicos de un problema sugieren un valor inicial razonable. De lo contrario, una buena estimación de la raíz se puede obtener trazando $f(x)$ contra x. (Esto comprende, por supuesto, evaluar la función en varios valores de x.) Si el valor inicial no está lo suficientemente cerca de la raíz, pueden surgir dos problemas:

- El procedimiento iterativo no convergirá a un solo valor de x.
- El procedimiento convergirá a una raíz que es diferente de la buscada. (Recuerde que las ecuaciones no lineales pueden tener raíces múltiples.)

B.2 Método de Newton

Considere el problema de calcular la raíz x_0 de la función $f(x)$ ilustrada en la figura B.1. Se inicia estimando el valor x_1 de la raíz y calculando $f(x_1)$; el punto correspondiente se denota A en la figura. El paso siguiente es calcular $f'(x_1)$ (la prima indica derivación respecto a x), que representa la pendiente de la línea recta que es tangente a $f(x)$ en A. La coordenada del punto donde la línea tangente cruza el eje x se denota x_2. Si x_1 está cercana a x_0, entonces la línea tangente es una buena aproximación de $f(x)$ en la vecindad de la raíz. En consecuencia, x_2 debe ser una mejor aproximación de la raíz que x_1.

El valor de x_2 se puede calcular a partir del triángulo sombreado en la figura B.1: $\tan\theta = f(x_1)/(x_1 - x_2)$. Sustituyendo $\tan\theta = f'(x_1)$ y despejando x_2 se obtiene

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

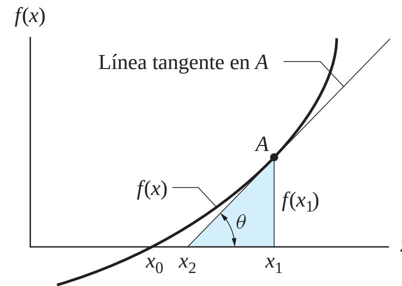


Fig. B.1

Esto completa un ciclo del proceso de iteración. Luego el proceso se repite con la salida de cada paso iterativo (por ejemplo, x_2) utilizada como la entrada para el paso siguiente, hasta que el cambio en x entre pasos sucesivos sea despreciable. El algoritmo para el método de Newton se puede resumir como sigue:

estime x

haga hasta que $|\Delta x| < \epsilon$

$$\Delta x \longleftarrow -\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{B.1}$$

$$x \longleftarrow x + \Delta x$$

fin

donde $a \leftarrow b$ significa "b remplaza a" y donde ϵ es el parámetro de convergencia (un número pequeño que señala que se ha alcanzado la precisión deseada).

La desventaja principal del método de Newton es que requiere la derivada de $f(x)$. Si $f(x)$ es una expresión simple, entonces derivar $f'(x)$ es sólo una tarea menor. Sin embargo, en casos donde $f(x)$ es una función complicada, los métodos que no requieren la derivada son más atractivos.

B.3 Método de la secante

El método de la secante se basa en el mismo principio que el método de Newton. No obstante, en vez de requerir la derivada de $f(x)$, se requieren dos valores iniciales (suposiciones iniciales) de la raíz. Estos valores iniciales se denotan x_1 y x_2 en la figura B.2 y los puntos correspondientes en la gráfica de $f(x)$ están identificados como A y B, respectivamente. (En la figura, se supone que $x_1 > x_2$, pero esto no tiene que ser el caso.) El papel que tuvo la línea tangente en el método de Newton es ahora el de la cuerda AB; es decir, la cuerda AB será una buena aproximación de $f(x)$ en la vecindad de la raíz x_0 si los valores iniciales están lo suficientemente cerca de la raíz.

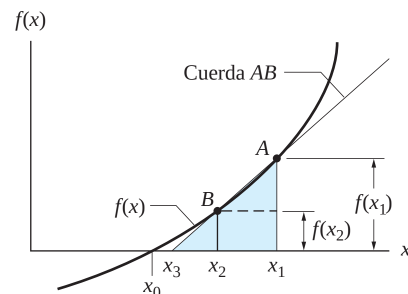


Fig. B.2

De triángulos similares en la figura B.2 se obtiene

$$\frac{f(x_2)}{x_2 - x_3} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

lo que da

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

Repitiendo este procedimiento empleando x_2 y x_1 como los nuevos valores (x_1 se descarta) mejorará aún más la estimación de la raíz. Los cálculos continúan hasta que x_3 no muestre un cambio significativo, es decir, hasta que el cambio en x sea insignificante. El resumen del algoritmo para el método de la secante es

estime x_1 y x_2

hasta que $|\Delta x| < \epsilon$

$$\Delta x \longleftarrow -f(x_2)\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \tag{B.2}$$

$x_3 \longleftarrow x_2 + \Delta x$

$x_1 \longleftarrow x_2$

$x_2 \longleftarrow x_3$

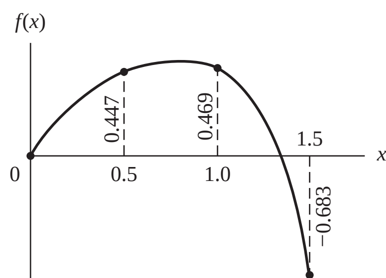
fin

Problema de ejemplo **B.1**

Encuentre la raíz menor, positiva y que no sea cero de $f(x) = e^x \cos x - 1$ con cinco dígitos significativos. Utilice: 1. el método de Newton y 2. el método de la secante.

Solución

Para obtener un valor aproximado de la raíz deseada, se traza $f(x)$ en incrementos de $\Delta x = 0.5$, iniciando en $x = 0$ y terminando después de que $f(x)$ cambie signo. Los resultados se muestran en la figura. Por inspección se estima que la raíz es aproximadamente $x = 1.3$.



Parte 1: Método de Newton

En el método de Newton se requiere que se evalúe la derivada de $f(x)$, que es

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x \cos x - 1) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

En la tabla siguiente se muestran los cálculos para la raíz, basados en el algoritmo indicado en la ecuación (B.1). El valor inicial fue $x = 1.3$.

x	**f (x)**	**f′(x)**	**Δx**
1.3	−0.018 47	−2.554 05	−0.007 23
1.292 77	−0.000 18	−2.503 16	−0.000 07
1.292 70	0.000 00	−2.502 64	0.000 00

El resultado final, $x = 1.2927$, se obtuvo con sólo dos iteraciones debido a la precisión de la estimación inicial.

Parte 2: Método de la secante

Se elige $x_1 = 1.2$ y $x_2 = 1.3$ como valores iniciales de la raíz. El algoritmo en la ecuación (B.2) conduce a la secuencia de cálculos siguiente.

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Δx	$x_3 = x_2 + \Delta x$
1.2	1.3	0.203 07	−0.018 47	−0.008 34	1.291 66
1.3	1.291 66	−0.018 47	0.002 58	0.001 03	1.292 69
1.291 66	1.292 69	0.002 58	0.000 03	0.000 01	1.292 70
1.292 69	1.292 70	0.000 03	0.000 00	0.000 00	1.292 70

Con referencia a la primera fila en la tabla, se observa que x_1 y x_2 se ingresaron primero, y luego las entradas siguientes se calcularon utilizando el algoritmo. En la segunda fila, los valores para x_1, x_2 y $f(x_1)$ simplemente se copian de las columnas apropiadas en la primera fila. Este patrón se repite en las filas subsiguientes.

Una vez más, el resultado final (x_3) es 1.2927, que se obtuvo con sólo tres iteraciones. En general, el método de la secante converge un poco más lentamente que el método de Newton.

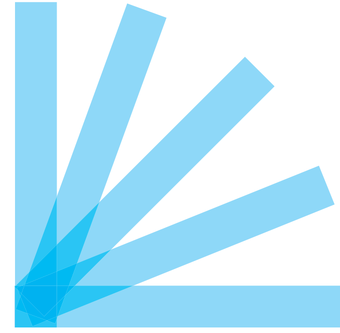
C

Densidades de materiales comunes



	ρ kg/m³	γ lb/pie³	γ lb/pulg³
Aceite	900	56	0.032
Acero	7 850	489	0.283
Agua (de mar)	1030	64	0.037
Agua (dulce)	1000	62.4	0.036
Aluminio	2660	166	0.096
Cobre	8 910	556	0.322
Concreto	2 400	150	0.087
Hielo	900	56	0.032
Hierro fundido	7 200	449	0.260
Ladrillo	2 000	125	0.072
Latón	8 300	518	0.300
Madera dura (roble blanco)	800	50	0.029
Madera suave (abeto Douglas)	480	30	0.017
Plomo	11 370	710	0.411
Tierra (húmeda)	1 760	110	0.064
Tierra (seca)	1 280	80	0.046
Vidrio	2 590	162	0.094

Respuestas a problemas con número par



Capítulo 1

1.2 23.5 lb
1.4 14.75 lb · pie · s^2
1.6 (Sin respuesta)
1.8 (a) 25 000 m/s; (b) 5930 mi/h
1.10 (a) $[FLT^2]$; (b) $[ML^2]$
1.12 $[c] = [FTL^{-1}]$, $[k] = [FL^{-1}]$, $[P_0] = [F]$, $[\omega] = [T^{-1}]$
1.14 (a) 66 000 lb · pie/s; (b) 89.5 kW
1.16 7.46×10^{-11} lb
1.18 (Sin respuesta)
1.20 13 790 km
1.22 3.61 m/s a 26.3°
1.24 Empuje = 6220 lb ↑, Arrastre = 653 lb ⟶
1.26 7.55 mi/h a 25.2°
1.28 $F_1 = 323$ N, $F_2 = 411$ N
1.30 2210 pies a lo largo de *OB*, 2570 pies a lo largo de *OC*
1.32 $\alpha = 21.6°$, $\beta = 19.9°$
1.34 (a) 71.8° ; (b) 235 lb
1.36 $a = 494$ m, $b = 372$ m
1.38 222 N, 21.1°
1.40 $-9.64\mathbf{i} + 16.70\mathbf{j} + 22.98\mathbf{k}$ lb
1.42 (a) 54.5°; (b) $154.3\mathbf{i} + 120.0\mathbf{j} + 139.3\mathbf{k}$ N
1.44 (a) $-0.269\mathbf{i} + 0.875\mathbf{j} + 0.404\mathbf{k}$; (b) $-1.61\mathbf{i} + 5.24\mathbf{j} + 2.42\mathbf{k}$ m/s
1.46 $63.0\mathbf{i} - 52.5\mathbf{j} - 87.6\mathbf{k}$ lb
1.48 $\theta_x = 54.8°$, $\theta_y = 67.4°$, $\theta_z = 136.1°$
1.50 $-96.0\mathbf{i} + 123.5\mathbf{j} - 85.8\mathbf{k}$ lb
1.52 $146\mathbf{i} - 48\mathbf{j}$ lb
1.54 $P = 717$ lb, $Q = 590$ lb
1.56 $P = 74.3$ lb, $Q = 69.9$ lb
1.58 (a) $39\mathbf{i} + 63\mathbf{j} - 42\mathbf{k}$ pies^2; (b) $39\mathbf{i} + 26\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$ N · m; (c) $-28\mathbf{i} - 25\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ m^2
1.60 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \times \mathbf{B} = 1.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ m^2
1.62 28.0°
1.64 (c) y (d)
1.66 $\pm(0.422\mathbf{i} + 0.211\mathbf{j} + 0.844\mathbf{k})$
1.68 −17.52 lb
1.70 Paralelo: $1.581(0.949\mathbf{i} + 0.316\mathbf{k})$ pulg., Perpendicular: $6.89(0.218\mathbf{i} + 0.725\mathbf{j} - 0.653\mathbf{k})$ pulg.
1.72 5 m
1.74 (Sin respuesta)
1.76 (Sin respuesta)

Capítulo 2

2.2 413 lb a 53.8°
2.4 $P = 109.6$ kN, $\theta = 29.9°$
2.6 (a) 367 lb; (b) (0, 1.314 pies, 0.651 pies)
2.8 $\mathbf{R} = -24.2\mathbf{i} - 24.5\mathbf{j} + 205.1\mathbf{k}$ kN, $x_A = 0.708$ m, $y_A = 0.716$ m
2.10 $P_1 = 62.3$ kN, $P_2 = 44.6$ kN
2.12 $P = 38.9$ lb, $R = 32.8$ lb
2.14 $Q_1 = 121.7$ lb, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 203$ lb
2.16 $\theta = 69.2°$, $\mathbf{R} = -10.99\mathbf{i} + 133.45\mathbf{k}$ N
2.18 $-108.4\mathbf{i} + 121.8\mathbf{j} - 820.4\mathbf{k}$ lb
2.20 234 lb
2.22 132.0 N · m S.R.
2.24 1.378 m
2.26 $-560\mathbf{i} + 200\mathbf{j}$ N
2.28 (a) 400 kN · m S.C.R.; (b) 400 kN · m S.R.; (c) 0
2.30 38.9 lb
2.32 6020 lb

2.34 $-14.75\mathbf{i} - 11.47\mathbf{j} + 10.32\mathbf{k}$ N · m
2.36 (a) $-73.0\mathbf{j}$ N · m; (b) $-87.7\mathbf{i} - 121.7\mathbf{k}$ N · m
2.38 (a) $84.5\mathbf{i} + 136.0\mathbf{j} + 181.3\mathbf{k}$ kN· m;
(b) $84.5\mathbf{i} + 181.3\mathbf{k}$ kN · m
2.40 $150.5\mathbf{i} - 190.9\mathbf{j}$ lb · pie
2.42 $M_O = 233$ lb · pulg, $\cos\theta_x = 0.487$, $\cos\theta_y = 0.133$, $\cos\theta_z = 0.864$
2.44 $M_O = 7.94$ N · m, $\cos\theta_x = -0.327$, $\cos\theta_y = 0.818$, $\cos\theta_z = -0.473$
2.46 $y = 4.60$ pies, $z = 2.90$ pies
2.48 (a) 36 kN · m; (b) 36 kN · m; (c) 32 kN · m; (d) 0; (e) 0
2.50 (a) 432 lb · pie; (b) 432 lb · pie
2.52 415 N · m
2.54 $F = 32.0$ N, $d = 0.450$ m
2.56 −75.0 lb · pie
2.58 $-74.6\mathbf{i} - 96.0\mathbf{k}$ N · m
2.60 116.2 lb
2.62 528 lb · pie
2.64 0.327 m
2.66 −208 lb · pulg
2.68 (b), (c), (d), (f), y (g)
2.70 19.55 lb · pie S.R.
2.72 192.1 lb · pie
2.74 $-106.2\mathbf{i} + 140.7\mathbf{j} + 280.7\mathbf{k}$ lb · pulg
2.76 99.0 mm
2.78 339 lb · pie
2.80 $R = 900$ lb, $C_0 = 3120$ lb · pulg
2.82 (c) y (e)
2.84 (a) $R = 120$ N$\downarrow$, $C^R = 56$ N · m S.C.R.;
(b) $F_A = 253$ N$\uparrow$, $F_B = 373$ N$\downarrow$
2.86 $\mathbf{R} = 25.0\mathbf{i} - 133.3\mathbf{j}$ lb, $\mathbf{C}^R = 210\mathbf{k}$ lb · pulg
2.88 $R = 100$ N$\uparrow$, $\mathbf{C}^R = 60\mathbf{i} - 50\mathbf{j}$ N · m
2.90 $\mathbf{R} = \mathbf{P} = -33.3\mathbf{i} - 22.2\mathbf{k}$ lb,
$\mathbf{C}^R = -157.3\mathbf{i} - 10.6\mathbf{j} + 166.4\mathbf{k}$ lb · pie
2.92 $\mathbf{R} = 3.15\mathbf{i} - 3.75\mathbf{j} + 8.49\mathbf{k}$ lb,
$\mathbf{C}^R = 54.5\mathbf{i} + 11.81\mathbf{j} + 45.0\mathbf{k}$ lb · pie
2.94 97.9 lb
2.96 $T_1 = 79.4$ N, $T_2 = 151.6$ N, $T_3 = 220.3$ N
2.98 65.8 lb
2.100 (a) $1200\mathbf{j} + 1200\mathbf{k}$ lb · pie; (b) 1477 lb · pie
2.102 (a) Demuestre que $\mathbf{F}\cdot\mathbf{C} = 0$; (b) (−1.2 pulg, −1.6 pulg, 0)
2.104 $x = L/2$, $R = P\uparrow$
2.106 107.3 lb
2.108 $-120\mathbf{i} - 80\mathbf{j} - 80\mathbf{k}$ N · m

Capítulo 3

3.2 $R = 56$ kN$\uparrow$, $C^R = 266$ kN · m S.C.R.
3.4 $R = 154$ lb$\uparrow$, $C^R = 115.2$ lb · pulg S.R.
3.6 $\mathbf{P} = 222\mathbf{i} - 150\mathbf{j}$ lb, $b = 3.90$ pulg
3.8 $\mathbf{R} = 40\mathbf{k}$ lb, $\mathbf{C}^R = 1046\mathbf{i} - 1256\mathbf{j}$ lb · pie
3.10 (a) $\mathbf{R} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ lb, $\mathbf{C}^R = -6\mathbf{j}$ lb · pulg;
(b) $\mathbf{R} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ lb, $\mathbf{C}^R = \mathbf{0}$;
(c) $\mathbf{R} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ lb, $\mathbf{C}^R = -6\mathbf{j}$ lb · pulg;
(d) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}^R = -15\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ lb · pulg;
(e) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}^R = -15\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ lb · pulg;
(f) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}^R = \mathbf{0}$; (a) y(c) son equivalentes, (d) y (e) son equivalentes
3.12 $\mathbf{R} = -13.7\mathbf{i} - 50.3\mathbf{j} + 25.7\mathbf{k}$ kN,
$\mathbf{C}^R = 102.9\mathbf{i} + 150.0\mathbf{j} + 54.9\mathbf{k}$ kN·m
3.14 $\mathbf{R} = -36\mathbf{i} - 30\mathbf{k}$ lb, $\mathbf{C}^R = 15\mathbf{i} - 162\mathbf{k}$ lb · pie
3.16 (1) $\mathbf{R} = 300\mathbf{i}$ lb intersectando el eje y en $y = 3$ pulg;
(2) $\mathbf{R} = 200\mathbf{i} - 200\mathbf{j}$ N intersecando el eje x en $x = -4$ m;
(3) $\mathbf{R} = -600\mathbf{i} - 400\mathbf{j}$ kN pasando por O;
(4) $\mathbf{R} = -600\mathbf{i} + 800\mathbf{j}$ lb intersectando el eje x en $x = -30$ pies
3.18 $P = 348$ lb, $\theta = 33.7°$
3.20 $P = 45.4$ lb, $\mathbf{R} = 175.3\mathbf{i} - 75.0\mathbf{j}$ lb
3.22 (a) $C^R = 450$ N · m S.C.R.; (b) $\mathbf{R} = 207\mathbf{i}$ N intersectando el eje y en $y = -2.17$ m
3.24 (a) $\mathbf{R} = -60\mathbf{i}$ N actuando por O;
(b) $\mathbf{R} = -60\mathbf{i}$ N intersectando el eje y en $y = 1.5$ m
3.26 $C = 30$ lb · pie S.C.R., $R = 80$ lb$\longrightarrow$
3.28 $P_1 = 103.7$ kN, $P_2 = 49.8$ kN, $P_3 = 82.9$ kN
3.30 (a) $\mathbf{R} = -50\mathbf{k}$ lb pasando por el punto (4 pies, 5 pies, 0);
(b) $\mathbf{R} = 50\mathbf{k}$ kN pasando por el punto (5 m, 0, 0);
(c) $\mathbf{R} = 40\mathbf{k}$ N pasando por el punto (10 m, 8 m, 0)
3.32 $\mathbf{R} = 82\mathbf{i} - 1411\mathbf{j} + 406\mathbf{k}$ lb en el punto de concurrencia
3.34 $P_1 = 805$ lb, $P_2 = P_3 = 338$ lb
3.36 $\mathbf{C}^R = 18\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ kN · m
3.38 $P_1 = 28.8$ lb, $P_2 = -16.8$ lb, $C = 540$ lb · pulg
3.40 $\mathbf{R} = -380\mathbf{k}$ lb pasando por el punto (−1.474 pies, −1.001 pies, 0)
3.42 $P = 1063$ lb, $Q = 915$ lb, $\mathbf{R} = -1425\mathbf{j} - 3660\mathbf{k}$ lb
3.44 $\mathbf{R} = 250\mathbf{i} + 360\mathbf{j} - 400\mathbf{k}$ N,
$\mathbf{C}_t^R = 246\mathbf{i} + 354\mathbf{j} - 393\mathbf{k}$ N · m, pasando por el punto (0.991 m, −2.39 m, 0)
3.46 $R = 13.2$ lb actuando en el centro del anuncio
3.48 $R = 15\,200$ lb$\downarrow$, $\bar{x} = 8.75$ pies
3.50 $\mathbf{R} = (-w_0L/4)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $x = 0.833L$
3.52 $\mathbf{R} = -76\,970\mathbf{j}$ lb pasando por el punto (59.1 pies, 0, 135.6 pies)
3.54 $\mathbf{R} = (-237\mathbf{i} - 45.0\mathbf{j}) \times 10^3$ lb actuando por el punto (−24.3 pies, 0)
3.56 $343\mathbf{i} + 201\mathbf{j}$ lb
3.58 $\mathbf{R} = -400\mathbf{k}$ kN, $x = 1.0$ m, $y = 1.125$ m
3.60 (4.67 pies, 5.33 pies, 0)

3.62 (a) $\mathbf{R} = -200\mathbf{i} + 300\mathbf{j} + 150\mathbf{k}$ lb,
$\mathbf{C}^R = 1250\mathbf{i} + 600\mathbf{j} + 1000\mathbf{k}$ lb · pie;
(b) $\mathbf{R} = -200\mathbf{i} + 300\mathbf{j} + 150\mathbf{k}$ lb,
$\mathbf{C}^R = -104.9\mathbf{i} + 157.4\mathbf{j} + 78.7\mathbf{k}$ lb · pie,
pasando por el punto (−2.95 pies, 9.03 pies, 0)
3.64 $P = 38.9$ kN, $\mathbf{R} = 125.5\mathbf{i}$ kN
3.66 $\mathbf{R} = 131.3\mathbf{i} + 210\mathbf{j} + 221\mathbf{k}$ lb,
$\mathbf{C}^R = 6700\mathbf{i} - 630\mathbf{j} - 10\,270\mathbf{k}$ lb · pulg
3.68 452 lb
3.70 $T_1 = 654$ N, $T_2 = 425$ N, $R = -1441$ N

Capítulo 4

4.2 3 incógnitas
4.4 4 incógnitas
4.6 (a) 3 incógnitas; (b) 4 incógnitas; (c) 3 incógnitas; (d) 3 incógnitas
4.8 3 incógnitas
4.10 4 incógnitas
4.12 $\theta = 33.7°$, $N_A = 0.555W$, $N_B = 0.832W$
4.14 53.6 lb
4.16 38.4 lb · pulg
4.18 $R_B = 2940$ N, $C_x = 1766$ N, $C_y = -883$ N
4.20 39.0°
4.22 $T = 112.2$ N, $A_x = -38.4$ N, $A_y = 182.4$ N
4.24 $T_1 = 133.3$ lb, $T_2 = 100.0$ lb, $T_3 = 166.7$ lb
4.26 $N_B = 8.66$ lb, $A_x = 8.66$ lb, $A_y = 30.0$ lb
4.28 $N_B = 660$ lb, $A_x = 0$, $A_y = 480$ lb
4.30 $5.36P$
4.32 $R_A = 0$, $R_B = 1.0$ kN ↑
4.34 $T_{AB} = 34.6$ lb, $T_{BC} = 727$ lb
4.36 533 N
4.38 $P = 340$ N, $C = 101.9$ N · m
4.40 $R_A = R_B = 960$ N
4.42 6.43 N
4.44 $P = 5W/8$ (θ no aparece en la expresión para P)
4.46 (a) $R_A = 647$ N, $N_B = 858$ N; (b) 2.61 m
4.48 $T = 13.66$ N, $R_A = 27.4$ N
4.50 $N_A = 434$ N, $C = 985$ N
4.52 $T_A = 25.2$ lb, $T_B = 324$ lb, $T_C = 356$ lb
4.54 1.975 pies
4.56 1627 N
4.58 238 N
4.60 50.4 mm
4.62 (a) 6 incógnitas, 6 ec. independientes.;
(b) 8 incógnitas, 8 ec. independientes.;
(c) 8 incógnitas, 8 ec. independientes.
4.64 6 incógnitas, 6 ec. independientes.
4.66 6 incógnitas, 6 ec. independientes.
4.68 9 incógnitas, 9 ec. independientes.
4.70 (Sin respuesta)
4.72 (Sin respuesta)
4.74 5.03 kN
4.76 1416 N
4.78 $1.5W \cot\theta$
4.80 $R_A = 411$ N, $R_C = 416$ N
4.82 $N_A = 55.6$ kN, $N_B = 10.12$ kN, $N_C = 32.4$ kN
4.84 200 lb
4.86 $T = 3530$ N, $N_B = 6530$ N
4.88 280 lb
4.90 7200 lb
4.92 36.7 lb
4.94 24.0 N · m
4.96 (a) $T_A = 68.9$ lb, $T_B = 126.1$ lb;
(b) $N_A = 101.1$ lb, $N_B = 63.9$ lb
4.98 2690 N
4.100 $P_{BC} = 10.0$ kips, $P_{BD} = 20.0$ kips, $E = 19.70$ kips
4.102 623 lb · pulg
4.104 21.2 N
4.106 27.8 kips en A, 31.6 kips en C
4.108 $P_{AB} = 3.13$ MN, $P_{CD} = 5.50$ MN
4.110 877 N
4.112 $A = 672$ lb, $C = 582$ lb, $E = 336$ lb
4.114 55.6 mm
4.116 $E = 6P$
4.118 $10P$
4.120 1294 lb
4.122 $R_C = 169.7$ lb, $N_B = 120.0$ lb
4.124 29.6 mm
4.126 14.48°
4.128 17.5 mm
4.130 (a) 59.0 lb; (b) 39.2 lb
4.132 $P_{AB} = 0.6P$ (T), $P_{AC} = 0.8P$ (C),
$P_{BC} = 0.64P$ (T), $P_{CD} = 0.48P$ (C)
4.134 $P_{AE} = 2820$ lb (C), $P_{AB} = 2200$ lb (T),
$P_{BC} = 1200$ lb (T), $P_{BE} = 2240$ lb (T),
$P_{CE} = 1342$ lb (T), $P_{CD} = 1800$ lb (T),
$P_{DE} = 2310$ lb (C)
4.136 $P_{AB} = 358$ kN (T), $P_{AD} = P_{DE} = 320$ kN (C),
$P_{BD} = 160$ kN (T), $P_{BC} = 537$ kN (T),
$P_{BE} = 178.9$ kN (C), $P_{CE} = 240$ kN (C)
4.138 $P_{AB} = 11.87$ kN (C), $P_{AD} = 8.39$ kN (T),
$P_{BC} = 6.21$ kN (C), $P_{CD} = 4.0$ kN (T),
$P_{BD} = 5.66$ kN (C), $P_{DE} = 4.39$ kN (C),
$P_{CE} = 8.78$ kN (C)
4.140 $P_{AB} = 979$ kN (T), $P_{BC} = 861$ kN (T),
$P_{BD} = 171$ kN (T), $P_{CD} = 950$ kN (C)

4.142 1.506 pies
4.144 $P_{HC} = 0.901P$ (T), $P_{HG} = 0.901P$ (C)
4.146 3200 lb (T)
4.148 $1.25P$ (T)
4.150 $P_{BC} = 13\,420$ lb (C), $P_{BG} = 4470$ lb (C), $P_{FG} = 16\,000$ lb (T)
4.152 $P_{EF} = 240$ kN (C), $P_{NF} = 82.0$ kN (T), $P_{NO} = 187.5$ kN (T)
4.154 $P_{BG} = 0.250P$ (T), $P_{CI} = 0.354P$ (T), $P_{CD} = 0.750P$ (C)
4.156 $(P_{BC})_{max} = 168.0$ kN, $\theta = 45^\circ$
4.158 $P_{CD} = 12.75$ kN (T), $P_{DF} = 7.39$ kN (C)
4.160 $P = 5170$ lb, $Q = 370$ lb
4.162 $P_{DE} = 40$ kips (T), $P_{AD} = 0$, $P_{AC} = 50$ kips (C)
4.164 $P_{CD} = 4.0P$ (T), $P_{IJ} = 4(0P$ (C), $P_{NJ} = 0.559P$ (C)
4.166 $P_{BC} = 4.47P$ (C), $P_{BG} = 2.0P$ (C)
4.168 $P_{EF} = 1.828W$ (T), $P_{KL} = 2.83W$ (C)
4.170 $Wb/\sqrt{R^2 - b^2}$
4.172 $0.366WL$
4.174 4.39 kN
4.176 $A = D = 4.22$ kN
4.178 15.12°
4.180 (a) 361 kN (C); (b) 300 kN (T); (c) 631 kN (T)
4.182 20 lb
4.184 (a) 375 lb (T); (b) 4875 lb (T)
4.186 178 lb
4.188 643 N

Capítulo 5

5.2 5 incógnitas
5.4 6 incógnitas
5.6 6 incógnitas
5.8 6 incógnitas
5.10 12 incógnitas
5.12 6 incógnitas
5.14 12 770 lb
5.16 27.3 kN
5.18 $T_A = T_B = 145.8$ N, $T_C = 134.9$ N, $T_D = 61.3$ N
5.20 $T = 473$ lb, $A = 249$ lb
5.22 $T_{BC} = 5.82$ kN, $T_{BD} = 14.95$ kN, $R_A = 18.66$ kN
5.24 14.04°
5.26 $P_{CB} = 9690$ lb (T), $P_{CE} = 8050$ lb (T)
5.28 $P_{AD} = 29.2$ kN (C), $P_{CD} = 0$, $P_{BD} = 65.0$ kN (T)
5.30 $\mathbf{C} = 400\mathbf{k}$ N, $\mathbf{D} = -400\mathbf{k}$ N
5.32 $P_{EF} = 1000$ lb (C), $C = 318$ lb
5.34 286 lb
5.36 $T_{CD} = 193.5$ N, $\mathbf{A} = 15.7\mathbf{i} + 86.5\mathbf{j} + 83.9\mathbf{k}$ N, $\mathbf{B} = 157.3\mathbf{i} + 6.14\mathbf{k}$ N
5.38 $a = 3.43$ m, $b = 1.93$ m
5.40 $P = 51.4$ lb, $\mathbf{A} = 87.0\mathbf{k}$ lb, $\mathbf{B} = 134.4\mathbf{k}$ lb
5.42 $T = 104.4$ lb, $A = 39.3$ lb
5.44 $P_{BD} = 1.786P$, $P_{BE} = 1.515P$
5.46 21.9 lb
5.48 $P_{BE} = 800$ N (T), $P_{CF} = 640$ N (C)
5.50 $P_{CB} = 171.6$ lb (C), $P_{CD} = 671$ lb (T)
5.52 4600 lb
5.54 $T = 25.3$ lb, $N_B = 32.8$ lb
5.56 $T = 161.3$ lb, $A = 12.0$ lb, $B = 12.0$ lb, $C = 140.5$ lb
5.58 8600 N
5.60 $T = 4750$ N, $\mathbf{A} = 2000\mathbf{j}$ N
5.62 $T = 74.7$ lb, $B = 94.2$ lb

Capítulo 6

6.2 $P_1 = 0$, $V_1 = 40$ kN, $M_1 = 60$ kN · m
6.4 $P_1 = 240$ lb (C), $V_1 = 0$, $M_1 = 600$ lb · pie, $P_2 = 0$, $V_2 = 60$ lb, $M_2 = 300$ lb · pie
6.6 $P_1 = V_1 = 0$, $M_1 = 720$ lb · pie, $P_2 = 0$, $V_2 = 72$ lb, $M_2 = 360$ lb · pie
6.8 $P_1 = 28$ lb (T), $V_1 = 0$, $M_1 = 21$ lb · pulg, $P_2 = 34.6$ lb (T), $V_2 = 8$ lb, $M_2 = 10$ lb · pulg
6.10 $P_1 = 644$ N (C), $V_1 = 0$, $M_1 = 162$ N · m, $P_2 = 644$ N (C), $V_2 = 540$ N, $M_2 = 324$ N · m
6.12 $M_2 = 135.0$ N · m, $P_2 = 969$ N, $V_2 = 300$ N
6.14 $P_3 = 255$ N (C), $V_3 = 0$, $M_3 = 29.8$ N · m
6.16 $P_1 = 50$ lb (T), $V_1 = 0$, $M_1 = 600$ lb · pulg, $P_2 = 50$ lb (C), $V_2 = 37.5$ lb, $M_2 = 150$ lb · pulg
6.18 $P_2 = Wx/(\sqrt{5}a)$ (T), $V_2 = Wx/(2\sqrt{5}a)$, $M_2 = 3Wx/4$
6.20 $P_1 = 555$ lb (C), $V_1 = 832$ lb, $M_1 = 4000$ lb · pie
6.22 $V = C_0/L$, $M = -C_0 + C_0x/L$
6.24 $V = -w_0x + w_0x^2/(2L)$, $M = -w_0x^2/2 + w_0x^3/(6L)$
6.26 $\underline{AB}$: $V = Pb/(a-b)$, $M = Pbx/(a+b)$; $\underline{BC}$: $V = -Pa/(a+b)$, $M = Pa[1 - x/(a+b)]$
6.28 $\underline{AB}$: $V = -120x$ lb, $M = -60x^2$ lb · pie; $\underline{BC}$: $V = -960$ lb, $M = -960x + 3840$ lb · pie
6.30 $\underline{AB}$: $V = -120x$ lb, $M = -60x^2$ lb · pie; $\underline{BC}$: $V = 810 - 120x$ lb, $M = -60x^2 + 810x - 2430$ lb · pie
6.32 $\underline{AB}$: $V = 29 - 8x$ kN, $M = 29x - 4x^2$ kN · m; $\underline{BC}$: $V = -11$ kN, $M = 88 - 11x$ kN · m

6.34 $\underline{AB}$: $V = P/3$, $M = Px/3$; $\underline{BC}$: $V = -2P/3$, $M = P(L - 2x)/3$; $\underline{CD}$: $V = P/3$, $M = -P(L - x)/3$
6.36 $\underline{AB}$: $V = 12$ kips, $M = 12x$ kip · pie; $\underline{BC}$: $V = 0$, $M = 48$ kip · pie; $\underline{CD}$: $V = M = 0$
6.38 $\underline{AB}$: $V = 670 - 60x$ lb, $M = 670x - 30x^2$ lb · pie; $\underline{BC}$: $V = -230 - 60x$ lb, $M = -30x^2 - 230x + 3600$ lb · pie; $\underline{CD}$: $V = 1480 - 60x$ lb, $M = -30x^2 + 1480x - 16\,920$ lb · pie
6.40 $\underline{AB}$: $V = (P/2)\operatorname{sen}\theta$, $M = (PR/2)(1 - \cos\theta)$; $\underline{BC}$: $V = -(P/2)\operatorname{sen}\theta$, $M = (PR/2)(1 + \cos\theta)$
6.42 (1) Para $0 < x < L/2$: $V = P/2$, $M = Px/2$; para $L/2 < x < L$: $V = -P/2$, $M = P(L - x)/2$; (2) Para $0 < x < L/2$: $V = -Px/L$, $M = Px/2$; para $L/2 < x < L$: $V = P(L - x)/L$, $M = P(L - x)/2$
6.44-6.62 (Sin respuestas)
6.64 1.043 GN
6.66 $s = 86.0$ pies, $T = 960$ lb
6.68 $s = 62.0$ pies, $H = 16.01$ pies
6.70 (a) 440 N; (b) 33.7 m
6.72 0.338
6.74 36.4 kg
6.76 35.9 pies
6.78 26.7 pies
6.80 $h = 8.13$ pies, $T_{BC} = 72.1$ lb, $T_{CD} = 100$ lb
6.82 $\beta_2 = 27.8^\circ$, $\beta_3 = -3.53^\circ$, $T_{AB} = 5.04$ kips, $T_{BC} = 4.36$ kips, $T_{CD} = 3.87$ kips
6.84 13.03 pies
6.86 $P = 48.0$ kN, $T_{AB} = 26.8$ kN, $T_{BC} = 12.0$ kN, $T_{CD} = 16.97$ kN
6.88 0.420
6.90 1.50 kN

Capítulo 7

7.2 $29.3 \text{ lb} \leq P \leq 109.3$ lb
7.4 10.57°
7.6 36.9°
7.8 297 lb
7.10 (a) 5.89°; (b) 7.10°
7.12 6.74 N
7.14 (a) $N_A = 94.2$ N, $N_B = 141.2$ N, $N_C = 377$ N; (b) 0.50
7.16 El cilindro no puede estar en reposo
7.18 0.270
7.20 153.2 N
7.22 El disco está en equilibrio
7.24 (a) La tabla se deslizará en A; (b) La tabla no se moverá
7.26 1.688 m
7.28 3.75 pies
7.30 176.6 N
7.32 115.3 N
7.34 4.50 lb · pulg
7.36 47.1°
7.38 Los bloques se vuelcan
7.40 353 lb
7.42 10.83 kN
7.44 0.268
7.46 13.14 pies
7.48 8.33 pulg
7.50 18.15°
7.52 27.0°
7.54 (a) 114.5 lb · pie; (b) 60.2 lb · pie
7.56 (a) 1086 N; (b) 0.711 N · m
7.58 (a) 125.3 lb · pulg; (b) 0
7.60 $P = 76.2$ lb, $C = 15\,960$ lb · pulg
7.62 64.1 N
7.64 $11.69 \text{ lb} < P < 77.0$ lb
7.66 40.3°
7.68 0.201
7.70 $(8/15)\mu_s PR$
7.72 (a) 6.01 N · m; (b) 5.89 N · m
7.74 4.73 N · m
7.76 17.25 pulg
7.78 55.5 lb
7.80 4.80 lb
7.82 $1.461W$
7.84 $\beta = 71.6^\circ$, $P = 316$ lb
7.86 22.6°
7.88 2.0 m
7.90 (a) 11.73 lb · pulg; (b) 7.24 lb · pulg
7.92 0.325
7.94 Las barras están en equilibrio

Capítulo 8

8.2 $\bar{x} = 2.86$ pies, $\bar{y} = 0.625$ pies
8.4 $\bar{x} = 0.1543$ m, $\bar{y} = 0.281$ m
8.6 $\bar{x} = 2.94$ pulg, $\bar{y} = 2.03$ pulg
8.8 $\bar{x} = 6.33$ pulg, $\bar{y} = 3.67$ pulg
8.10 (a) $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{4}{3\pi}\dfrac{3R^2 + 3Rt + t^2}{2R + t}$
8.12 $\bar{x} = \bar{y} = 2R/\pi$
8.14 $\bar{x} = 2.47$ pulg, $\bar{y} = 0$
8.16 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0.557$ pulg

8.18 $\bar{x} = 20.2$ mm, $\bar{y} = 9.81$ mm
8.20 $\bar{x} = 0.872$ pulg, $\bar{y} = 5.96$ pulg
8.22 $h = \sqrt{5}R/2$
8.24 $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{b^2 + bt - t^2}{2(2b - t)}$
8.26 $h = \bar{y}_{max} = 2.34$ pies
8.28 $\bar{x} = -3.6$ mm, $\bar{y} = 50.9$ mm
8.30 $\bar{x} = 1.0$ pie, $\bar{y} = 1.5$ pies
8.32 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = -10.30$ mm
8.34 $\sqrt{3}$
8.36 $\bar{x} = 3.28$ pulg, $\bar{y} = 3.59$ pulg
8.38 119.7 pies
8.40 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = R/2$
8.42 $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = 3.125$ pulg
8.44 $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = h/3$
8.46 R/π
8.48 $\bar{x} = \dfrac{2(2h_1 + h_2)}{3(3h_1 + h_2)}a$, $\bar{y} = \dfrac{2(2h_1 + h_2)}{3(3h_1 + h_2)}b$
8.50 $\bar{x} = -(2/\pi)^2 R$, $\bar{y} = 2R/\pi$, $\bar{z} = h/3$
8.52 $\bar{x} = 9.95$ pulg, $\bar{y} = 4.0$ pulg, $\bar{z} = 1.75$ pulg
8.54 $\bar{x} = 46.7$ mm, $\bar{y} = 40.0$ mm, $\bar{z} = 28.9$ mm
8.56 $\bar{x} = 124.1$ mm, $\bar{y} = 55.0$ mm, $\bar{z} = 41.1$ mm
8.58 -29.4 mm
8.60 $\bar{x} = -5.15$ pulg, $\bar{y} = \bar{z} = 0$
8.62 $\bar{x} = 77.8$ mm, $\bar{y} = 161.1$ mm, $\bar{z} = 100.0$ mm
8.64 $\bar{x} = \bar{y} = 7.70$ pulg, $\bar{z} = 2.70$ pulg
8.66 166.7 mm
8.68 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 1.74$ pulg, $\bar{z} = 3.21$ pulg
8.70 $\bar{x} = 108.7$ mm, $\bar{y} = \bar{z} = 0$
8.72 $\bar{x} = 12$ pulg, $\bar{y} = 3.83$ pulg, $\bar{z} = 0$
8.74 $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = 1.640$ m
8.76 $V = 1257$ pulg^3, $A = 766$ pulg^2
8.78 $A = 258$ pulg^2, $V = 366$ pulg^3
8.80 50.3 pulg^2
8.82 1487 pulg^3
8.84 12.73 pies
8.86 7850 m^3
8.88 1.702
8.90 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0.788$ m
8.92 $\bar{x} = 2.5$ pulg, $\bar{y} = 4.14$ pulg, $\bar{z} = 0.858$ pulg
8.94 3.39 pulg
8.96 $\bar{x} = 2.16$ pulg, $\bar{y} = 4.56$ pulg, $\bar{z} = 0.71$ pulg
8.98 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = -3.12$ mm, $\bar{z} = 5.21$ mm
8.100 3.10 pies
8.102 27.7°
8.104 $R = 609$ lb, $\bar{x} = 8.16$ pies
8.106 $R = 2w_0 a$, $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \pi a/4$
8.108 $R = 0$, $C^R = 9000$ lb · pulg S.C.R.
8.110 $R = 149.1$ N, $\bar{x} = 0.0483$ m,
$\bar{y} = 0.0644$ m
8.112 (a) $\pi a^2 p_0$; (b) $\pi a^2 p_0$; c) $2.22a^2 p_0$;
d) $(ap_0/2)\sqrt{4h^2 + \pi^2 a^2}$
8.114 $1.111 p_0 d^2$
8.116 (a) $\gamma c(h^2 + b^2)/6$; (b) $\gamma c(h^2/6 + 4b^2/15)$;
(c) $\gamma c(h^2/6 + b^2/2)$
8.118 Seguro contra volcamiento
8.120 $R = 0.622$ N, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 28.8$ mm
8.122 19 970 lb
8.124 $A = 3.22 \times 10^6$ N, $N_B = 3.79 \times 10^6$ N
8.126 $\bar{x} = 8.84$ pulg, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 21.45$ pulg
8.128 52.1×10^3 mm^2
8.130 $T_A = T_C = 16.94$ lb, $T_B = 13.68$ lb
8.132 $\bar{x} = (11/28)b$, $\bar{y} = (93/280)h$
8.134 44.3 pulg
8.136 (a) 276 pulg^2; b) 276 pulg^2
8.138 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = -0.50$ pulg
8.140 $R = 140.4$ lb, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = -0.884$ pies
8.142 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 47.0$ mm

Capítulo 9

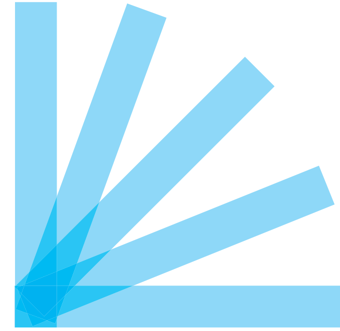
9.2 $A = 360$ mm^2, $\bar{I}_x = 24 \times 10^3$ mm^4,
$\bar{I}_y = 26 \times 10^3$ mm^4
9.4 826 mm
9.6 21.3 pulg^4
9.8 $R^4\alpha/2$
9.10 $I_x = 1/28$ m^4, $I_y = 1/20$ m^4
9.12 23.15×10^3 pulg^4
9.14 $b = 7.35$ pulg, $h = 12.87$ pulg
9.16 $\bar{I}_x = 157.8$ pulg^4, $\bar{I}_y = 9.94$ pulg^4
9.18 $I_x = 48.7 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 18.42 \times 10^6$ mm^4
9.20 12.96×10^6 mm^4
9.22 6230 pulg^4
9.24 16.89 pulg^4
9.26 $0.433R$
9.28 1.0
9.30 32.7°
9.32 $I_x = 63.0 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 7.90 \times 10^6$ mm^4
9.34 $h^2 b^2/12$
9.36 $tR^3/2$
9.38 -120×10^3 mm^4
9.40 -1.131×10^6 mm^4
9.42 -61.4×10^6 mm^4
9.44 -323×10^3 mm^4
9.46 792 pulg^4
9.48 -2.76×10^9 mm^4
9.50 (a) $I_1 = 16$ pulg^4, $I_2 = 9$ pulg^4, los ejes x y y son ejes principales; (b) $I_u = 14.25$ pulg^4, $I_v = 10.75$ pulg^4, $I_{uv} = 3.03$ pulg^4

9.52 $\bar{I}_1 = 103.7$ pulg^4, $\bar{I}_2 = 29.6$ pulg^4, $\theta_1 = 29.9°$, $\theta_2 = 119.9°$
9.54 $I_u = 1817$ pulg^4, $I_v = 3180$ pulg^4, $I_{uv} = -183.0$ pulg^4
9.56 $I_x = 6800$ pulg^4, $I_y = 5800$ pulg^4, $I_{xy} = -1200$ pulg^4
9.58 60×10^6 mm^4
9.60 1.907×10^6 mm^4
9.62 $I_u = I_v = \sqrt{3}a^4/96$, $I_{uv} = 0$ para todos los valores de θ. Por lo tanto cada eje es un eje principal.
9.64 (a) $I_1 = 0.983 \times 10^6$ mm^4; (b) $\theta_1 = 28.5°$, $\theta_2 = 118.5°$
9.66 $\theta_1 = -18.84°$
9.68 $I_1 = 143.6 \times 10^6$ mm^4, $I_2 = 19.8 \times 10^6$ mm^4, $\theta_1 = 41.4°$, $\theta_2 = 131.4°$
9.70 $I_u = 33.3 \times 10^6$ mm^4, $I_v = 71.0 \times 10^6$ mm^4, $I_{uv} = 22.5 \times 10^6$ mm^4
9.72 $I_u = 115.2$ pulg^4, $I_v = 777$ pulg^4, $I_{uv} = 259$ pulg^4
9.74 $I_u = 2 \times 10^6$ mm^4, $I_v = 28 \times 10^6$ mm^4, $I_{uv} = 0$
9.76 (a) 45°; (b) $I_u = I_v = 5 \times 10^6$ mm^4, $|I_{uv}| = 3 \times 10^6$ mm^4
9.78 (a) 0.983×10^6 mm^4; (b) $\theta_1 = 28.5°$, $\theta_2 = 118.5°$
9.80 (a) $I_x = 56.2 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 33.8 \times 10^6$ mm^4; (b) $I_u = 33.2 \times 10^6$ mm^4, $I_v = 56.8 \times 10^6$ mm^4
9.82 $I_x = 4.084 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 0.816 \times 10^6$ mm^4
9.84 $I_1 = 380 \times 10^6$ mm^4, $I_2 = 120 \times 10^6$ mm^4, $\theta_1 = 56.3°$, $\theta_2 = 146.3°$
9.86 3.21%
9.88 $\bar{I}_x = 645$ pulg^4, $\bar{I}_y = 1438$ pulg^4, $\bar{I}_{xy} = -442$ pulg^4
9.90 $\bar{I}_x = 1.544 \times 10^6$ mm^4, $\bar{I}_y = 0.287 \times 10^6$ mm^4, $\bar{I}_{xy} = 0$
9.92 $I_x = I_y = 21.9$ pulg^4, $I_{xy} = 21.3$ pulg^4
9.94 $I_u = 90.5$ pulg^4, $I_v = 313.5$ pulg^4, $I_{uv} = -69.7$ pulg^4

Capítulo 10

10.2 $(WL \operatorname{sen}\theta)/2$
10.4 3.53 kN · m
10.6 17.32 lb
10.8 $\dfrac{P(a+b)}{2b}\cot\theta$
10.10 332 lb
10.12 1.697 kN
10.14 624 lb · pulg
10.16 24 N · m
10.18 2.07 kN · m
10.20 (Sin respuesta)
10.22 $120\tan\theta$ lb
10.24 400 lb · pie
10.26 55.2 N
10.28 120 kN
10.30 240 N
10.32 15.37 kN
10.34 10.19 lb
10.36 Fuerza de sujeción = $6.0P$
10.38 (a) 27.5 pulg directamente debajo de B; (b) 700 lb · pulg
10.40 Inestable
10.42 $\theta = 32.5°$ es estable
10.44 $h/R < 1/\sqrt{2}$
10.46 $\theta = \operatorname{sen}^{-1} W/(2kL)$ estable si $Lk/W > \sqrt{3}/2$
10.48 $\sqrt{WL/k}/2$
10.50 $\theta = 90°$ es estable, $\theta = 2.87°$ es inestable
10.52 Estable
10.54 $\theta = 45°$ es inestable
10.56 2.06 kg, inestable
10.58 79.1°, estable
10.60 $\theta = 29.6°$ es inestable, $\theta = 53.1°$ es estable
10.62 6.15°

Índice



D

E

F

N

P

R

S

T

Unidades SI (Système international d'unités)

Unidades SI seleccionadas			Prefijos SI de uso común		
Cantidad	**Nombre**	**Símbolo SI**	**Factor**	**Prefijo**	**Símbolo SI**
Energía	joule	J (1 J = 1 N · m)	10^9	giga	G
Fuerza	newton	N (1 N = 1 kg · m/s^2)	10^6	mega	M
Longitud	metro*	m	10^3	kilo	k
Masa	kilogramo*	kg	10^{-3}	mili	m
Momento (par de torsión)	newton-metro	N · m	10^{-6}	micro	μ
Frecuencia rotacional	segundo*	r/s	10^{-9}	nano	n
	hertz	Hz (1 Hz = 1 r/s)			
Esfuerzo (presión)	pascal	Pa (1 Pa = 1 N/m^2)			
Tiempo	segundo*	s			
Potencia	watt	W (1 W = 1 J/s)			

*Unidad SI base

Reglas seleccionadas y sugerencias para utilizar el SI

1. Tenga cuidado al utilizar letras mayúsculas y minúsculas para símbolos, unidades y prefijos (por ejemplo, m para metro o mili, M para mega).
2. Las cifras que tengan cinco o más dígitos deben colocarse en grupos de tres separados por un espacio pequeño, contando tanto a la izquierda como a la derecha del punto decimal (por ejemplo, 61 354.982 03). El espacio no se requiere para números de cuatro dígitos. Los espacios se utilizan en vez de comas para evitar confusión; en muchos países se utiliza la coma para marcar decimales.
3. En unidades compuestas formadas por multiplicación, utilice el producto punto (por ejemplo, N · m).
4. La división se puede indicar con una diagonal (m/s), o con un exponente negativo con un producto punto (m · s^{-1}).
5. Evite utilizar prefijos en el denominador (por ejemplo, se prefiere km/s que m/ms). La excepción a esta regla es el prefijo k en la unidad base kg (kilogramo).

Equivalencia de unidades inglesas y SI (un asterisco indica valores exactos; los otros son aproximaciones)

	Del sistema inglés al SI	**Del SI al inglés**
1. Longitud	1 pulg = 25.4* mm = 0.0254* m 1 pie = 304.8* mm = 0.3048* m	1 mm = 0.039 370 pulg 1 m = 39.370 pulg = 3.281 pies
2. Área	1 pulg^2 = 645.16* mm^2 1 pie^2 = 0.092 903 04* m^2	1 mm^2 = 0.001 550 pulg^2 1 m^2 = 1550.0 pulg^2 = 10.764 pies^2
3. Volumen	1 pulg^3 = 16 387.064* mm^3 1 pie^3 = 0.028 317 m^3	1 mm^3 = 0.000 061 024 pulg^3 1 m^3 = 61 023.7 pulg^3 = 35.315 pies^3
4. Fuerza	1 lb = 4.448 N 1 lb/pie = 14.594 N/m	1 N = 0.2248 lb 1 N/m = 0.068 522 lb/pie
5. Masa	1 lbm = 0.453 59 kg 1 slug = 14.593 kg	1 kg = 2.205 lbm 1 kg = 0.068 53 slugs
6. Momento de una fuerza	1 lb · pulg = 0.112 985 N · m 1 lb · pie = 1.355 82 N · m	1 N · m = 8.850 75 lb · pulg 1 N · m = 0.737 56 lb · pie
7. Potencia	1 hp (550 lb · pie/s) = 0.7457 kW	1 kW = 1.3410 hp

Momentos de inercia de áreas

Rectángulo

$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\quad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{12}$ $\quad \bar{I}_{xy} = 0$

$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\quad I_y = \frac{b^3h}{3}$ $\quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$

Círculo

$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$ $\quad I_{xy} = 0$

Medio complemento parabólico

$y = h\left(\frac{x}{b}\right)^2$ $\quad \bar{x} = \frac{3b}{4}$ $\quad \bar{y} = \frac{3h}{10}$

$\bar{I}_x = \frac{37bh^3}{2100}$ $\quad I_x = \frac{bh^3}{21}$

$\bar{I}_y = \frac{b^3h}{80}$ $\quad I_y = \frac{b^3h}{5}$

$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{120}$ $\quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$

Triángulo rectángulo

$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $\quad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{36}$ $\quad \bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$

$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\quad I_y = \frac{b^3h}{12}$ $\quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$

Semicírculo

$\bar{y} = \frac{4}{3\pi}R$

$\bar{I}_x = 0.1098R^4$ $\quad \bar{I}_{xy} = 0$

$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$ $\quad I_{xy} = 0$

Media parábola

$y = h\left(\frac{x}{b}\right)^2$ $\quad \bar{x} = \frac{3b}{8}$ $\quad \bar{y} = \frac{3h}{5}$

$\bar{I}_x = \frac{8bh^3}{175}$ $\quad I_x = \frac{2bh^3}{7}$

$\bar{I}_y = \frac{19b^3h}{480}$ $\quad I_y = \frac{2b^3h}{15}$

$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{60}$ $\quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{6}$

Triángulo isósceles

$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $\quad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{48}$ $\quad \bar{I}_{xy} = 0$

$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\quad I_{xy} = 0$

Cuarto de círculo

$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$ $\quad \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0.054\,88R^4$ $\quad I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$

$\bar{I}_{xy} = -0.016\,47R^4$ $\quad I_{xy} = \frac{R^4}{8}$

Sector circular

$\bar{x} = \frac{2R\,\text{sen}\,\alpha}{3\alpha}$

$I_x = \frac{R^4}{8}(2\alpha - \text{sen}\,2\alpha)$

$I_y = \frac{R^4}{8}(2\alpha + \text{sen}\,2\alpha)$

$I_{xy} = 0$

Triángulo

$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\quad \bar{y} = \frac{h}{3}$

$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $\quad I_x = \frac{bh^3}{12}$

$\bar{I}_y = \frac{bh}{36}(a^2 - ab + b^2)$ $\quad I_y = \frac{bh}{12}(a^2 + ab + b^2)$

$\bar{I}_{xy} = \frac{bh^2}{72}(2a - b)$ $\quad I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(2a + b)$

Cuarto de elipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\quad \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$

$\bar{I}_x = 0.054\,88ab^3$ $\quad I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$

$\bar{I}_y = 0.054\,88a^3b$ $\quad I_y = \frac{\pi a^3b}{16}$

$\bar{I}_{xy} = -0.016\,47a^2b^2$ $\quad I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}$

Momentos de inercia de masa

Barra esbelta

$m = AL\rho$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{12}mL^2 \qquad \bar{I}_z \approx 0$

Anillo delgado

$m = 2\pi AR\rho$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}mR^2 \qquad \bar{I}_z = mR^2$

Prisma rectangular

$m = abc\rho$

$\bar{I}_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$

$\bar{I}_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$

$\bar{I}_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

Tetraedro derecho

$m = \frac{1}{6}abc\rho$

$\bar{x} = \frac{1}{4}a$

$\bar{y} = \frac{1}{4}b$

$\bar{z} = \frac{1}{4}c$

$I_x = \frac{1}{10}m(b^2 + c^2) \qquad \bar{I}_x = \frac{3}{8}I_x$

$I_y = \frac{1}{10}m(c^2 + a^2) \qquad \bar{I}_y = \frac{3}{8}I_y$

$I_z = \frac{1}{10}m(a^2 + b^2) \qquad \bar{I}_z = \frac{3}{8}I_z$

Cilindro

$m = \pi R^2 h\rho$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{12}m(3R^2 + h^2) \qquad \bar{I}_z = \frac{1}{2}mR^2$

Esfera

$m = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \bar{I}_z = \frac{2}{5}mR^2$

Cono

$m = \frac{\pi}{3}R^2 h\rho$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{3}{80}m(4R^2 + h^2)$

$\bar{I}_z = \frac{3}{10}mR^2$

Barra semicircular

$m = \pi AR\rho$

$I_x = I_y = \frac{1}{2}mR^2$

$\bar{I}_x = I_x$

$\bar{I}_z = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mR^2$

$I_z = mR^2$

$\bar{I}_y = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mR^2$

Hemisferio

$m = \frac{2\pi}{3}R^3\rho$

$I_x = I_y = \frac{208}{320}mR^2 \qquad I_z = \bar{I}_z = \frac{2}{5}mR^2$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{83}{320}mR^2$

Cascarón cilíndrico

$m = 2\pi Rht\rho$

$I_x = I_y = \frac{1}{6}m(3R^2 + 2h^2) \qquad I_z = \bar{I}_z = mR^2$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{12}m(6R^2 + h^2)$

Cascarón cónico

$m = \pi Rt\rho\sqrt{R^2 + h^2}$

$I_x = I_y = \frac{1}{2}m(R^2 + 2h^2) \qquad I_z = \bar{I}_z = \frac{1}{2}mR^2$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{12}m(6R^2 + h^2)$

Cascarón hemisférico

$m = 2\pi R^2 t\rho$

$I_x = I_y = \frac{2}{3}mR^2 \qquad I_z = \bar{I}_z = \frac{5}{12}mR^2$

$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{5}{12}mR^2$

La tercera edición de *Ingeniería Mecánica: Estática*, ofrece a los estudiantes una cobertura de material sólida, sin la sobrecarga de detalles superfluos. La amplia experiencia docente del equipo de autores provee conocimiento de primera mano de los niveles de habilidad de aprendizaje de los estudiantes de hoy, que se refleja en el texto a través de la pedagogía y la vinculación de los problemas del mundo real y ejemplos, con los fundamentos de la Ingeniería Mecánica. Diseñado para enseñar a los estudiantes a analizar de forma eficaz los problemas antes de conectar los números en las fórmulas, éstos se benefician en gran medida al encontrar problemas de la vida real que no siempre encajan en las fórmulas habituales.

Características

- La introducción temprana de la relación entre fuerza y aceleración utilizada en esta pedagogía permite a los estudiantes darse cuenta de cómo se pueden utilizar mucho antes las leyes de Newton del movimiento para analizar los problemas.
- En su caso, los problemas de ejemplo se resuelven mediante notaciones escalares y vectoriales que permiten incrementar la capacidad de resolver problemas.
- El análisis del equilibrio de los problemas es el único enseñado en tres pasos: 1. cómo dibujar diagramas de cuerpo libre, 2. la forma de analizar los problemas con diagramas de cuerpo libre dados, y 3. cómo llevar a cabo análisis completos del problema mediante la combinación de los dos pasos anteriores.
- Las soluciones de los problemas de ejemplo que requieren análisis de equilibrio se tratan mediante una exclusiva y ordenada técnica con tres subdivisiones en general: i. método de análisis, ii. detalles matemáticos y iii. otros métodos de análisis.
- El análisis de equilibrio de un cuerpo único y organismos vinculados (a menudo denominado como “los marcos y las máquinas”) se analizan con detalle en un capítulo único y completo.
- Se incluyen problemas de ejemplo que requieren integración numérica.

CENGAGE Learning®

http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481872-7
ISBN-10: 607481872-X

9 786074 818727